

свойством самоуравновешенности. И так, напряжения на границе слоя равны нулю, а решение соответствующей системы (интенсивности разрывов) отлично от нуля. Таким образом, система уравнений при переходе к бесконечной области стала неопределенной. В [1] фундаментальные решения были использованы для получения системы интегральных и алгебраических уравнений, описывающих напряженное состояние композита, имеющего разрывы волокон и расслоения связующего. При этом границы композита, перпендикулярные волокнам, рассматривались как разрывы волокон в объемлющем бесконечно большом образце. В связи с ухудшением обусловленности системы при росте числа уравнений в рассмотренном примере представляется целесообразным удовлетворять условия в напряжениях на внешних границах, перпендикулярных волокнам, с помощью фундаментального решения о сосредоточенной силе, а условия на внутренних разрывах — с помощью фундаментального решения (2.1), (2.2). Для иллюстрации сказанного снова рассмотрим задачу о равномерно нагруженном слое. Достаточно приложить к концам каждого волокна, выходящим на границы, сосредоточенные силы, обеспечивающие нужное напряжение, чтобы весь слой оказался уравновешенным. В этом случае бесконечная система распадается на отдельные одномерные уравнения и ν оказывается равным 1. Во всех численных расчетах $\beta = \sqrt{2/9}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А. Г. Концентрация напряжений в конструкции из однонаправленного композита // ПМТФ. — 1982. — № 2.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Hedgepeth J. M., Van Dyke P. Local stress concentration in imperfect filamentary composite materials // J. Composite Mater. — 1967. — V. 3, N 1.
4. Ермак А. А., Михайлов А. М. Теоретическое определение разброса прочности стеклопластика // ПМТФ. — 1980. — № 6.

г. Новосибирск

Поступила 23/IV 1990 г.

УДК 539.3

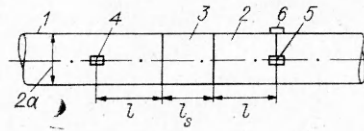
В. М. Корнев

УТОЧНЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕТОДА СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ КОЛЬСКОГО — ГОПКИНСОНА

Представлены уточненные зависимости метода составного стержня, принимающие во внимание искажение импульса деформации за счет дисперсии. При построении уточненных соотношений используется уравнение Рэлея продольных колебаний стержня [1]. Кроме того, предлагается измерять ускорение на поверхности мерного стержня в одном из сечений, что позволяет: 1) улучшить согласование параметрически заданной функции напряжение — деформация, 2) легко найти скорость деформирования образца, 3) подправить напряжения в образце с учетом инерционной составляющей.

Хорошо разработанный метод составных стержней Кольского — Гопкинсона [2—4] позволяет получать достаточно достоверные одномерные динамические диаграммы напряжение — деформация при значительных скоростях деформирования. Классические зависимости этого метода основываются на одномерной теории распространения упругих волн в стержнях и не учитывают дисперсию волн в реальных стержнях как в трехмерных объектах:

$$(i) \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma = E\varepsilon.$$



Здесь $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ и $\sigma = \sigma(x, t)$ — деформация и напряжение; $u = u(x, t)$ — смещение вдоль оси стержня; x и t — продольная координата и время; c — скорость распространения одномерных упругих волн в стержне или «стержневая» скорость, которая в классической теории не зависит от длины волны: $c^2 = E/\rho$ (E и ρ — модуль упругости и плотность материала мерных стержней).

Предлагаемая схема метода измерений для стержня почти не отличается от классической и приведена на рисунке, где 1 — стержень-передатчик давления, 2 — стержень-наковальня, 3 — образец, 4 и 5 — тензодатчики, 6 — датчик ускорения, установленный на поверхности стержня-наковальни в сечении, совпадающем с сечением тензодатчика 5. Обозначим $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_r(t)$ и $\varepsilon_t(t)$ — деформации в падающей, отраженной и прошедшей волнах, l_s и l — длину образца материала и расстояние от торца стержней до тензодатчиков, a — радиус стержней и образца. После соответствующих преобразований [2] из соотношений (1) с учетом измерений ε_i , ε_r и ε_t получаются зависимости, описывающие поведение образца материала:

