

УДК 532.528

ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ, РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

М. Билал Ашраф, Т. Хайат^{*,**}, С. А. Шехзад^{***}, Х. Малайка^{**}

Институт информационных технологий COMSATS, 47070 Вах Кант, Пакистан

* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

** Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия

*** Институт информационных технологий COMSATS, Сахивал, Пакистан

E-mails: bilalashraf_qau@yahoo.com, pensy_t@yahoo.com, ali_qau70@yahoo.com, hmalaikah@kau.edu.sa

С использованием материальных уравнений для реологической жидкости второго класса проведен анализ трехмерного течения вязкоупругой жидкости по экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплообмена. С помощью преобразований управляющие уравнения пограничного слоя сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решения которых находятся в виде рядов. Исследована сходимость полученных решений. Проанализировано влияние параметров задачи на процесс теплообмена. Показано, что зависимости, описывающие влияние числа Прандтля, вязкоупругости, отношения скоростей и показателя степени в выражении для температуры на число Нуссельта, качественно подобны.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, экспоненциально растягивающаяся поверхность, теплообмен.

DOI: 10.15372/PMTF20160308

Введение. Интерес к исследованию неньютоновских жидкостей обусловлен тем, что такие жидкости используются во многих технологических процессах (производство продуктов питания и бумаги, бурение нефти, экструзия полимеров, регенерация масел и т. д.). Наличие дополнительных реологических параметров в материальных соотношениях таких жидкостей приводит к увеличению порядка уравнений движения по сравнению с уравнениями Навье — Стокса. В зависимости от вида закона скорости деформации неньютоновские жидкости делятся на три класса. Жидкость второго класса представляет собой жидкость так называемого дифференциального типа. Модель жидкости второго класса описывает влияние нормальных напряжений на процесс теплообмена. Течения таких жидкостей изучались во многих работах (см. работы [1–10] и библиографию к ним).

Течение в пограничном слое жидкости второго класса, вызванное непрерывным движением пластины, встречается при охлаждении металлических пластин, раскатке полимерных пластин, выращивании кристаллов, аэродинамической экструзии пластмассовых

Работа выполнена при финансовой поддержке отдела научных исследований (DSR) Университета короля Абдул-Азиза (Джедда, Саудовская Аравия) (грант № 10-130/1434HiCi) и Комиссии по высшему образованию (Пакистан) (грант № 21-649 SRGP).

© Билал Ашраф М., Хайат Т., Шехзад С. А., Малайка Х., 2016

пластин, в процессе конденсации жидкой пленки и т. д. В работе [11] проведен анализ течения вязкой жидкости по непрерывно движущейся поверхности. В работе [12] получены решения задачи о линейно растягивающейся поверхности в замкнутой форме. Результаты дальнейших исследований этой задачи приведены в [13–18]. Анализ теплообмена в жидкости на линейно растягивающейся поверхности проведен в работах [19–25].

В [26] изучен процесс теплообмена при стационарном течении вязкой жидкости, вызванном экспоненциальным растяжением пористой поверхности. Теплообмен в пограничном слое при течении вязкоупругой жидкости по экспоненциально растягивающейся поверхности численно исследован в работе [27]. В [28] аналитически изучено влияние теплового излучения на течение вязкой жидкости по экспоненциально растягивающейся пластине. Численное решение задачи, рассмотренной в [28], представлено в [29]. В работе [30] проведено исследование влияния частичного скольжения на течение в пограничном слое жидкости третьего класса при наличии теплообмена. Двумерное течение в пограничном слое несжимаемой жидкости второго класса по экспоненциально растягивающейся пористой поверхности при наличии вязкой диссипации численно изучено в [31]. В работе [32] проведено исследование трехмерного течения вязкой жидкости по экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплообмена.

Насколько известно авторам данной работы, анализ трехмерного течения жидкости второго класса по экспоненциально растягивающейся поверхности ранее не проводился. Целью настоящей работы является моделирование трехмерного течения жидкости второго класса, вызванного растяжением пластины по экспоненциальному закону. Для решения задачи используется метод гомотопического анализа (МГА) [33–38].

Основные уравнения. Рассмотрим несжимаемое трехмерное течение в пограничном слое вязкоупругой жидкости по экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплообмена без учета вязкой диссипации. В этом случае управляющие уравнения пограничного слоя имеют вид [16, 20]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0 \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k_0 \left(v \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + w \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right), \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u, v, w — компоненты скорости в направлениях x, y, z соответственно; k_0 — материальный параметр жидкости; T — температура жидкости; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; μ — динамическая вязкость; ρ — плотность жидкости; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; k — теплопроводность жидкости.

Граничные условия для рассматриваемого течения записываются в виде

$$\begin{aligned} z = 0: \quad u &= U_w, \quad v = V_w, \quad w = 0, \quad T = T_w, \\ z \rightarrow \infty: \quad u &\rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где нижний индекс w соответствует параметрам на стенке.

Скорость и температура на стенке определяются по формулам

$$U_w = U_0 e^{(x+y)/L}, \quad V_w = V_0 e^{(x+y)/L}, \quad T_w = T_\infty + T_0 e^{A(x+y)/(2L)}, \quad (4)$$

где U_0, V_0, T_0 — константы; L — характерная длина; T_∞ — температура окружающей среды; A — показатель степени в выражении для температуры.

