

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ПЕРЕСЖАТЫХ  
ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН В ГАЗАХ***Ю. А. Николаев**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева,  
630090 Новосибирск*

Построена приближенная математическая модель распространения плоских пересжатых детонационных волн в газах. Получены точное аналитическое решение типа простой волны и приближенные аналитические решения, описывающие возбуждение и затухание пересжатых волн при инициировании и галопирующем режиме детонации.

Пересжатые режимы детонации характерны как для процессов возбуждения детонации, так и для распространения элементов фронта самоподдерживающейся многофронтной детонации. Основную роль пересжатые режимы играют и при распространении галопирующей детонации. Часто источником пересжатых волн является взрыв локально сжатого (например, ударной волной) газа.

В данной работе построены математическая модель распространения плоских пересжатых волн и решение типа простой волны, исследовано влияние на решение возмущений. Модель применена для оценки возбуждения и затухания пересжатых волн при инициировании детонации посредством секции повышенного давления и для галопирующей детонации (взрыв во взрыве).

Из известных работ, примыкающих к данной задаче, можно выделить [1], в которой дано автомодельное решение для самоподдерживающейся детонации, и [2], где рассмотрена асимптотика затухания пересжатых волн.

**Постановка задачи**

Рассмотрим интенсивно взрывающиеся газовые смеси, для которых температура продуктов детонации составляет не менее 3000 К. Предполагаем диаметр детонационной трубы достаточно большим, чтобы можно было пренебречь задержками воспламенения за фронтом детонации, по крайней мере, в зоне распространения волны в пересжатом режиме. В этом случае течение продуктов детонации можно полагать химически квазиравновесным, а показатель равновесной адиабаты близким к единице [3], т. е.

$$p/\rho = c^2 \equiv \text{const}, \quad (1)$$

где  $p$ ,  $\rho$ ,  $c$  — давление, плотность и равновесная скорость звука [4] соответственно.

Такой подход обладает достаточно высокой абсолютной точностью, а для параметров, обезразмеренных параметрами детонации Чепмена — Жуге, погрешность становится пренебрежимо малой [4].

Для инертных сред (1) соответствует «изотермическому» газу. Для химически реагирующих сред с переменной молекулярной массой это название не вполне подходит, поэтому воспользуемся термином «псевдоизотермический» газ.

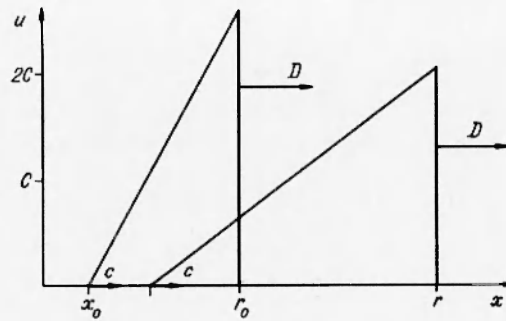


Рис. 1.

Схема движения волны изображена на рис. 1. Здесь  $D$  и  $r$  — скорость и координата фронта детонации,  $u$  — скорость газа,  $x$  — координата. Отметим, что для сильной детонации Чепмена — Жуге с псевдоизотермическими продуктами  $D = D_{CJ} = 2c$ .

В дальнейшем нижний индекс соответствует начальному состоянию (0), перед волной (00), на фронте волны ( $f$ ), либо частным производным по переменным  $t, x, \tau, S_f, \xi, \delta, L_0, \lambda$  или  $\xi$ .

Пусть газ перед волной покоится и имеет плотность  $\rho_{00}$ . Движение описывается уравнениями

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + c^2 \rho_x / \rho = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 2\alpha c$$

( $\alpha = D/D_{CJ}$  — степень пересжатия,  $t$  — время) с граничными ( $p_{00} \ll \rho_{00} D^2$ )

$$\rho_f = 2\rho_{00}(\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}), \quad u_f = c(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$$

и начальными условиями

$$t = t_0, \quad r(t_0) = r_0, \quad x < r_0, \quad \rho(x, t_0) = \rho_0(x), \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

После замены переменных  $\tau = c(t - t_0)$ ,  $M = u/c$ ,  $q = \ln(e\rho/2\rho_{00})$  задача примет вид:

$$q_\tau + Mq_x + M_x = 0, \quad M_\tau + MM_x + q_x = 0, \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{1 + M_f^2}{M_f}, \quad q_f = \ln[e(1 + M_f^2)/2], \quad (2)$$

где  $q_f = q(r, \tau)$ ,  $M_f = M(r, \tau)$ ,  $r(0) = r_0$ ,  $q(x, 0) = q_0(x) = \ln[e\rho_0(x)/2\rho_{00}]$ ,  $M(x, 0) = M_0(x) = u_0(x)/c$ , при этом  $\alpha = (1 + M_f^2)/2M_f$ .

Для слабо пересжатых детонационных волн, т. е. при  $\alpha - 1 \ll 1$ ,  $M_f - 1 \ll 1$ ,

$$\ln[e(1 + M_f^2)/2] = M_f + O[(M_f - 1)^3], \quad (3)$$

и, следовательно, с точностью до величин третьего порядка малости вместо (2) можно использовать приближенное краевое условие

$$q_f \equiv M_f. \quad (4)$$

Как видно из рис. 2, для оценок этим условием можно пользоваться и для больших значений  $M_f$ . В дальнейшем будем полагать (4) всегда выполненным.

Отметим, если  $q_0(x) \equiv M_0(x)$ , то  $q(x, \tau) \equiv M(x, \tau)$ , инвариант Римана для псевдоизотермического газа  $u - c \cdot \ln \rho$  постоянен во всей области движения, решение является простой волной и для  $x \leq r$  определяется из алгебраического уравнения:  $M = M_0(x - \tau - M\tau)$ , где в скобках стоит аргумент функции  $M_0$ .

