УДК 532.135

ВЯЗКОСТЬ РАЗБАВЛЕННОЙ СУСПЕНЗИИ ЖЕСТКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. Шмаков, Л. М. Шмакова

(Киев)

Рассмотрим возмущения, вносимые взвешенной жесткой сферической частицей радиуса a в течение с параллельным градиентом скорости

(1) $$v_x = -(q/2)x,\ v_y = -(q/2)y,\ v_z = qz$$

неньютоновской жидкости, удовлетворяющей закону Оствальда — де Виле:

(2) $$P = -pE + m(I/2)^{(n-1)/2}\dot{S},$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости в декартовой системе координат $0xyz$ с началом в центре частицы; q — const; P — тензор напряжений; $\dot{S}$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\dot{S}_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$, $i, j = 1, 2, 3$; I — второй инвариант тензора $\dot{S}$; p — давление; E — единичный тензор; m — показатель консистенции; n — показатель неньютоновского поведения.

Введем, переходя к сферической системе координат (r, θ, φ), функцию тока $\psi(r, \theta)$, связанную с компонентами скорости соотношениями

(3) $$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Тогда уравнения движения степенной жидкости при пренебрежении инерционными силами (обобщенное число Рейнольдса по частице мало) запишутся следующим образом:

(4) $$\frac{\partial p}{\partial r} = m\left(\frac{I}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi + \frac{n-1}{2}\left\{2\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial\ln I}{\partial r} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\ln I}{\partial\theta}\right\}\right],$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = m\left(\frac{I}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}E^2\psi + \frac{n-1}{2}\left\{\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\ln I}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r\right)\frac{\partial\ln I}{\partial\theta}\right\}\right],$$

где $$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

а граничные условия задачи примут вид

(5) $$v_\theta = v_r = 0 \text{ при } r = a;$$
$$v_r = (qr/2)(2\cos^2\theta - \sin^2\theta),\ v_\theta = -(3qr/2)\sin\theta\cos\theta \text{ при } r \to \infty.$$

Пусть $(n-1)/2 \ll 1$ (дисперсионная среда мало отличается от ньютоновской жидкости). В этом случае уравнения (4) можно линеаризовать. Переходя в (4), (5) к безразмерным величинам $\bar{r} = r/a$, $\bar{v}_r = v_r/aq$,

$\bar{v}_\theta = v_\theta/aq$, $\bar{p} = p/p_\infty$(p_∞ — давление в невозмущенном потоке), $\bar{\psi} = \psi/a^3q$, $\bar{I} = I/3q^2$, будем искать решение задачи (4), (5) в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра $\varepsilon = (n-1)/2$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \varepsilon\bar{\psi}_1 + \varepsilon^2\bar{\psi}_2 + \ldots,$$
$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \varepsilon\bar{p}_1 + \varepsilon^2\bar{p}_2 + \ldots,$$

при этом

$$\bar{v}_r = \bar{v}_r^{(0)} + \varepsilon\bar{v}_r^{(1)} + \varepsilon^2\bar{v}_r^{(2)} + \ldots,$$
$$\bar{v}_\theta = \bar{v}_\theta^{(0)} + \varepsilon\bar{v}_\theta^{(1)} + \varepsilon^2\bar{v}_\theta^{(2)} + \ldots,$$
$$\bar{I} = \bar{I}_0 + \varepsilon\bar{I}_1 + \varepsilon^2\bar{I}_2 + \ldots$$

В нулевом приближении уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} B\dfrac{\partial\bar{p}_0}{\partial\bar{r}} = -\dfrac{1}{\bar{r}^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}E^2\bar{\psi}_0, \\ B\dfrac{\partial\bar{p}_0}{\partial\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\bar{r}}E^2\bar{\psi}_0 \end{cases} \tag{6}$$

и отличаются от уравнений движения ньютоновской жидкости наличием множителя $B = p_\infty/mq^n3^{(n-1)/2}$. Исключив из (6) давление, получим для определения $\bar{\psi}_0$ следующую краевую задачу:

$$E^4\bar{\psi}_0 = 0;\ \bar{\psi}_0 = \partial\bar{\psi}_0/\partial\bar{r} = 0 \text{ при } \bar{r} = 1; \tag{7}$$
$$\frac{\partial\bar{\psi}_0}{\partial\bar{r}} = -\frac{3\bar{r}^2}{2}\sin^2\theta\cos\theta,\ \frac{\partial\bar{\psi}_0}{\partial\theta} = -\frac{\bar{r}^3}{2}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta \text{ при } \bar{r}\to\infty.$$