Выполним следующие преобразования подобия [32]:

$$u = U_0 e^{(x+y)/L} f'(\eta), \quad v = V_0 e^{(x+y)/L} g'(\eta), \quad w = -\left(\frac{\nu U_0}{2L}\right)^{1/2} (f + \eta f' + g + \eta g'),$$

$$T = T_\infty + T_0 e^{A(x+y)/(2L)} \theta(\eta), \quad \eta = \left(\frac{U_0}{2\nu L}\right)^{1/2} e^{(x+y)/(2L)} z. \quad (5)$$

Уравнение (1) удовлетворяется автоматически, а из уравнений (2)–(5) следует

$$f''' + (f + g)f'' - 2(f' + g')f' +$$

$$+ K_1(6f'''f' + (3g'' - 3f'' + \eta g''')f'' + (4g' + 2\eta g'')f''' - (f + g + \eta g')f'''' = 0,$$

$$g''' + (f + g)g'' - 2(f' + g')g' +$$

$$+ K_1(6g'''g' + (3f'' - 3g'' + \eta f''')g'' + (4f' + 2\eta f'')g''' - (f + g + \eta f')g'''' = 0,$$

$$\theta'' + \text{Pr} (f + g)\theta' - \text{Pr} A(f' + g')\theta = 0,$$

$$\eta = 0: \quad f = 0, \quad g = 0, \quad f' = 1, \quad g' = \alpha, \quad \theta = 1,$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 0, \quad g' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0.$$

Здесь $K_1 = k_0 U w / (2\nu L)$ — параметр вязкоупругости; $\alpha = V_0 / U_0$ — отношение скоростей (значение $\alpha = 0$ соответствует двумерному случаю); $\text{Pr} = \mu c_p / k$ — число Прандтля.

Локальное число Нуссельта определяется формулой

$$\text{Nu} = \frac{-k}{k(T_w - T_\infty)/x} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{x}{L} \left(\frac{\text{Re}_x}{2}\right)^{1/2} e^{(x+y)/(2L)} \theta'(0)$$

($\text{Re}_x = U_0 L / \nu$ — локальное число Рейнольдса).

Решения в виде рядов. Начальные приближения и вспомогательные линейные операторы для аналитических решений выбраны следующим образом:

$$f_0(\eta) = (1 - e^{-\eta}), \quad g_0(\eta) = \alpha(1 - e^{-\eta}), \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta},$$

$$L_f = f''' - f', \quad L_g = g''' - g', \quad L_\theta = \theta'' - \theta.$$

Вспомогательные линейные операторы удовлетворяют соотношениям

$$L_f(C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}) = 0, \quad L_g(C_4 + C_5 e^\eta + C_6 e^{-\eta}) = 0, \quad L_\theta(C_7 e^\eta + C_8 e^{-\eta}) = 0,$$

где C_i ($i = 1, \dots, 8$) — произвольные постоянные.

Задачи о деформации нулевого порядка формулируются следующим образом:

$$(1 - p)L_f[\hat{f}(\eta; p) - f_0(\eta)] = ph_f N_f[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)],$$

$$(1 - p)L_g[\hat{g}(\eta; p) - g_0(\eta)] = ph_g N_g[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)],$$

$$(1 - p)L_\theta[\hat{\theta}(\eta; p) - \theta_0(\eta)] = ph_\theta N_\theta[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)],$$

$$\hat{f}(0; p) = 0, \quad \hat{f}'(0; p) = 1, \quad \hat{f}'(\infty; p) = 0, \quad \hat{g}(0; p) = 0,$$

$$\hat{g}'(0; p) = \alpha, \quad \hat{g}'(\infty; p) = 0, \quad \hat{\theta}(0, p) = 1, \quad \hat{\theta}(\infty, p) = 0,$$

$$\begin{aligned}
N_f[\hat{f}(\eta, p), \hat{g}(\eta, p)] &= \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} - 2 \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + \\
&+ (\hat{f}(\eta, p) + \hat{g}(\eta, p)) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + K_1 \left(6 \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} + \right. \\
&+ \left. \left(3 \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial^3 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \right. \\
&+ \left. \left(4 \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} + 2\eta \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} - \left(\hat{f}(\eta, p) + \hat{g}(\eta, p) + \eta \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^4 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^4} \right), \\
N_g[\hat{g}(\eta, p), \hat{f}(\eta, p)] &= \frac{\partial^3 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^3} - 2 \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} + \\
&+ (\hat{f}(\eta, p) + \hat{g}(\eta, p)) \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + K_1 \left(6 \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^3} + \right. \\
&+ \left. \left(3 \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \right. \\
&+ \left. \left(4 \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + 2\eta \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^3} - \left(\hat{f}(\eta, p) + \hat{g}(\eta, p) + \eta \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^4 \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta^4} \right), \\
N_\theta[\hat{\theta}(\eta, p), \hat{f}(\eta, p), \hat{g}(\eta, p)] &= \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} (\hat{f}(\eta, p) + \hat{g}(\eta, p)) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta} - \\
&- \text{Pr} A \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{g}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) \hat{\theta}(\eta, p).
\end{aligned}$$

Здесь p — параметр вложения; h_f, h_g, h_θ — ненулевые вспомогательные параметры; N_f, N_g, N_θ — нелинейные операторы.