Координату фронта  $r$  можно определить, интегрируя уравнения

$$M_f = M_0(r - \tau - M_f \tau), \quad \frac{dr}{d\tau} = (1 + M_f^2)/M_f.$$

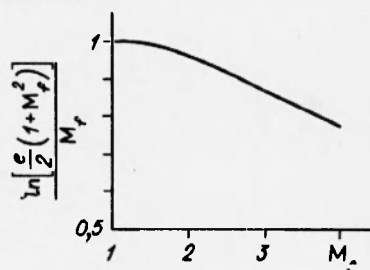


Рис. 2.

### «Треугольная» простая волна

Рассмотрим частный случай начальных условий:

$$M_0(x) = q_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ M_{0f}(x - x_0)/(r_0 - x_0), & x_0 \leq x \leq r_0. \end{cases} \quad (5)$$

Переходя от  $\tau, x$  к переменным  $M_f$  ( $1 < M_f \leq M_{0f}$ ) и  $\xi = (x - x_0 - \tau)/(r - x_0 - \tau)$  ( $\xi \leq 1$ ), легко получить решение:

$$M(\xi, M_f) \equiv q(\xi, M_f) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ M_f \xi, & 0 \leq \xi \leq 1; \end{cases} \quad (6)$$

$$r = r_0 + (r_0 - x_0) \frac{M_{0f} + 1}{M_{0f}} \left[ \frac{(M_f + 1)(M_{0f} - 1)}{(M_f - 1)(M_{0f} + 1)} \exp(M_{0f} - M_f) - 1 \right]; \quad (7)$$

$$t = t_0 + \frac{2(r_0 - x_0)}{D_{CJ} M_{0f}} \left[ \frac{M_{0f} - 1}{M_f - 1} \exp(M_{0f} - M_f) - 1 \right]; \quad (8)$$

$$x = \xi r + (1 - \xi)x_0 + D(t - t_0)/2; \quad (9)$$

$$\alpha = (1 + M_f^2)/2M_f. \quad (10)$$

Это решение проиллюстрировано на рис. 1, 3. Треугольный профиль скорости примыкает к зоне покоя, причем точка сопряжения передвигается вправо со скоростью звука, а скорость газа на фронте и скорость детонации убывают. При безграничном увеличении времени скорость детонации стремится к скорости детонации Чепмена — Жуге, а структура течения — к описываемой известным автомодельным решением [1] ( $D \equiv D_{CJ}$ ). В координатах  $M/M_f, \xi$  (см. рис. 3) картина стационарна.

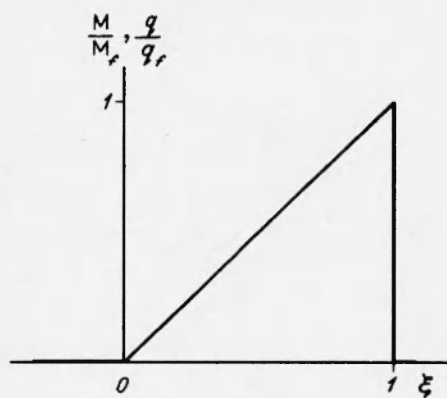


Рис. 3.

Логарифмы плотности и соответственно давления ведут себя аналогично ( $M \equiv q$ ). Отметим, что основными параметрами решения (7), (8) являются  $r_0 - x_0$  и  $M_{0f}$ , в начальный момент определяющие протяженность «пробки» движущегося газа и амплитуду пересжатия.

### Возмущенная задача

Решение (6)–(10) соответствует вполне определенному виду начальных условий (5). Исследуем, как влияют на решение малые возмущения начальных условий.

Перейдем к переменным  $S = (M + q)/2$ ,  $Z = (M - q)/2$ ,  $S_f$ ,  $\xi$ . Тогда получим

$$S_{S_f} + G[S + Z - \xi(S_f^2 - S_f + 1)/S_f]S_\xi = 0; \quad (11)$$

$$Z_{S_f} + G[S + Z - \xi(S_f^2 - S_f + 1)/S_f - 2]Z_\xi = 0; \quad (12)$$

где

$$G = \tau_{S_f}/(r - x_0 - \tau); \quad (13)$$

$$r_{S_f} = (1 + S_f^2)\tau_{S_f}/S_f; \quad (14)$$

$$S(1, S_f) \equiv S_f, \quad Z(1, S_f) \equiv 0, \quad r(S_{0f}) = r_0, \quad \tau(S_{0f}) = 0,$$

$$S(\xi, S_{0f}) = S_0(\xi), \quad Z(\xi, S_{0f}) = Z_0(\xi).$$

«Треугольной» волне соответствуют начальные условия и решение

$$S(\xi, S_{0f}) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \xi S_{0f}, & 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$Z(\xi, S_{0f}) \equiv 0,$$

$$S(\xi, S_f) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \xi S_f, & 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$Z(\xi, S_f) \equiv 0, \quad G = -1/(S_f - 1).$$

Рассмотрим возмущенную задачу

$$S_0(\xi) = \delta(S_{0f} - 1) \cdot s_0(\xi) + \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \xi S_{0f}, & 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$Z_0(\xi) = \delta(S_{0f} - 1) \cdot z_0(\xi),$$