В первом приближении получим уравнения

$$B\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\bar{\psi}_1 - \ln\left(\frac{\bar{I}_0}{2}\right)\frac{1}{\bar{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\bar{\psi}_0 + \tag{8}$$
$$+ 2\frac{\partial\bar{v}_r^{(0)}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\ln\bar{I}_0}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\frac{\bar{v}_\theta^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}_r^{(0)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\ln\bar{I}_0}{\partial\theta},$$
$$\frac{B}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial\theta} = \frac{1}{\bar{r}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}E^2\bar{\psi}_1 + \ln\left(\frac{\bar{I}_0}{2}\right)\frac{1}{\bar{r}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}E^2\bar{\psi}_0 +$$
$$+ \left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\frac{\bar{v}_\theta^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}_r^{(0)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\ln\bar{I}_0}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\left(\frac{\partial\bar{v}_\theta^{(0)}}{\partial\theta} + \bar{v}_r^{(0)}\right)\frac{\partial\ln\bar{I}_0}{\partial\theta}$$

и следующие граничные условия:

$$\bar{\psi}_1 = \partial\bar{\psi}_1/\partial\bar{r} = 0 \text{ при } \bar{r} = 1;\ \partial\bar{\psi}_1/\partial\bar{r} < 0(\bar{r})_2, \tag{9}$$
$$\partial\bar{\psi}_1/\partial\theta < 0(\bar{r}^2),\ \bar{p}_1 = 0 \text{ при } \bar{r}\to\infty.$$

Решение краевой задачи (7), отвечающей обтеканию жесткой сферической частицы потоком (1) ньютоновской жидкости, имеет вид

$$\bar{\psi}_0 = -\frac{\bar{r}^3}{2}\left(1 - \frac{5}{2\bar{r}^3} + \frac{3}{2\bar{r}^5}\right)\sin^2\theta\cos\theta. \tag{10}$$

Отсюда

$$\bar{v}_r^{(0)} = \frac{\bar{r}}{2}\left(1 - \frac{5}{2\bar{r}^3} + \frac{3}{2\bar{r}^5}\right)(2\cos^2\theta - \sin^2\theta); \tag{11}$$

$$\bar{v}_\theta^{(0)} = -\frac{3\bar{r}}{2}\left(1 - \frac{1}{\bar{r}^5}\right)\sin\theta\cos\theta; \tag{12}$$

$$\bar{I}_0 = 2 + \frac{5}{\bar{r}^3}(4 - 18\sin^2\theta + 15\sin^4\theta) - \tag{13}$$

$$-\frac{3}{\bar{r}^5}(8 - 40\sin^2\theta + 35\sin^4\theta) + \frac{25}{2}\frac{1}{\bar{r}^6}(4 - 9\sin^2\theta + 6\sin^4\theta) -$$

$$-\frac{30}{\bar{r}^8}(4 - 8\sin^2\theta + 5\sin^4\theta) + \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{r}^{10}}(48 - 80\sin^2\theta + 45\sin^4\theta).$$

Интегрируя (6) при граничном условии $\bar{p}_0 = 1$ при $\bar{r} \to \infty$, найдем

$$\bar{p}_0 = 1 - \frac{5}{2B}\frac{1}{\bar{r}^3}(3\cos^2\theta - 1). \tag{14}$$

Представляя $\ln(\bar{I}_0/2)$ в виде асимптотического разложения по степеням $1/\bar{r}$ и исключая в (8) давление $\bar{p}_1$, получим, используя (10)—(12), для определения $\bar{\psi}_1$ уравнение вида

$$E^4\bar{\psi}_1 = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(\bar{r})\sin^{2s}\theta\cdot\cos\theta, \tag{15}$$

где $F_s(\bar{r})$ — известные из решения задачи в нулевом приближении функции, являющиеся полиномами $1/\bar{r}$.