$$(2) \quad \varepsilon_s = \varepsilon_s(t), \quad \sigma_s = \sigma_s(t)$$

(t — параметр). Выражения (2) — параметрическое представление кривой $\sigma_s - \varepsilon_s$, причем она не отличается гладкостью из-за наличия дисперсии [3]. В [3] предложен частичный учет дисперсии в стержне при обработке измерений (см. соотношения (10) и (13) из [3], в которых $c = \text{const}$); в [5] проведен учет дисперсии при обработке измерений, но только для слоя. Анализ продольных колебаний стержней [1, 6] и слоя [5, 7] позволяет представить процесс распространения импульса деформаций по стержню как по трехмерному телу в следующем виде: впереди перемещается со скоростью продольных волн предвестник, несущий малую долю энергии; далее в основном со «стержневой» скоростью распространяется основная гладкая часть импульса, она искажается за счет дисперсии; от основной части отстает возмущение, описывающее только сдвиговые деформации (скорость его — скорость волн искажения). С практической точки зрения главную информацию о происхождении импульса несет основная гладкая его часть. Если импульс имеет сильный разрыв (пусть таковы условия на торце), то происходит размытие фронта сильного разрыва [1, 6], перемещающегося со «стержневой» скоростью. Как показано в [6], распространение основной части импульса хорошо описывает уравнение Рэлея с точностью до коэффициента k . Полагая деформацию $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ не зависящей от поперечных координат y и z , получим

$$(3) \quad v = -\nu y \partial u / \partial x, \quad w = -\nu z \partial u / \partial x, \quad u = u(x, t)$$

(v и w — смещения в направлениях y и z , ν — коэффициент Пуассона). После соответствующих преобразований [1] окончательно имеем

$$(4) \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nu^2 k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0.$$

Здесь k — полярный радиус инерции сечения, для круглого сечения $k^2 = a^2/2$ (a — радиус стержня). Прямые $ct \pm x$ не являются характеристиками уравнения (4).

Рассмотрим решения в виде проходящих волн

$$(5) \quad u_n = A_n \sin(q_n x \pm \omega_n t + \varphi_n) = A_n \sin(q_n(x \pm c_n t + \varphi_n/q_n)),$$

где A_n — амплитуда волны; q_n — волновое число ($q_n > 0$); ω_n — частота; φ_n — фаза; $c_n = \omega_n/q_n$ — скорость волны. В соотношении (5) ис-

пользованы две записи одного и того же решения, так как обе они будут применяться ниже. Волновое число q_n характеризует изменяемость решения вдоль стержня, волна перемещается со скоростью

$$(6) \quad c_n^2 = c^2 / (1 + v^2 k^2 q_n^2).$$

Очевидно, что $c_n \rightarrow c$, когда $q_n \rightarrow 0$. Принимая во внимание (5), (6), получим

$$(7) \quad \partial u / \partial x = \pm c_n^{-1} \partial u / \partial t,$$

причем $c_n \neq c$ для $q_n > 0$. Равенство (7) учитывает дисперсию волн в отличие от классического соотношения (4).

Рассмотрим смещения торцов стержней u_1 и u_2 , примыкающих к образцу, причем индексы 1 и 2 соответствуют передатчику давления и наковальне, тогда $\partial u_2 / \partial x = \varepsilon_t$, $\partial u_1 / \partial x = \varepsilon_t + \varepsilon_r$. Учитывая, что $\varepsilon_t - \varepsilon_r = \varepsilon_l$, имеем

$$(8) \quad \partial(u_2 - u_1) / \partial x = -2\varepsilon_r.$$

Соотношения (8) и

$$(9) \quad \sigma_s = E\varepsilon_t$$

позволяют учесть дисперсию волн (см. (6)).

Полученные при измерениях функции $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_r(t)$ и $\varepsilon_t(t)$ доопределяем до нечетных периодических $\varepsilon_i^*(t)$, $\varepsilon_r^*(t)$ и $\varepsilon_t^*(t)$, раскладываем периодические функции $\varepsilon_r^*(t)$ и $\varepsilon_t^*(t)$ в ряды Фурье

$$(10) \quad \varepsilon_t^*(t) = \left. \frac{\partial u_t^*}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^N A_{nt} \sin \omega_n t = - \sum_{n=1}^N A_{nt} \sin(-q_n c_n t),$$

$$\varepsilon_r^*(t) = \left. \frac{\partial u_r^*}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^N A_{nr} \sin \omega_n t = \sum_{n=1}^N A_{nr} \sin q_n c_n t.$$