При $p = 0$ и $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\eta; 0) &= f_0(\eta), & \hat{g}(\eta; 0) &= g_0(\eta), & \hat{\theta}(\eta, 0) &= \theta_0(\eta), & \hat{f}(\eta; 1) &= f(\eta), \\
\hat{g}(\eta; 1) &= g(\eta), & \hat{\theta}(\eta, 1) &= \theta(\eta).
\end{aligned}$$

При $0 < p < 1$ значения функций $f(\eta, p), g(\eta, p), \theta(\eta, p)$ изменяются от $f_0(\eta), g_0(\eta), \theta_0(\eta)$ до $f(\eta), g(\eta), \theta(\eta)$. Используя разложение Тейлора, получаем решения в виде рядов

$$\begin{aligned}
f(\eta, p) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) p^m, & f_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m f(\eta; p)}{\partial \eta^m} \right|_{p=0}, \\
g(\eta, p) &= g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta) p^m, & g_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m g(\eta; p)}{\partial \eta^m} \right|_{p=0}, \\
\theta(\eta, p) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta) p^m, & \theta_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \theta(\eta; p)}{\partial \eta^m} \right|_{p=0},
\end{aligned} \tag{6}$$

сходимость которых существенно зависит от h_f, h_g и h_θ . Вспомогательные параметры h_f, h_g и h_θ выбраны таким образом, что при $p = 1$ ряды (6) сходятся. Следовательно,

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad g(\eta) = g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta). \tag{7}$$

Задачи о деформации m -го порядка записываются в виде

$$\begin{aligned}
 L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] &= h_f R_f^m(\eta), & L_g[g_m(\eta) - \chi_m g_{m-1}(\eta)] &= h_g R_g^m(\eta), \\
 L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] &= h_\theta R_\theta^m(\eta), \\
 f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) &= 0, & g_m(0) = g'_m(0) = g'_m(\infty) &= 0, & \theta_m(0) = \theta_m(\infty) &= 0, \\
 R_f^m(\eta) &= f_{m-1}'''(\eta) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k} f'_k - 2 \sum_{k=0}^{m-1} g'_{m-1-k} f'_k + \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k} f''_k + g_{m-1-k} f''_k) + \\
 &+ K_1 \left(6 \sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k} f_k''' + 3 \sum_{k=0}^{m-1} g''_{m-1-k} f_k'' - 3 \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k} f_k'' + \sum_{k=0}^{m-1} \eta g_{m-1-k}''' f_k'' + \right. \\
 &+ 4 \sum_{k=0}^{m-1} g'_{m-1-k} f_k''' + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \eta g''_{m-1-k} f_k''' - \sum_{k=0}^{m-1} f_{m-1-k} f_k'''' - \\
 &\left. - \sum_{k=0}^{m-1} g_{m-1-k} f_k'''' - \sum_{k=0}^{m-1} \eta g'_{m-1-k} f_k'''' \right), \\
 R_g^m(\eta) &= g_{m-1}'''(\eta) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} g'_{m-1-k} g'_k - 2 \sum_{k=0}^{m-1} g'_{m-1-k} f'_k + \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k} g''_k + g_{m-1-k} g''_k) + \\
 &+ K_1 \left(6 \sum_{k=0}^{m-1} g'_{m-1-k} g_k''' + 3 \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k} g_k'' - 3 \sum_{k=0}^{m-1} g''_{m-1-k} g_k'' + \sum_{k=0}^{m-1} \eta f_{m-1-k}''' g_k'' + \right. \\
 &+ 4 \sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k} g_k''' + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \eta f''_{m-1-k} g_k''' - \sum_{k=0}^{m-1} g_{m-1-k} g_k'''' - \\
 &\left. - \sum_{k=0}^{m-1} f_{m-1-k} g_k'''' - \sum_{k=0}^{m-1} \eta f'_{m-1-k} g_k'''' \right), \\
 R_\theta^m(\eta) &= \theta_{m-1}'' + \text{Pr} \sum_{k=0}^{m-1} (\theta'_{m-1-k} f_k + \theta'_{m-1-k} g_k) - \text{Pr} A \sum_{k=0}^{m-1} (f'_{m-1-k} \theta_k + g'_{m-1-k} \theta_k).
 \end{aligned}$$

Решая эти задачи, получаем

$$\begin{aligned}
 f_m(\eta) &= f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}, & g_m(\eta) &= g_m^*(\eta) + C_4 + C_5 e^\eta + C_6 e^{-\eta}, \\
 \theta_m(\eta) &= \theta_m^*(\eta) + C_7 e^\eta + C_8 e^{-\eta},
 \end{aligned}$$

где f_m^* , g_m^* , θ_m^* — частные решения.