где  $\delta$  — малый параметр. Будем предполагать, что функции  $s_0$ ,  $z_0$  и  $(S_{0f} - 1)s_{0\xi}$  ограничены и  $s_0(1) = z_0(1) = 0$ . Решение будем искать в виде

$$S_0(\xi, S_f) = \delta(S_{0f} - 1) \cdot s(\xi, S_f) + \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \xi S_f, & 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$Z(\xi, S_f) = \delta(S_{0f} - 1) \cdot z(\xi, S_f), \quad G(S_f) = -[1 + \delta g(S_f)]/(S_f - 1),$$

где функции  $s$ ,  $z$ ,  $g$  ограничены. Подставляя (15) в (11), (12) и линеаризуя по  $\delta$ , получим:

при  $\xi \geq 0$

$$(S_f - 1)s_{S_f} - (S_f - 1)\xi s_\xi/S_f - S_f(s + z) - (S_f - 1)\xi g(S_{0f} - 1) = 0,$$

$$(S_f - 1)z_{S_f} - [(S_f - 1)\xi/S_f - 2]z_\xi = 0, \quad s(1, S_f) \equiv z(1, S_f) \equiv 0;$$

при  $\xi < 0$

$$(S_f - 1)s_{S_f} + s_\xi(1 + S_f^2 - S_f)\xi/S_f = 0,$$

$$(S_f - 1)z_{S_f} + [(1 + S_f^2 - S_f)\xi/S_f + 2]z_\xi = 0.$$

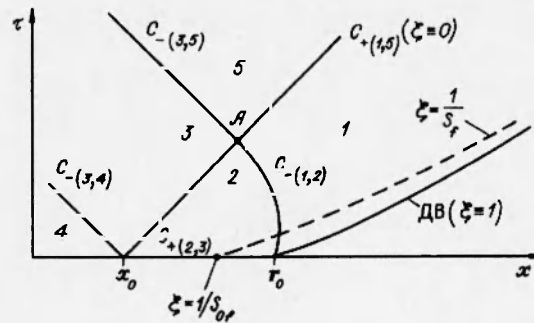


Рис. 4.

По виду решения плоскость  $x, \tau$  разбивается на ряд областей (рис. 4) характеристиками

$$\begin{aligned}
 C_{-(1,2)}: \quad \xi &= \frac{S_{0f}}{S_f} \left[ 1 + 2 \left( S_f - S_{0f} + \ln \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \right) / S_{0f} \right], \\
 C_{+(2,3)}, C_{+(1,5)}: \quad \xi &= 0, \\
 C_{-(3,5)}: \quad \xi &= \frac{2}{S_f} \left( \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \exp(S_f - S_{0f}/2) - 1 \right), \\
 C_{-(3,4)}: \quad \xi &= \frac{2}{S_f} \left( \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \exp(S_f - S_{0f}) - 1 \right).
 \end{aligned} \tag{16}$$

При этом координата  $S_f$  точки  $A$  находится из уравнения

$$(S_{fA} - 1) \exp(S_{fA}) = (S_{0f} - 1) \exp(S_{0f}/2),$$

а  $\xi_A = 0$ . Приблизленно координата  $S_{fA}$  равна  $1 + (S_{0f} - 1)/\sqrt{e}$ .

При  $\xi < 0$  ( $i = 3, 4, 5$ )  $z$  и  $s$  являются инвариантами и переносятся по характеристикам

$$z = \varphi_i \left( \frac{\xi S_f + 2}{S_f - 1} \exp(-S_f) \right), \quad s = \psi_i \left( \frac{\xi S_f}{S_f - 1} \exp(-S_f) \right).$$

При  $\xi > 0$  ( $i = 1, 2$ ) инвариантом является лишь  $z$ , переносимый по характеристикам  $C_-$ :

$$\begin{aligned}
 z &= \varphi_i(\xi S_f - 2S_f - 2 \ln(S_f - 1)), \\
 s &= \exp(S_f)(S_f - 1) \left\{ - \int_{S_f}^{S_{0f}} \frac{\varkappa \exp(-\varkappa)}{(\varkappa - 1)^2} \varphi_i[\xi S_f - 2\varkappa - 2 \ln(\varkappa - 1)] d\varkappa - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi S_f}{S_{0f} - 1} \int_{S_f}^{S_{0f}} \frac{\exp(-\varkappa)}{(\varkappa - 1)\varkappa} g(\varkappa) d\varkappa + \psi_i(\xi S_f) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  — произвольные, определенные в области  $i$ , функции одного аргумента. Из начальных и граничных условий легко найти

$$\begin{aligned}
 z_1 &\equiv z_5 \equiv \varphi_1 \equiv \varphi_5 \equiv 0, \\
 z_4 &= z_0 \left\{ \left[ \frac{(\xi S_f + 2)(S_{0f} - 1)}{S_f - 1} \exp(S_{0f} - S_f) - 2 \right] / S_{0f} \right\},
 \end{aligned}$$

$$s_{3,4,5} = s_0 \left[ \xi \frac{S_f(S_{0f} - 1)}{S_{0f}(S_f - 1)} \exp(S_{0f} - S_f) \right],$$

$$\varphi_2(\alpha) = z_0 \left\{ \frac{\alpha + 2[S_{0f} + \ln(S_{0f} - 1)]}{S_{0f}} \right\},$$

$$z_2 = z_0 \left[ \xi \frac{S_f}{S_{0f}} - \frac{2}{S_{0f}} \left( S_f - S_{0f} + \ln \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \right) \right].$$

$$\psi_2(\alpha) \equiv \frac{\exp(-S_{0f})}{S_{0f} - 1} s_0(\alpha/S_{0f}), \quad \psi_1(\omega) \equiv \frac{\omega}{S_{0f} - 1} \int_{\omega}^{S_{0f}} \frac{\exp(-\alpha)}{(\alpha - 1)\alpha} g(\alpha) d\alpha.$$