Решение задачи (15), (9) будем искать в виде

$$\bar{\psi}_1 = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(\bar{r})\sin^{2s}\theta\cdot\cos\theta. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим для определения $f_s(\bar{r})$ бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{\frac{d^4}{d\bar{r}^4} - 4s(2s-1)\left[\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{d^2}{d\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^3}\frac{d}{d\bar{r}} - \frac{(s-1)(2s+3)}{\bar{r}^4}\right]\right\} f_s(\bar{r}) + \tag{17}$$

$$+ 8s(s+1)\left[\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{d^2}{d\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^3}\frac{d}{d\bar{r}} - \frac{2s(2s+3)}{\bar{r}^4}\right] f_{s+1}(\bar{r}) +$$

$$+ \frac{16s(s+1)^2(s+2)}{\bar{r}^4} f_{s+2}(\bar{r}) = F_s(\bar{r}), \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

а на основании (9) следующие граничные условия:

$$f_s(\bar{r}) = df_s(\bar{r})/d\bar{r} = 0 \text{ при } \bar{r} = 1;\ f_s(\bar{r}) < 0(\bar{r}^2), \tag{18}$$

$$df_s(\bar{r})/d\bar{r} < 0(\bar{r}) \text{ при } \bar{r} \to \infty,\ s = 1, 2, 3, \ldots$$

Найдем приближенное решение задачи (15), (9), позволяющее определить компоненты скорости $v_r^{(1)}$, $v_\theta^{(1)}$ с точностью до членов порядка $0(1/\bar{r}^2)$. Как показывает анализ, для этого необходимо решить пять уравнений системы (17), при этом четвертое уравнение не содержит $f_6(\bar{r})$, а пятое — $f_6(\bar{r})$ и $f_7(\bar{r})$. Это позволяет, решив пятое уравнение, найти $f_5(\bar{r})$, а затем $f_4(\bar{r})$, $f_3(\bar{r})$, $f_2(\bar{r})$ и $f_1(\bar{r})$, решая последовательно остальные уравнения. Нахождение $f_4(\bar{r})$ и $f_5(\bar{r}) < 0(1/\bar{r}^2)$ необходимо для определения постоянных интегрирования, входящих в общие решения однородных уравнений при $s = 1$ и 2. Общие решения однородных уравнений системы (17) имеют вид

$$\bar{f}_s(\bar{r}) = c_1^{(s)}\bar{r}^{2s+3} + c_2^{(s)}\bar{r}^{2s+1} + c_3^{(s)}\bar{r}^{-2(s-1)} + c_4^{(s)}\bar{r}^{-2s},$$

где c_i^s $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ s = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$ — постоянные интегрирования. Частные решения неоднородных уравнений системы определяются видом функций $F_s(\bar r)$, при этом первые пять функций $F_s(\bar r)$ равны

$$F_1(\bar r) = 15\cdot 111/\bar r^4 - 15\cdot 232/\bar r^6 - 225\cdot 167/2\bar r^7,$$
$$F_2(\bar r) = -15\cdot 483/\bar r^4 + 15\cdot 1039/\bar r^6 + 225\cdot 2061/2\bar r^7, \tag{19}$$
$$F_3(\bar r) = 15\cdot 855/2\cdot\bar r^4 - 15\cdot 1869/2\bar r^6 - 225\cdot 3429/\bar r^7,$$
$$F_4(\bar r) = 225\cdot 4350/\bar r^7,\quad F_5(\bar r) = -225\cdot 1875/\bar r^7.$$

Решение краевой задачи (17)—(19) в принятом приближении имеет вид

$$f_1 = A_1 + A_2 \ln \bar r;\ f_2 = A_3;\ f_3 = A_4 \tag{20}$$
$$(A_1 = 5\cdot 70027/64\cdot 49\cdot 33,\ A_2 = -15/14,\ A_3 = -309/56,\ A_4 = 475/112).$$

Используя (20), (16) и (3), получим

$$\bar\psi_1 = [(A_1 + A_2 \ln \bar r) \sin^2\theta + A_3 \sin^4\theta + A_4 \sin^6\theta] \cos\theta;$$
$$\bar v_r^{(1)} = \frac{A_2}{\bar r^2} [\ln \bar r (1 - 3\cos^2\theta) + 0(1)]; \tag{21}$$
$$\bar v_\theta^{(1)} = \frac{A_2}{2\bar r^2} \sin 2\theta. \tag{22}$$