Подсчет коэффициентов A_{nt} и A_{nr} в (10) проводится по стандартным формулам, когда используется первое представление рядов Фурье. Отметим, что начало отсчета $x = 0$ для каждого измерения свое и совпадает с расположением тензодатчиков 5 и 4. Номер N выбирается из ограничения: длина волны для N должна быть не менее радиуса стержня, что соответствует применимости уравнения Рэлея (4) [1]. Переходим к проходящим волнам (см. (5) и второе представление ряда Фурье в (10)). Принимая во внимание, что прошедшая волна распространяется вправо, а отраженная — влево, получим

$$(11) \quad \frac{\partial u_t^*}{\partial x}(x, t) = - \sum_{n=1}^N A_{nt} \sin q_n (x - c_n t),$$

$$u_r^*(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{A_{nr}}{q_n} \cos q_n (x + c_n t) + \frac{A_{0r}}{2}, \frac{A_{0r}}{2} = - \sum_{n=1}^N \frac{A_{nr}}{q_n}.$$

При определении постоянной A_{0r} использовано условие, что до прихода импульса деформаций стержень находился в покое. Подчеркнем, что в представлениях (11) начала отсчета по координатам x разные, так как они совпадают с тензодатчиками 5 и 4. Рассмотрим учет дисперсии в соотношениях (8), (9) и (11). Для восстановления величин на торцах образца по замерам ε_i^* , $\partial u_t^* / \partial x$ и u_r^* , когда тензодатчики расположены на расстоянии l от торцов, введем преобразование координат

$$(12) \quad t = t_1 \pm l/c.$$

В (12) знак плюс выбирается, когда тензодатчик расположен до торца относительно распространения возмущения в падающей волне, минус — когда тензодатчик расположен за торцом относительно распространения

возмущения в отраженной и прошедшей волнах. После преобразований получаются следующие уточненные зависимости метода составных стержней Кольского — Гопкинсона:

$$(13) \quad \sigma_s = -E \sum_{n=1}^N A_{nt} \sin q_n \left[-l \left(1 - \frac{c_n}{c} \right) - c_n t_1 \right];$$

$$(14) \quad \varepsilon_s = \frac{2}{l_s} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{A_{nr}}{q_n} \cos q_n \left[l \left(1 - \frac{c_n}{c} \right) + c_n t_1 \right] + \frac{A_{0r}}{2} \right\}.$$

Фаза $\pm l(1 - c_n/c)$ в соотношениях (13), (14) зависит от номера n , так как разные волны имеют разные скорости. Вообще говоря, величина $(1 - c_n/c)$ малая, так как $c \approx c_n$, но фаза может быть и большой из-за длины l . Формулы (13), (14) для $\sigma_s = \sigma_s(t_1)$ и $\varepsilon_s = \varepsilon_s(t_1)$ учитывают дисперсию двояко: $c_i \neq c_j$, если $i \neq j$; и фаза волны зависит от номера.

Для улучшения согласования параметрически заданной функции напряжения — деформация измерим ускорение поверхности мерного стержня в сечении, где расположен тензодатчик 5:

$$(15) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -va \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^3} = \psi(t).$$

Регистрация ускорений $\psi(t)$ позволяет уточнить время вступления функции σ_s , причем в предлагаемом варианте измерение ускорений возможно при испытаниях и на сжатие, и на растяжение [2]. Очевидно, что скорость деформирования в этом случае подсчитывается непосредственно:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{va} \int_0^t \psi(t) dt.$$

При высоких скоростях деформирования (порядка $10^3 \div 10^4$ с⁻¹. возникают инерционные силы, которые целесообразно учесть при определении реальной диаграммы $\sigma_s - \varepsilon_s$ (см. (3.19), (3.20) и (3.23) из [2]). Пусть измерено ускорение на поверхности стержней $\psi(t)$ (15), доопределим эту функцию до нечетной периодической $\psi^*(t)$, получим (A_n — коэффициенты ряда Фурье)

$$\left. \frac{\partial^3 u^*}{\partial x \partial t^3} \right|_{x=0} = -\frac{\psi^*(t)}{va} = -\frac{1}{va} \sum_{n=1}^N A_n \sin \omega_n t = \frac{1}{va} \sum_{n=1}^N A_n \sin(-q_n c_n t),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u^*(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{va} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{q_n} \cos q_n (x - c_n t) + \frac{A_0}{2} \right\}, \quad \frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{q_n},$$