«Сшивая»  $z$  на характеристике  $C_{+(2,3)}$ , получим

$$z_3 = z_0 \left\{ \frac{2}{S_{0f}} \ln \left[ \left( 1 + \frac{\xi S_f}{2} \right) \frac{S_{0f} - 1}{S_f - 1} \exp(S_{0f} - S_f) \right] \right\}.$$

«Сшивая»  $s$  на характеристике  $C_{-(1,2)}$ , получим уравнение для  $g$

$$\begin{aligned} S_f \int_{S_f}^{S_{0f}} \frac{\exp(-\alpha)}{(\alpha - 1)\alpha} g(\alpha) d\alpha = \\ = \exp(-S_{0f}) \left\{ \frac{S_{0f} \exp(-S_f/2)}{2} \int_1^{S_f/S_{0f}} \exp(S_{0f}\alpha/2) z_0(\alpha) d\alpha + s_0(S_f/S_{0f}) \right\}, \end{aligned}$$

решаемое простым дифференцированием по  $S_f$ .

После преобразований получим

$$\begin{aligned} g = -(S_f - 1) \exp(S_f - S_{0f}) \left[ - \frac{(2 + S_f) S_{0f} \exp(-S_f/2)}{4 S_f} \times \right. \\ \times \int_1^{S_f/S_{0f}} \exp(S_{0f}\alpha/2) z_0(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} z_0(S_f/S_{0f}) - \\ \left. - \frac{1}{S_f} s_0(S_f/S_{0f}) + \frac{1}{S_{0f}} s_{0\xi}(S_f/S_{0f}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \exp(S_f - S_{0f}) \left\{ \frac{S_{0f}}{2} \left[ \exp(-\xi S_f/2) \int_1^{\xi S_f/S_{0f}} \exp(S_{0f}\alpha/2) z_0(\alpha) d\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi \exp(-S_f/2) \int_1^{S_f/S_{0f}} \exp(S_{0f}\alpha/2) z_0(\alpha) d\alpha \right] + s_0 \left( \xi \frac{S_f}{S_{0f}} \right) - \xi s_0 \left( \frac{S_f}{S_{0f}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \exp(S_f - S_{0f}) \frac{S_{0f}}{2} \exp(-\xi S_f/2) \int_{\alpha_1}^1 \exp(S_{0f}\alpha/2) z_0(\alpha) d\alpha,$$

где

$$\alpha_1 = \xi \frac{S_f}{S_{0f}} + 2 \frac{S_{0f} - S_f + \ln[(S_{0f} - 1)/(S_f - 1)]}{S_{0f}}.$$

Поскольку на движение фронта влияет лишь функция  $g$ , то из последней формулы непосредственно видно, что область влияния начальных данных на фронт ограничена координатами  $(1/S_{0f}) < \xi \leq 1$  (см. рис. 4).

Координаты фронта в параметрическом виде легко определить, интегрируя уравнения (13), (14):

$$\tau = (r_0 - x_0) \int_{S_f}^{S_{0f}} \frac{1 + \delta g(\eta)}{\eta - 1} \exp \left\{ \int_{\eta}^{S_{0f}} \frac{1 - \varkappa + \varkappa^2}{\varkappa(\varkappa - 1)} [1 + \delta g(\varkappa)] d\varkappa \right\} d\eta,$$

$$r = r_0 + (r_0 - x_0) \int_{S_f}^{S_{0f}} \frac{(1 + \eta^2)[1 + \delta g(\eta)]}{\eta(\eta - 1)} \exp \left\{ \int_{\eta}^{S_{0f}} \frac{1 - \varkappa + \varkappa^2}{\varkappa(\varkappa - 1)} [1 + \delta g(\varkappa)] d\varkappa \right\} d\eta.$$

Таким образом, мы получили детальное описание движения газа за пересжатой волной при малых отклонениях начальных данных от треугольного профиля.

При малых пересжатиях эти формулы сильно упрощаются:

$$\begin{aligned} C_{-(1,2)}: \quad \xi &= 1 - 2 \ln[(S_{0f} - 1)/(S_f - 1)], \\ C_{-(3,5)}: \quad \xi &= -2[1 - \sqrt{e}(S_f - 1)/(S_{0f} - 1)], \\ C_{-(3,4)}: \quad \xi &= -2[1 - (S_f - 1)/(S_{0f} - 1)], \\ z_2 &= z_0 \left[ \xi - 2 \ln[(S_{0f} - 1)/(S_f - 1)] \right], \\ z_3 &= z_0 \{ 2 \ln[(1 + \xi/2)(S_{0f} - 1)/(S_f - 1)] \}, \\ z_4 &= z_0 [(\xi + 2)(S_{0f} - 1)/(S_f - 1) - 2], \\ s_{3,4,5} &= s_0 [\xi(S_{0f} - 1)/(S_f - 1)], \end{aligned} \tag{17}$$

$$s_1 = \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \left[ \frac{1}{2} \int_1^{\xi} \exp((\varkappa - \xi)/2) z_0(\varkappa) d\varkappa + s_0(\xi) \right],$$

$$s_2 = \frac{S_f - 1}{S_{0f} - 1} \left[ \frac{1}{2} \int_{\xi + 2 \ln \frac{S_{0f} - 1}{S_f - 1}}^{\xi} \exp((\varkappa - \xi)/2) z_0(\varkappa) d\varkappa + s_0(\xi) \right],$$

$$g = -(S_f - 1) \left[ \frac{1}{2} z_0(S_f/S_{0f}) + s_0 \xi(S_f/S_{0f}) \right];$$

$$r = r_0 + (r_0 - x_0) \frac{S_{0f} + 1}{S_{0f}} \left\{ \frac{(S_f - 1)(S_{0f} - 1)}{(S_{0f} + 1)(S_f - 1)} \exp(S_{0f} - S_f) - 1 + \delta W \right\}; \tag{18}$$

$$\tau = (r_0 - x_0) \frac{1}{S_{0f}} \left[ \frac{S_{0f} - 1}{S_f - 1} \exp(S_{0f} - S_f) - 1 + \delta W \right];$$

$$x = r - (1 - \xi)(r_0 - x_0) \left[ \frac{(S_{0f} - 1)S_f}{(S_f - 1)S_{0f}} \exp(S_{0f} - S_f) + \delta W \right],$$