Анализ сходимости рядов решений. Ряды (7) содержат вспомогательные параметры h_f , h_g , h_θ , от которых зависит сходимость решений, полученных с использованием МГА. Чтобы определить допустимые диапазоны значений h_f , h_g и h_θ , построены h -кривые 10-го порядка аппроксимации (рис. 1). Видно, что допустимые значения h_f , h_g и h_θ находятся в диапазонах $-0,75 \leq h_f \leq -0,30$, $-0,75 \leq h_g \leq -0,30$ и $-0,8 \leq h_\theta \leq -0,4$. Заметим, что решения, представленные в виде рядов, сходятся в области η при $h_f = h_g = h_\theta = -0,5$ (табл. 1).

Обсуждение результатов. На рис. 2–5 показано влияние отношения скоростей α и параметра вязкоупругости K_1 на компоненты скорости $f'(\eta)$ и $g'(\eta)$. На рис. 2, 3 видно, что

Таблица 1

Сходимость рядов решений для приближений различного порядка при $K_1 = 0,1$, $A = 0,2$, $Pr = 1,2$, $\alpha = 0,2$, $h_f = -0,5$, $h_g = -0,6$, $h_\theta = -0,7$

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-g''(0)$	$-\theta'(0)$
1	1,168 89	0,229 867	0,885 200
5	1,210 57	0,228 658	0,820 787
10	1,210 49	0,228 600	0,822 115
15	1,210 45	0,228 600	0,822 280
20	1,210 45	0,228 601	0,822 282
25	1,210 45	0,228 601	0,822 282
30	1,210 45	0,228 601	0,822 282

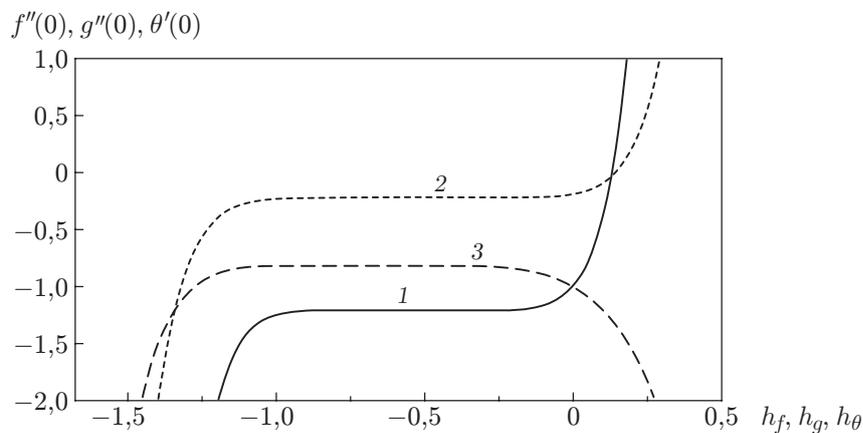


Рис. 1. h -кривые для функций $f''(0)$ (1), $g''(0)$ (2), $\theta'(0)$ (3) при $K_1 = 0,3$, $\beta_1 = 0,2$, $A = 0,2$, $Pr = 1,0$, $\alpha = 0,3$

с увеличением отношения α компонента $f'(\eta)$ уменьшается, в то время как $g'(\eta)$ увеличивается. При увеличении α боковая поверхность начинает перемещаться в направлении y , при этом компонента скорости $g'(\eta)$ увеличивается, а компонента скорости в исходном направлении растяжения $f'(\eta)$ уменьшается. На рис. 4, 5 показано влияние параметра вязкоупругости K_1 на скорости $f'(\eta)$ и $g'(\eta)$ соответственно. Видно, что скорость жидкости является возрастающей функцией K_1 .

На рис. 6–9 показано влияние отношения скоростей α , параметра вязкоупругости K_1 , показателя степени A в выражении для температуры и числа Прандтля Pr на температуру $\theta(\eta)$. На рис. 6 показано влияние параметра α на температуру $\theta(\eta)$. Установлено, что при увеличении безразмерного расстояния η от нуля до бесконечности температура $\theta(\eta)$ уменьшается от единицы до нуля. На рис. 7 показано влияние параметра K_1 на температуру $\theta(\eta)$. Видно, что температура жидкости является убывающей функцией K_1 . Влияние показателя степени A на температуру $\theta(\eta)$ показано на рис. 8. Видно, что с увеличением A значение $\theta(\eta)$ уменьшается от единицы до нуля. На рис. 9 показано влияние числа Прандтля Pr на температуру $\theta(\eta)$. Замечено, что температура жидкости уменьшается с увеличением Pr . Таким образом, если Pr увеличивается, то температуропроводность уменьшается. Это приводит к уменьшению количества передаваемой энергии и толщины теплового пограничного слоя.

На рис. 10–12 показано влияние отношения скоростей α , показателя степени A в выражении для температуры, параметра вязкоупругости K_1 и числа Прандтля Pr на локальное