Решая уравнения (8) в принятом приближении, найдем распределение давления

$$\bar p_1 = (2/B\bar r^3)[\ln \bar r(1 - 3\cos^2\theta) + 0(1)]. \tag{23}$$

На основании полученного решения (11), (12), (14), (21)—(23) определим эффективную вязкость суспензии, используя энергетический метод Эйнштейна [1, 2]. При определении диссипации механической энергии в окрестности частицы (поскольку решение (21)—(23) известно только в точках, достаточно удаленных от поверхности частицы) поступим аналогично [3], т. е. определим диссипацию механической энергии в объеме, ограниченном сферической поверхностью σ радиуса R, через мощность поверхностных сил, приложенных к этой поверхности:

$$w = \int\limits_\sigma\int (P_{rr}v_r + P_{r\theta}v_\theta)\, d\sigma. \tag{24}$$

Вычисляя компоненты тензора напряжений P_{rr} и $P_{r\theta}$ (2) и подставляя их в (24), получим

$$W = w/V_* = mq^{n+1}3^{(n+1)/2}[1 + \Phi/2 - \varepsilon\Phi \ln \Phi + 0(\varepsilon\Phi)], \tag{25}$$

где V_* — объем, ограниченный поверхностью σ.

С другой стороны, диссипацию механической энергии W можно определить через мощность внутренних сил.

Для несжимаемой жидкости

$$W = P\dot S^*/2, \tag{26}$$

где $\dot S^*$ — тензор скоростей деформации в суспензии, компоненты которого определяются следующим образом:

$$\dot S^*_{xx} = \dot S^*_{yy} \frac{2}{V_*} \int\limits_{V_*} \frac{\partial v_x}{\partial x} dV_* = \frac{2}{V_*} \int\limits_\sigma v_x \frac{x}{r}\, d\sigma, \tag{27}$$

$$\dot{S}^{*}_{zz} = \frac{2}{V_*}\int\limits_{V_*}\frac{\partial v_z}{\partial z}\,dV_* = \frac{2}{V_*}\int\limits_{\sigma} v_z\frac{z}{r}\,d\sigma,$$

$$\dot{S}_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \ (i, j = 1, 2, 3).$$

Если суспензия разбавленная (взвешенные частицы — жесткие шарики), а дисперсионная среда по своим реологическим свойствам мало отличается от ньютоновской жидкости, то будем рассматривать суспензию в квазиньютоновском приближении, т. е. считать, что ее реологическое уравнение состояния имеет вид

(28) $$P = -pE + \mu_{\text{эфф}} S^{*}.$$

Тогда на основании (26)—(28) получим выражение для диссипации механической энергии

(29) $$W = \mu_{\text{эфф}}\,[1 - 2\Phi - (4/7)\varepsilon\Phi\ln\Phi + 0(\varepsilon\Phi)]\,3q^2.$$

Сравнивая (29) с (25), получим выражение для эффективной вязкости рассматриваемой суспензии

(30) $$\mu_{\text{эфф}} = m\left[1 + \frac{5}{2}\Phi + \frac{11}{7}\varepsilon\Phi\ln\Phi + 0(\varepsilon\Phi)\right]q^{n-1}3^{\frac{n-1}{2}}.$$

Так как в рассматриваемом течении

$$(I/2)^{(n-1)/2} = 3^{(n-1)/2}\,q^{n-1},$$

из соотношения (30) следует, что разбавленная суспензия жестких сферических частиц в степенной жидкости, мало отличающейся от ньютоновской, ведет себя как степенная жидкость с эффективным коэффициентом консистенции

$$m_{\text{эфф}} = m(1 + (5/2)\Phi + (11/7)\varepsilon\Phi\ln\Phi.$$

При $\Phi \to 0$ выражение эффективной вязкости суспензии (30) переходит выражение эффективной вязкости дисперсионной среды

$$\mu_{\text{эфф}} = m(I/2)^{(n-1)/2}$$

при $n = 1$ (дисперсионная среда — ньютоновская жидкость) (30) дает классический результат Эйнштейна.

Поступила 5 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Einstein A.** Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen.— «Ann. Phys.», 1906, Bd 19.
2. **Einstein A.** Berichtigung zu meiner Arbeit: «Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen.» — «Ann. Phys.», 1911, Bd 34.
3. **Jeffery G. B.** The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid.— «Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1922, vol. 102, N 715.