где

$$W = \frac{S_{0f} - 1}{S_f - 1} \left[ \frac{1}{2} \int_1^{S_f/S_{0f}} z_0(\alpha) d\alpha + s_0 \left( \frac{S_f}{S_{0f}} \right) \right];$$

$$\alpha = \frac{1 + S_f^2}{2S_f} \quad \text{или} \quad S_f = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Из структуры решения видно, что, поскольку  $z$  всюду является инвариантом, переносимым вдоль характеристик  $C_-$ , то  $z_0(\xi)$  может быть и разрывной величиной. Легко показать также, что распространяющиеся влево слабые ударные волны и волны разрежения в псевдоизотермическом газе не изменяют величину  $z$ . В движение фронта  $z_0$  входит лишь под интегралом. Поэтому распад разрыва на фронте детонации, возникающий из-за возможной несогласованности  $u_0$  и  $\rho_0$ , не влияет на решение. Следовательно, начальные условия можно задавать как непосредственно перед распадом разрыва (что удобнее), так и после него. По сути, величина  $Z_0(1)$  может быть вообще не определена.

Из ограниченности  $g$  следует условие  $(S_f - 1) |s_0 \xi (S_f/S_{0f})| \ll 1/\delta$ , или иначе  $1/S_{0f} < \xi \leq 1$ ,  $(\xi - 1/S_{0f}) |s_0 \xi| \ll 1/\delta$ . При  $\xi < 1/S_{0f}$  каких-либо ограничений на  $s_0 \xi$  нет.

В заключении этого пункта отметим, что рассмотрение параметра  $\delta$  необходимо только при анализе бесконечно малых величин. При использовании конечных формул результат не зависит от выбора величины  $\delta$ , поэтому для упрощения можно полагать  $\delta = 1$ . Тогда начальные условия для возмущенной задачи примут вид

$$s_0(\xi) = \frac{\{M_0[r_0 - (1 - \xi)(r_0 - x_0)] + q_0[r_0 - (1 - \xi)(r_0 - x_0)]\}/2 - S_{0f}\xi}{S_{0f} - 1},$$

$$z_0(\xi) = \frac{M_0[r_0 - (1 - \xi)(r_0 - x_0)] - q_0[r_0 - (1 - \xi)(r_0 - x_0)]}{2(S_{0f} - 1)}, \quad (19)$$

$$S_{0f} = [M_0(r_0) + q_0(r_0)]/2,$$

а выбор  $x_0$  произвольный.

### Аппроксимация возмущенного движения «треугольной» волной

Если начальные условия таковы, что движение не является «простой» волной, то представляется интересным подобрать такие начальные условия, чтобы соответствующее решение типа «простой» волны некоторым оптимальным способом приближенно описывало интенсивность и темп затухания пересжатых детонационных волн.

Далее нас будет интересовать лишь движение фронта пересжатой волны, на которое  $s_0$  и  $z_0$  влияют лишь на участке  $1/S_{0f} < \xi \leq 1$ . Как видно из (19), подгонкой  $x_0$ , характеризующего треугольную волну, на которой осуществляется линеаризация задачи, можно добиться, чтобы  $s_0(1/S_{0f}) = 0$ .

Без ограничения общности в дальнейшем считаем это условие выполненным. Пройденный волной путь  $l = r - r_0$ , заданный формулой (18), можно рассматривать как функцию четырех формальных переменных:

$$l = l(L_0, S_{0f}, S_f, \delta),$$

где  $L_0 = (r_0 - x_0)(S_{0f} + 1)/S_{0f}$  — характерный пространственный масштаб движения. Найдем такое (оптимальное) движение типа «треугольной» волны, характеризующееся параметрами  $L_0^*$  и  $S_{0f}^*$ , которое лучшим

образом аппроксимирует движение фронта волны в возмущенной задаче с параметрами  $L_0$  и  $S_{0f}$ . За меру ошибки аппроксимации примем относительное среднеквадратичное отклонение пройденных путей. Таким образом, следует найти параметры  $L_0^*$  и  $S_{0f}^*$ , минимизирующие функционал

$$\sigma(S_{0f}^*, L_0^*) = \sqrt{\frac{1}{S_{0f} - 1} \int_1^{S_{0f}} \Delta^2 dS_f},$$

где

$$\Delta = \frac{l(L_0, S_{0f}, S_f, \delta) - l(L^*, S_{0f}^*, S_f, 0)}{l(L_0, S_{0f}, S_f, 0) + L_0} \approx \frac{\delta l_\delta - (L^* - L_0)l_{L_0} - (S_{0f}^* - S_{0f})l_{S_{0f}}}{l + L_0}.$$