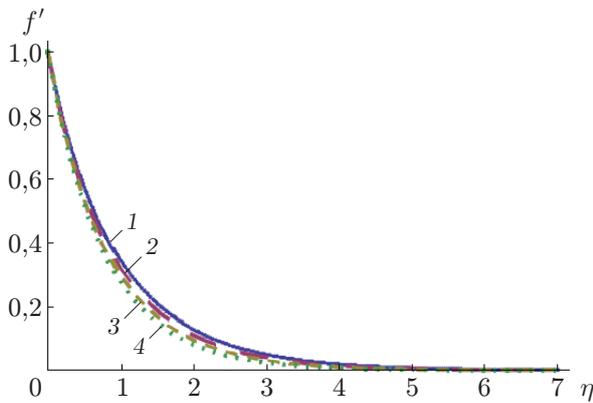


Рис. 2

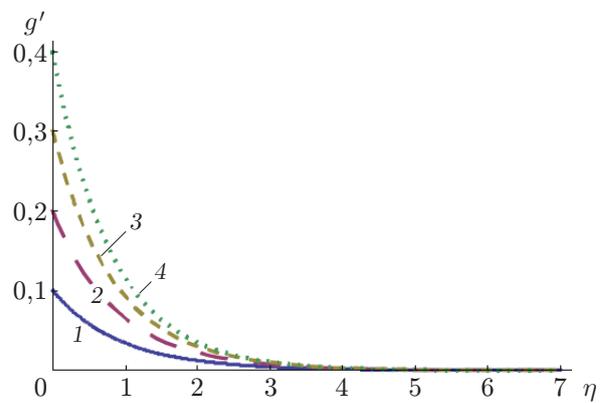


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость скорости f' от параметра η при $K_1 = 0,1$ и различных значениях отношения скоростей α :

1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 0,2$, 3 — $\alpha = 0,4$, 4 — $\alpha = 0,6$

Рис. 3. Зависимость скорости g' от параметра η при $K_1 = 0,1$ и различных значениях отношения скоростей α :

1 — $\alpha = 0,1$, 2 — $\alpha = 0,2$, 3 — $\alpha = 0,3$, 4 — $\alpha = 0,4$

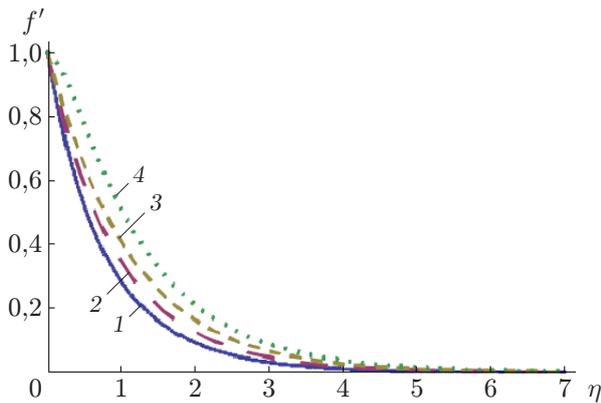


Рис. 4

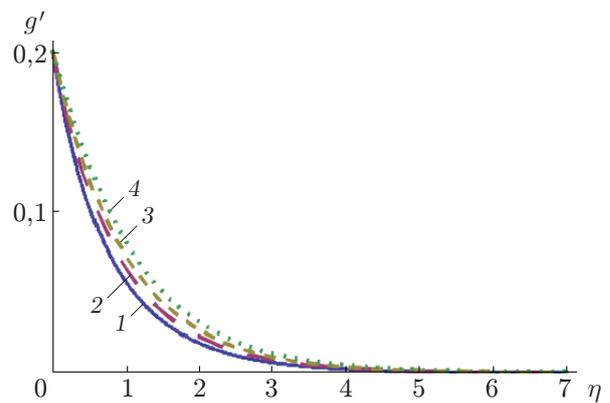


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость скорости f' от параметра η при $\alpha = 0,1$ и различных значениях параметра вязкоупругости K_1 :

1 — $K_1 = 0$, 2 — $K_1 = 0,2$, 3 — $K_1 = 0,4$, 4 — $K_1 = 0,6$

Рис. 5. Зависимость скорости g' от параметра η при $\alpha = 0,1$ и различных значениях параметра вязкоупругости K_1 :

1 — $K_1 = 0$, 2 — $K_1 = 0,1$, 3 — $K_1 = 0,2$, 4 — $K_1 = 0,3$

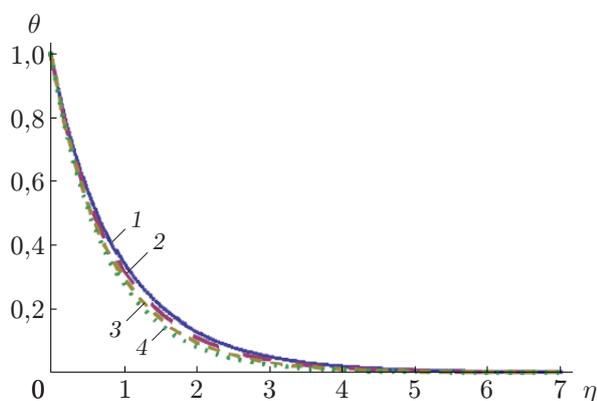


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость температуры θ от параметра η при $K_1 = 0,1$, $A = 0,2$, $Pr = 1,2$ и различных значениях отношения скоростей α :

1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 0,2$, 3 — $\alpha = 0,4$, 4 — $\alpha = 0,6$