так как волна движется вправо, а до прихода волны стержень находился в покое. Учтем дисперсию волн (12). Пусть геометрические размеры образца удовлетворяют соотношению $l_s = \sqrt{3}v_s a$, тогда напряжения в образце подсчитываются по формуле [2]

$$(16) \quad \sigma_s = -E \sum_{n=1}^N A_{nt} \sin q_n \left[-l \left(1 - \frac{c_n}{c} \right) - c_n t_1 \right] + \rho_s \frac{l_s}{2} \frac{\partial^2 u^*(t_1)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u^*(t_1)}{\partial t^2} = \frac{1}{va} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{q_n} \cos q_n \left[-l \left(1 - \frac{c_n}{c} \right) - c_n t_1 \right] + \frac{A_0}{2} \right\}.$$

Таким образом, (14), (16) — окончательные уточненные зависимости метода составных стержней Кольского — Гопкинсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
2. Кокошвили С. М. Методы динамических испытаний жестких полимерных материалов.— Рига: Зинатне, 1978.
3. Фоллэнсби, Франц. Распространение волн в составном стержне Гопкинсона // Тр. Америк. о-ва ниж.-мех. Теор. основы ниж. расчетов.— 1983.— № 1.
4. Брагов А. М., Ломунов А. К. Особенности построения диаграмм деформирования методом Кольского // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т.— 1984.— Вып. 28.
5. Корнев В. М. Распространение волн деформаций в слое с учетом поперечных движений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1987.— Вып. 82.
6. Кукуджанов В. Н. Асимптотические решения уточненных уравнений упругих и упругопластических волн в стержнях // Волны в неупругих средах.— Кишинев, 1970.
7. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 5/III 1991 г.

УДК 539.3

Н. И. Остросаблин

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе введены собственные числа и векторы для матрицы коэффициентов в уравнениях движения в смещениях линейной теории упругости. Собственные числа и векторы найдены для матриц коэффициентов в случае материалов кристаллографических сингоний и представлены через независимые параметры, обеспечивающие положительную определенность удельной энергии деформации. Указаны материалы, для которых уравнения для каждого смещения становятся не зависимыми друг от друга. В зависимости от количества различных собственных чисел и их кратностей уравнения движения разбиваются на 32 класса.

Уравнения теории упругости в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [1]

$$(1) \quad \left[\frac{1}{2} (A_{iklj} + A_{iljk}) \partial_{kl} - \rho \delta_{ij} \partial_{..} \right] u_j + F_i = 0,$$

где u_j — вектор смещения; F_i — вектор объемных сил; A_{iklj} — тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; δ_{ij} — символ Кронекера; ∂_k — дифференцирование по координате x_k ; $\partial_{..}$ — дифференцирование по времени; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование от 1 до 3. Постоянные A_{iklj} обладают свойствами симметрии [1]:

$$(2) \quad A_{iklj} = A_{kilj} = A_{ljk i}.$$

Учитывая (2), получаем, что коэффициенты $A_{ijhl}^* = A_{i(hl)j} = \frac{1}{2} (A_{iklj} + A_{iljk})$, входящие в (1), имеют такие же свойства симметрии, как и модули упругости:

$$(3) \quad A_{ijhl}^* = A_{jikh}^* = A_{klji}^*.$$

Аналогично собственным модулям упругости и состояниям [2—8] для тензора A_{iklj} можно ввести собственные числа и тензоры для коэффициентов (3):

$$(4) \quad A_{ijhl}^* = f_{ijpq} \mu_{pqrs} f_{hlrs} \quad ((pq) = (rs)),$$

$$f_{ijpq} f_{ijrs} = \delta_{pqrs} = \frac{1}{2} (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}).$$

В двухиндексной матричной записи [6—8] формулы (4) представим так:

$$(5) \quad A_{ik}^* = f_{ip} \mu_{pr} f_{kr} \quad (p = r), \quad f_{ip} f_{ir} = \delta_{pr}.$$

Здесь суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 6. Очевидно, что $\mu_{11} = \mu_1, \mu_{22} = \mu_2, \dots, \mu_{66} = \mu_6, f_{ip}$ — собственные числа и векторы симметрической матрицы A_{ik}^* .

9*