Здесь  $l$  и частные производные  $l_{L_0}$ ,  $l_{S_{0f}}$  и  $l_\delta$  взяты в точке  $(L_0, S_{0f}, S_f, 0)$ . Приравняв нулю частные производные  $\sigma$  по  $S_{0f}^*$  и  $L_0^*$  и учитывая, что

$$l_{L_0} = \frac{l}{L_0}, \quad \frac{l_{S_{0f}}}{l + L_0} = \frac{S_{0f}^2 + 1}{S_{0f}^2 - 1},$$

$$\frac{l + L_0}{L_0} = \frac{(S_f + 1)(S_{0f} - 1)}{(S_f - 1)(S_{0f} + 1)} \exp(S_{0f} - S_f),$$

легко получить систему линейных нормальных уравнений

$$\int_1^{S_{0f}} \Delta dS_f = 0, \quad \int_1^{S_{0f}} \frac{S_f - 1}{S_f + 1} \exp(S_f) \Delta dS_f = 0.$$

Решая эту систему, пренебрегая в решении для  $L_0$  членами порядка  $\delta(S_{0f} - 1)s_0$  и  $\delta(S_{0f} - 1)^2 z_0$ , а для  $S_{0f}^*$  — членами порядка  $\delta(S_{0f} - 1)^2 S_0$  и  $\delta(S_{0f} - 1)^3 z_0$  и учитывая, что

$$l_\delta / (l + L_0) \approx \frac{1}{2} \int_1^{S_f/S_{0f}} z_0 d\xi + s_0(S_f/S_{0f}),$$

получим

$$\frac{L_0^* - L_0}{L_0} = \frac{6\delta}{1 - 1/S_{0f}} \int_{1/S_{0f}}^1 \left[ \left(1 - 2 \frac{\xi - 1/S_{0f}}{1 - 1/S_{0f}}\right) s_0(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{S_{0f}}\right) \left(1 - \frac{\xi - 1/S_{0f}}{1 - 1/S_{0f}}\right) z_0(\xi) \right] d\xi,$$

$$S_{0f}^* - S_{0f} = -2\delta \int_{1/S_{0f}}^1 \left[ \left(1 - \xi \frac{\xi - 1/S_{0f}}{1 - 1/S_{0f}}\right) s_0(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{S_{0f}}\right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\xi - 1/S_{0f}}{1 - 1/S_{0f}}\right) z_0(\xi) \right] d\xi.$$

Обозначим

$$\lambda = (S_f - 1)/(S_{0f} - 1) \quad (0 < \lambda \leq 1),$$

$$T(\lambda) = s_0 \left[ \frac{1}{S_{0f}} + \lambda \left( 1 - \frac{1}{S_{0f}} \right) \right] - \frac{1}{2} \int_{a1}^1 z_0(\xi) d\xi,$$

где

$$a1 = \frac{1}{S_{0f}} + \lambda \left( 1 - \frac{1}{S_{0f}} \right).$$

При оптимальных  $L_0^*$  и  $S_{0f}^*$  легко найти  $\Delta$  и  $\sigma$ :

$$\Delta = \sigma \left[ -3(1 - 2\lambda) \int_0^1 (1 - 2x)T(x) dx + T(\lambda) - \int_0^1 T(x) dx \right], \quad (20)$$

$$\sigma = \delta \left\{ \int_0^1 T^2(\lambda) d\lambda - \left[ \int_0^1 T(\lambda) d\lambda \right]^2 - 3 \left[ \int_0^1 (1 - 2\lambda)T(\lambda) d\lambda \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Погрешность этих оценок равна  $O\{\delta(S_{0f} - 1)[s_0 + (S_{0f} - 1)z_0]\}$ .

Таким образом, мы нашли  $L_0^*$  и  $S_{0f}^*$  такие, что зависимость  $l(L_0^*, S_{0f}^*, S_f, 0)$  лучшим образом и с известной ошибкой аппроксимирует движение фронта волны.

Отметим важный в приложениях частный случай:  $s_0 \equiv 0$ ,  $Z_0 \equiv \text{const}$ ,

$$\begin{aligned} G &= \frac{-1}{S_f - 1} \left[ 1 - \frac{S_f - 1}{2(S_{0f} - 1)} Z_0 \right], \quad S_{0f}^* = S_{0f}, \quad L_0^* = L_0(1 - Z_0/2), \\ r &\approx r_0 + (r_0 - x_0) \frac{S_{0f} + 1}{S_{0f}} \left( 1 - \frac{Z_0}{2} \right) \left[ \frac{(S_f + 1)(S_{0f} - 1)}{(S_{0f} + 1)(S_f - 1)} \exp(S_{0f} - S_f) - 1 \right], \\ t &\approx t_0 + 2 \frac{r_0 - x_0}{D_{CJ} S_{0f}} \left( 1 - \frac{Z_0}{2} \right) \left[ \frac{S_{0f} - 1}{S_f - 1} \exp(S_{0f} - S_f) - 1 \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где, по-прежнему,  $S_f = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ . При этом  $\Delta \equiv 0$ ,  $\sigma = 0$ , а с учетом погрешности оценки  $\sigma = O[(S_{0f} - 1)Z_0]$ .

#### Влияние «больших» возмущений $Z_0$ на движение фронта пересжатой волны

Все предыдущие результаты получены в предположении  $(S_{0f} - 1) \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$ . Покажем, что при  $s_0 \equiv 0$ ,  $Z_0 \equiv \text{const}$  движение фронта волны и при  $\delta = 1$  достаточно хорошо описывается формулами (21) ( $Z = (S_{0f} - 1)z_0$ ).