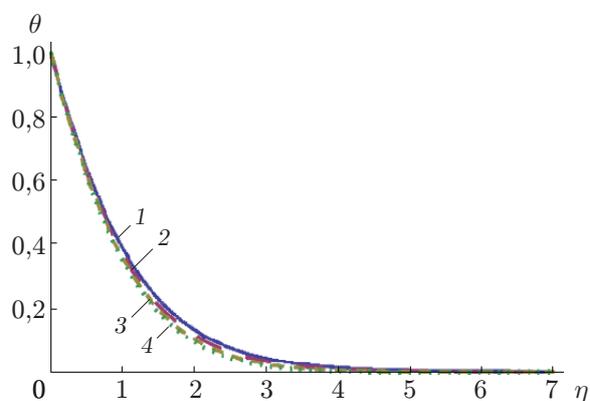


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость температуры θ от параметра η при $A = 0,2$, $\alpha = 0,2$, $Pr = 1,2$ и различных значениях параметра вязкоупругости K_1 :

1 — $K_1 = 0$, 2 — $K_1 = 0,2$, 3 — $K_1 = 0,4$, 4 — $K_1 = 0,6$

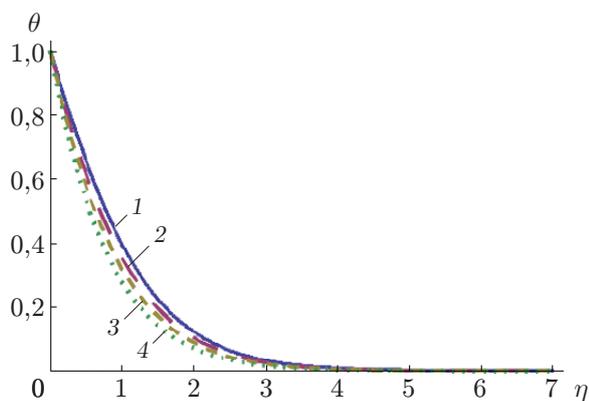


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость температуры θ от параметра η при $K_1 = 0,2$, $\alpha = 0,2$, $Pr = 1,2$ и различных значениях показателя степени A в выражении для температуры:

1 — $A = 0$, 2 — $A = 0,3$, 3 — $A = 0,6$, 4 — $A = 1,0$

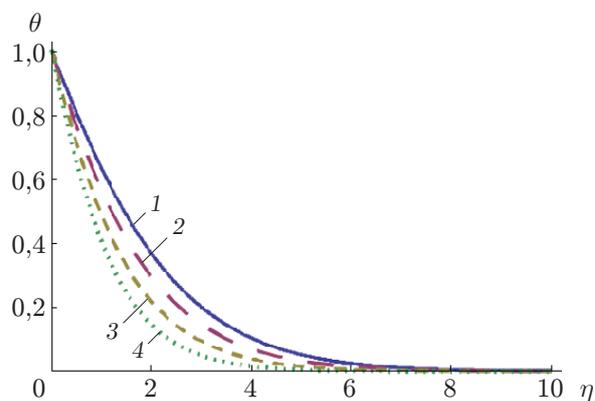


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость температуры θ от параметра η при $K_1 = 0,2$, $\alpha = 0,2$, $A = 0,2$ и различных значениях числа Прандтля Pr :

1 — $Pr = 0,1$, 2 — $Pr = 0,3$, 3 — $Pr = 0,6$, 4 — $Pr = 1,0$

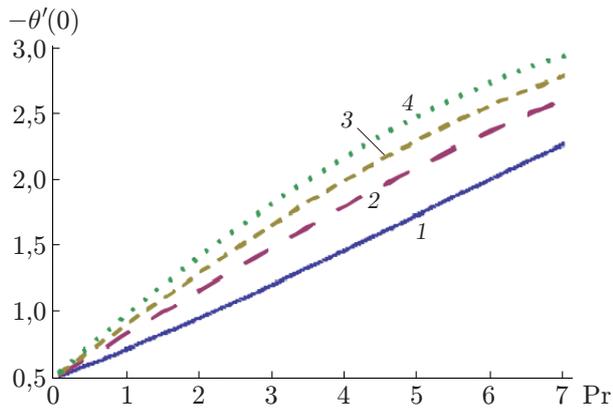


Рис. 10

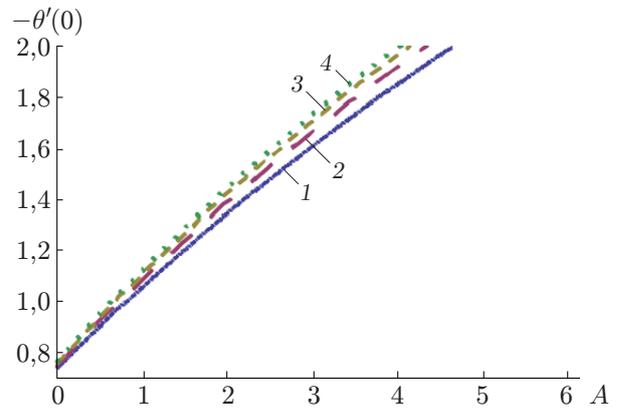


Рис. 11

Рис. 10. Зависимость температуры $-\theta'(0)$ от числа Прандтля Pr при $K_1 = 0,2$, $\alpha = 0,2$ и различных значениях показателя степени A в выражении для температуры:

1 — $A = 0$, 2 — $A = 0,3$, 3 — $A = 0,5$, 4 — $A = 0,7$

Рис. 11. Зависимость температуры $-\theta'(0)$ от показателя степени A в выражении для температуры при $Pr = 1,2$, $\alpha = 0,2$ и различных значениях параметра вязкоупругости K_1 :

1 — $K_1 = 0$, 2 — $K_1 = 0,3$, 3 — $K_1 = 0,6$, 4 — $K_1 = 1,0$

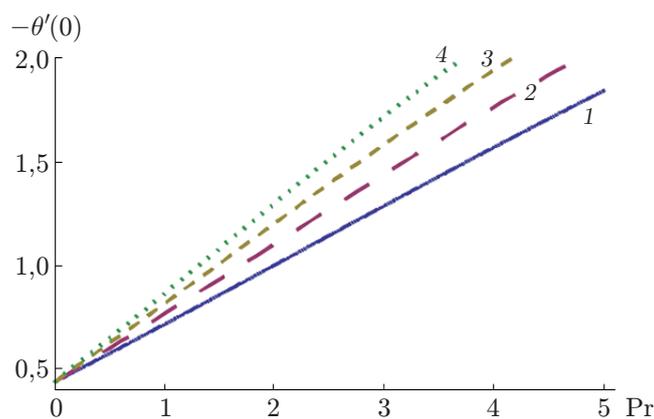


Рис. 12. Зависимость температуры $-\theta'(0)$ от числа Прандтля Pr при $K_1 = 0,2$, $A = 0,2$ и различных значениях отношения скоростей α :

1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 0,2$, 3 — $\alpha = 0,4$, 4 — $\alpha = 0,6$

Таблица 2

Значения $-f''(0)$, $-g''(0)$ и $f(\infty) + g(\infty)$ при $K_1 = 0$ и различных значениях α

α	Данные [32]			Данные настоящей работы		
	$-f''(0)$	$-g''(0)$	$f(\infty) + g(\infty)$	$-f''(0)$	$-g''(0)$	$f(\infty) + g(\infty)$
0	1,281 808 56	0	0,905 643 83	1,281 80	0	0,905 64
0,5	1,569 888 46	0,784 944 23	1,109 182 63	1,569 88	0,784 94	1,109 18
1,0	1,812 751 05	1,812 751 05	1,280 773 78	1,812 75	1,812 75	1,280 77

число Нуссельта $-\theta'(0)$. Из рис. 10–12 следует, что с увеличением α , Pr , A , K_1 локальное число Нуссельта увеличивается.

В табл. 2 приведены значения $-f''(0)$, $-g''(0)$ и $-\theta'(0)$ при $h_f = h_g = -0,6$, $h_\theta = -0,7$. Следует отметить, что значения $-f''(0)$, $-g''(0)$ сходятся при 10-м порядке приближения, а значения $-\theta'(0)$ — при 20-м порядке. В табл. 2 приведены также значения $-f''(0)$, $-g''(0)$, $-\theta'(0)$, полученные в работе [32]. Решения, полученные в данной работе, хорошо согласуются с решениями [32].

Выводы. В работе проведен анализ трехмерного течения вязкоупругой жидкости при наличии теплообмена. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы. С увеличением параметра вязкоупругости K_1 скорость увеличивается, а температура уменьшается. С увеличением числа Прандтля температура и толщина пограничного слоя уменьшаются. С увеличением отношения α скорость $f'(\eta)$ уменьшается, а $g'(\eta)$ увеличивается. С увеличением показателя степени в выражении для температуры A температура и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. С увеличением числа Прандтля Pr и отношения скоростей α локальное число Нуссельта увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rashidi M. M., Chamkha A. J., Keimanesh M.** Application of multi-step differential transform method on flow of a second-grade fluid over a stretching or shrinking sheet // Amer. J. Comput. Math. 2011. V. 6. P. 119–128.
2. **Ahmad A., Asghar S.** Flow of a second grade fluid over a sheet stretching with arbitrary velocities subject to a transverse magnetic field // Appl. Math. Lett. 2011. V. 24. P. 1905–1909.
3. **Mustafa N., Asghar S., Hossain M. A.** Natural convection flow of second-grade fluid along a vertical heated surface with variable heat flux // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 5856–5862.
4. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Flow of a second grade fluid with convective boundary conditions // Thermal Sci. 2011. V. 15. P. S253–S261.
5. **Jamil M., Rauf A., Fetecau C., Khan N. A.** Helical flows of second grade fluid due to constantly accelerated shear stresses // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1959–1969.
6. **Nazar M., Fetecau C., Vieru D., Fetecau C.** New exact solutions corresponding to the second problem of Stokes for second grade fluids // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2010. V. 11. P. 584–591.
7. **Tan W. C., Masuoka T.** Stokes first problem for a second grade fluid in a porous half-space with heated boundary // Intern. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40. P. 515–522.
8. **Mushtaq M., Asghar S., Hossain M. A.** Mixed convection flow of second grade fluid along a vertical stretching surface with variable surface temperature // Heat Mass Transfer. 2007. V. 43. P. 1049–1061.