Поскольку на движение фронта влияет только область  $(1/S_f) < \xi \leq 1$  (ограничена штриховой линией на рис. 4), то, переходя к задаче (11)–(14) с переменными  $\tilde{\lambda} = 1 - (S_f - 1)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\xi} = (1 - \xi)/\varepsilon$  ( $0 \leq \tilde{\lambda} < 1$ ,  $0 \leq \tilde{\xi} < 1$ ), где  $\varepsilon = S_{0f} - 1 \ll 1$ , и разыскивая решение в виде

$$s(\tilde{\lambda}, \tilde{\xi}) = [1 + \varepsilon(1 - \tilde{\lambda})](1 - \varepsilon\tilde{\xi}) + \varepsilon^2 z_0 \tilde{s}(\tilde{\lambda}, \tilde{\xi}), \quad z(\tilde{\lambda}, \tilde{\xi}) = \varepsilon z_0 \tilde{z}(\tilde{\lambda}, \tilde{\xi}),$$

$$G(\tilde{\lambda}) = -\frac{1}{\varepsilon(1 - \tilde{\lambda})} \left[ 1 - \varepsilon \frac{z_0(1 - \tilde{\lambda})}{2} \tilde{g}(\tilde{\lambda}) \right],$$

получим

$$\varepsilon(1 - \tilde{\lambda})\tilde{s}_{\tilde{\lambda}} + [1 + \varepsilon(1 - \tilde{\lambda})](\varepsilon\tilde{s} + \tilde{z}) - \varepsilon \left[ \frac{(1 - \tilde{\lambda})(1 - \varepsilon\tilde{\xi})}{1 + \varepsilon(1 - \tilde{\lambda})} + z_0(\varepsilon\tilde{s} + \tilde{z}) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \tilde{g}(1 - \tilde{\lambda})[1 + \varepsilon(1 - \tilde{\lambda})] + \tilde{s}_{\tilde{\xi}} - \varepsilon \frac{z_0}{2}(1 - \tilde{\lambda})\tilde{g}\tilde{s}_{\tilde{\xi}} \right\} = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon(1 - \tilde{\lambda})\tilde{z}_{\tilde{\lambda}} + 2 \left[ 1 - \varepsilon \frac{z_0(1 - \tilde{\lambda})}{2} \tilde{g} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{(1 - \tilde{\lambda})(1 - \varepsilon\tilde{\xi})}{1 + \varepsilon(1 - \tilde{\lambda})} + z_0(\varepsilon\tilde{s} + \tilde{z}) \right] \right\} \tilde{z}_{\tilde{\xi}} = 0, \quad (23)$$

$$\tilde{s}(0, \tilde{\xi}) \equiv \tilde{s}(\tilde{\lambda}, 0) \equiv \tilde{z}(\tilde{\lambda}, 0) \equiv 0, \quad \tilde{z}(0, \tilde{\xi}) \equiv 1.$$

Поскольку в части области 2, влияющей на фронт (см. рис. 4),  $\tilde{\lambda} < \varepsilon$ , то приближенным уравнением соответствующей части характеристики  $C_{-(1,2)}$  является  $\tilde{\lambda} = \varepsilon\tilde{\xi}/2[1 + O(\varepsilon)]$ ,  $0 \leq \tilde{\xi} < 1$ , а решением уравнения (23) —  $\tilde{z}_1 \equiv 0$ ,  $\tilde{z}_2 \equiv 1$ .

При  $g = 1 + O(\varepsilon)$  решения уравнения (22) в областях 1 и 2

$$\tilde{s}_1 = -\frac{\tilde{\xi}(1 - \tilde{\lambda})}{2} [1 + O(\varepsilon)], \quad \tilde{\lambda} \geq \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\xi}, \\ \tilde{s}_2 = -\tilde{\lambda}/\varepsilon [1 + O(\varepsilon)], \quad \tilde{\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\xi} \quad (24)$$

стыкуются на характеристике  $C_{-(1,2)}$  с относительной погрешностью также порядка  $\varepsilon$ .

Функция  $G$  полностью определяет движение фронта, поэтому из  $\tilde{g} \equiv 1$  непосредственно следует применимость (21). Легко проверить, что (24) также соответствует (17).

Непосредственной подстановкой в (11)–(13) и анализом малых величин можно показать, что для применимости формул (15)–(20) для описания всего движения достаточно условий: функция  $Z_0$  должна быть порядка  $\varepsilon$  и не обязательно непрерывна или постоянна; отклонения зависимости  $S_0(x)$  от кусочно-линейной функции типа изображенной на рис. 3 в зоне интенсивного движения — порядка  $\varepsilon^2$ , в зоне покоя ( $\xi \leq \varepsilon$ ) — порядка  $\varepsilon$ , а в области влияния на фронт ( $(1/S_{0f}) < \xi \leq 1$  или, что эквивалентно,  $S_0 > 1$ ) необходимо чтобы  $|(r_0 - x_0)S_{0x}/S_{0f} - 1| \ll 1$ . Для описания движения только в окрестности фронта ( $S > 1$ ) достаточно выполнения всех этих условий на том участке, где  $S_0(x) > 1$ . Анализ этот аналогичен предыдущему и из-за громоздкости опущен.

Отметим, что при  $\delta \ll 1$  единственное ограничение на  $\varepsilon$  — точность выполнения граничных условий, т. е. выполнимость (3), а эта формула дает применимые для оценок результаты вплоть до  $\varepsilon = 3$ .