9. **Hayat T., Sajid M., Pop I.** Three-dimensional flow over a stretching surface in a viscoelastic fluid // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2008. V. 9. P. 1811–1822.
10. **Nazar R., Latip N. A.** Numerical investigation of three-dimensional boundary layer flow due to a stretching surface in a viscoelastic fluid // *Europ. J. Sci. Res.* 2009. V. 29. P. 509–517.
11. **Sakidias B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surfaces // *AIChE J.* 1961. V. 7. P. 26–28.
12. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
13. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Study on three-dimensional flow of Maxwell fluid over a stretching surface with convective boundary conditions // *Intern. J. Phys. Sci.* 2012. V. 7. P. 761–768.
14. **Sahoo B.** Flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid past a stretching sheet with partial slip // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 15. P. 602–615.
15. **Bhattacharyya K., Uddin M. S., Layek G. C., Malek M. A.** Effect of chemically reactive solute diffusion on boundary layer flow past a stretching surface with suction or blowing // *J. Math. Math. Sci.* 2010. V. 25. P. 41–48.
16. **Nazar R., Latip N. A.** Numerical investigation of three-dimensional boundary layer flow due to a stretching surface in a viscoelastic fluid // *Europ. J. Sci. Res.* 2009. V. 29. P. 509–517.
17. **Turkyilmazoglu M.** Thermal radiation effects on the time-dependent MHD permeable flow having variable viscosity // *Intern. J. Thermal Sci.* 2011. V. 50. P. 88–96.
18. **Makinde O. D., Aziz A.** Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition // *Intern. J. Thermal Sci.* 2011. V. 50. P. 1326–1332.
19. **Mukhopadhyay S.** Heat transfer analysis for unsteady MHD flow past a non-isothermal stretching surface // *Nuclear Engng Design.* 2011. V. 241. P. 4835–4839.
20. **Turkyilmazoglu M.** Multiple solutions of heat and mass transfer of MHD slip flow for the viscoelastic fluid over a stretching sheet // *Intern. J. Thermal Sci.* 2011. V. 50. P. 2264–2276.
21. **Sahoo B.** Effects of slip on sheet-driven flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid past a stretching sheet // *Comput. Math. Appl.* 2011. V. 61. P. 1442–1456.
22. **Bhattacharyya K.** Dual solutions in boundary layer stagnation-point flow and mass transfer with chemical reaction past a stretching/shrinking sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2011. V. 38. P. 917–922.
23. **Makinde O. D., Sibanda P.** Effects of chemical reaction on boundary layer flow past a vertical stretching surface in the presence of internal heat generation // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 2011. V. 21. P. 779–792.
24. **Pal D., Mondal H.** The influence of thermal radiation on hydromagnetic Darcy — Forchheimer mixed convection flow past a stretching sheet embedded in a porous medium // *Meccanica.* 2011. V. 46. P. 739–753.
25. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Soret and Dufour effects on magnetohydrodynamic (MHD) flow of Casson fluid // *Appl. Math. Mech. (English Ed.).* 2012. V. 33. P. 1301–1312.
26. **Elbashbeshy E. M. A.** Heat transfer over an exponentially stretching continuous surface with suction // *Arch. Mech.* 2001. V. 53. P. 643–651.
27. **Sanjayanand E., Khan S. K.** On heat and mass transfer in a viscoelastic boundary layer flow over an exponentially stretching sheet // *Intern. J. Thermal Sci.* 2006. V. 45. P. 819–828.
28. **Sajid M., Hayat T.** Influence of thermal radiation on the boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 35. P. 347–356.
29. **Bidin B., Nazar R.** Numerical solution of the boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with thermal radiation // *Europ. J. Sci. Res.* 2009. V. 33. P. 710–717.

30. **Sahoo B., Poncet S.** Flow and heat transfer of a third grade fluid past an exponentially stretching sheet with partial slip boundary condition // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 5010–5019.
31. **Singh V., Agarwal S.** Heat transfer in a second grade fluid over an exponentially stretching sheet through porous medium with thermal radiation and elastic deformation under the effect of magnetic field // Intern. J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 8. P. 41–63.
32. **I-Chung Liu, Hung-Hsun Wang, Yih-Ferng Peng.** Flow and heat transfer for three-dimensional flow over an exponentially stretching surface // Chem. Engng Comm. 2013. V. 200. P. 253–268.
33. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
34. **Abbasbandy S., Shirzadi A.** Homotopy analysis method for a nonlinear chemistry problem // Studies Nonlinear Sci. 2010. V. 1. P. 127–132.
35. **Hayat T., Farooq M., Iqbal Z., Alsaedi A.** Mixed convection Falkner — Skan flow of a Maxwell fluid // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2012. V. 134. 1145041.
36. **Rashidi M. M., Rajvanshi S. C., Keimanesh M.** Study of Pulsatile flow in a porous annulus with the homotopy analysis method // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2012. V. 22. P. 971–989.
37. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Radiative flow of Jeffery fluid in a porous medium with power law heat flux and heat source // Nuclear Engng Design. 2012. V. 243. P. 15–19.
38. **Ellahi R.** A study on the convergence of series solution of non-Newtonian third grade fluid with variable viscosity by means of homotopy analysis method // Adv. Math. Phys. 2012. V. 2012. 634925. DOI: 10.1155/2012/634925.

*Поступила в редакцию 27/II 2013 г.,
в окончательном варианте — 2/XII 2013 г.*