#### Возбуждение пересжатых детонационных волн с помощью секции повышенного давления

Пусть в полубесконечной трубе с заглушенным левым концом ( $x = 0$ ) и легкой мембраной ( $x = r_0$ ) находится взрывчатый газ с давлением  $p_1$  и плотностью  $\rho_1$  слева от мембраны и  $p_2$ ,  $\rho_2$  — справа от нее, при этом  $p_1 > p_2$ ,  $\rho_1 > \rho_2$ . У торца «слабым» источником инициируют детонацию, которая, распространяясь со скоростью  $D_{CJ}$ , к моменту  $t_0$  дости-

гает мембраны, разрушает ее, возбуждает пересжатую детонацию. В момент  $t_0$  движение псевдоизотермических продуктов детонации автомоделльно и описывается формулами

$$\ln \frac{e\rho_0}{2\rho_1} = M_0 - \frac{2u_0}{D_{CJ}} = \begin{cases} 0, & x \leq r_0/2, \\ \frac{2x}{r_0} - 1, & r_0/2 < x < r_0. \end{cases}$$

Используя это распределение параметров в качестве начального ( $q = \ln(e\rho/2\rho_2)$ ) и выбирая  $x_0 = r_0(1 - \varepsilon)/2$ ,  $\varepsilon = 1/2\ln(\rho_1/\rho_2)$ , получим  $S_{0f} = 1 + \varepsilon$ ,  $Z_0 \equiv -\varepsilon$ ,

$$S_0 = \begin{cases} \varepsilon, & \xi \leq 0, \\ S_{0f}\xi + [\varepsilon - (1 + \varepsilon)\xi], & 0 < \xi < \varepsilon/(1 + \varepsilon), \\ S_{0f}\xi, & \varepsilon/(1 + \varepsilon) \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

При  $\rho_1/\rho_2 < \exp(2) \approx 7,3$ , чему соответствует  $\varepsilon < 1$ , в области влияния на фронт волны ( $\xi > 1/(1 + \varepsilon)$ ) функция  $s_0 \equiv 0$ , следовательно для  $\varepsilon \ll 1$  с относительной ошибкой порядка  $\varepsilon^2$  применимы формулы (21):

$$\frac{r - r_0}{r_0} \approx (1 + \varepsilon)^2 \left[ \frac{(S_f + 1)\varepsilon}{(2 + \varepsilon)(S_f - 1)} \exp(1 + \varepsilon - S_f) - 1 \right].$$

### Галопирующий режим детонации

Галопирующий режим детонации состоит из периодического расслоения ударного фронта и фронта горения, торможения ударной волны, самопроизвольного возбуждения вторичной детонацией в сжатом ударной волной непрореагировавшем газе, возбуждения по достижении вторичной детонацией первичного ударного фронта пересжатой детонационной волны, ее торможения до скорости Чепмена — Жуге, нового расслоения фронтов и т. д. [5].

Изложенный выше метод позволяет описать возбуждение и торможение пересжатой волны. Пусть к моменту возбуждения пересжатой волны скорость ударной волны снизилась до значения  $D_y$ . Полагая свежую смесь политропным газом с плотностью перед фронтом  $\rho_2$ , показателем адиабаты  $\gamma_2$  и скоростью звука  $c_2$ , легко вычислить параметры за ударной волной:

$$u_1 = 2\tilde{D}_y \frac{1 - c_2^2/D_y^2}{\gamma_2 + 1}, \quad \tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1 + 2c_2^2/D_y^2}.$$

Пусть длина всего слоя ударно-сжатого газа, по которому распространялась вторичная детонация, равна  $r_0$ . Сместим начало координат таким образом, чтобы в момент возбуждения пересжатой волны ее координаты составляли  $(r_0, t_0)$ . Учитывая, что скорость детонации Чепмена — Жуге слабо зависит от давления и температуры [4], начальные условия в окрестности фронта волны можно выписать в виде

$$\varepsilon = \frac{u_1}{D_{CJ}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad x_0 = r_0(1 - \varepsilon)/2, \quad S_{0f} = 1 + \varepsilon, \\ S_0 = S_{0f}\xi, \quad s_0 \equiv 0, \quad Z_0 \equiv \frac{u_1}{D_{CJ}} - \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$z_0 \equiv 1, \quad \delta = \left( \frac{u_1}{D_{CJ}} - \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) / \left( \frac{u_1}{D_{CJ}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).$$

Следовательно, движение фронта пересжатой волны будет описываться формулами (21).

Таким образом в работе для приближенных граничных условий на фронте детонационной волны построено точное аналитическое решение типа «простой» волны, характеризующееся «треугольными» профилями скорости и логарифма давления газа. На основе линеаризации построено приближенное аналитическое решение для задач с профилями параметров, близкими к «треугольным», для общего случая начальных условий подобрано решение типа «простой» волны, оптимальным способом аппроксимирующее движение фронта. Оценена ошибка аппроксимации. Показано, что при некоторых условиях эта ошибка невелика даже при значительном отличии решения в целом от «простого» и этим условиям удовлетворяют задачи о возбуждении пересжатых волн с помощью секции повышенного давления и о затухании пересжатых волн при галопирующем режиме детонации, выписаны соответствующие решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А. А. О распространении плоской ударной волны // Прикл. математика и механика. 1944. Т. 8.
2. Черный Г. Г. Асимптотический закон распространения плоской детонационной волны // Докл АН СССР. 1967. Т. 172, № 3. С. 558–560.
3. Николаев Ю. А., Фомин П. А. О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. 1982. Т. 18, № 1. С. 66–72.
4. Николаев Ю. А., Топчий М. Е. Расчет равновесных течений в детонационных волнах в газах // Физика горения и взрыва. 1977. Т. 13, № 1. С. 393–404.
5. Ульяницкий В. Ю. Исследование галопирующего режима газовой детонации // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 1. С. 118–124.

Поступила в редакцию 9/IX 1993 г.,  
в окончательном варианте — 10/III 1995 г.