УДК 539.374

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ В ТОНКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Найдено аналитическое решение задачи, моделирующей квазистатическое сжатие и растекание идеально жесткопластического (с критерием Мизеса — Генки) материала вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое. Данная задача представляет собой обобщение классической задачи Прандтля. Малым асимптотическим параметром является отношение толщины слоя к его длине. Радиусы цилиндров могут иметь любой "промежуточный" порядок малости. Показано, что в случае, когда радиусы и толщина слоя имеют один порядок малости, решение является асимптотически точным, в том смысле что число членов рядов, описывающих кинематические и силовые параметры течения, конечно. Исследованы предельные переходы к классическому решению Прандтля.

Ключевые слова: идеально жесткопластическое течение, задача Прандтля, асимптотические разложения, растекание, давление, цилиндрический слой.

Введение. В работе [1], в которой рассматриваются примеры использования теоремы Генки о свойствах линий скольжения в идеальной пластичности, Л. Прандтль применительно к растеканию плоского слоя между сближающимися жесткими плитами замечает: "Напряженное состояние, осуществляющееся асимптотически на достаточно большом расстоянии от свободного края, доступно для расчета; приведем здесь кратко формулы, которыми уже располагаем. Проведя ось x через середину плиты (с положительным направлением к середине пластической зоны) и ось y в направлении силы давления, получим следующие напряжения:

$$\sigma_x = -\frac{kx}{h} + c + 2k\sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2}, \qquad \sigma_y = -\frac{kx}{h} + c, \qquad \tau = \frac{ky}{h}, \tag{1}$$

где $2h$ — толщина плиты; k — предел текучести. Равновесие, как легко видеть, при этом удовлетворяется". С этих формул, а также во многом с результатов, полученных в работе [2], начинается "аналитическая история" задачи Прандтля. Эта задача, а также ее различные обобщения (см., например, [3–12]) основаны на естественных, подтверждаемых в экспериментах, силовых и кинематических гипотезах линейности по толщине касательных напряжений и перпендикулярных границам слоя скоростей.

Существуют ли другие, отличные от (1), асимптотические решения данной задачи, в которых сформулированные гипотезы (в частности, гипотеза Прандтля) не выполнены? Нелинейность задачи и отсутствие теорем о единственности решения не позволяют автоматически отрицать это. В цикле работ [13–15] на основе асимптотического анализа с естественным малым геометрическим параметром получено точное (в смысле конечного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00231а, 08-01-00251а, 08-01-00353а).

числа членов разложений) решение, совпадающее с решением Прандтля, обобщенным на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Строго показана неправомерность таких асимптотик вблизи среднего сечения слоя, где построено другое, внутреннее разложение.

Целью настоящей работы является обобщение техники [13–15] построения асимптотических решений задач о течении плоского идеально жесткопластического слоя на случай осесимметричной задачи о растекании вдоль образующей цилиндрического слоя. Такой процесс является важным элементом технологии изготовления тонкостенных изделий цилиндрической формы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричное (r, z)-течение несжимаемого идеально жесткопластического материала с пределом текучести σ_s в тонком цилиндрическом слое Ω, описываемом неравенствами

$$\Omega = \{R(t) < r < R(t) + h(t), \quad |z| < l(t)\}, \qquad h \ll l. \tag{1.1}$$

В силу несжимаемости произведение $(2R + h)hl$ со временем не меняется. В случае квазистатического процесса сжатия и растекания слоя (1.1) между жесткими шероховатыми бесконечными цилиндрами ($r = R$ и $r = R + h$) для определенности внешний цилиндр будем считать неподвижным, а радиальную составляющую скорости поверхности внутреннего цилиндра обозначим $V > 0$. Кинематические граничные условия непротекания материала сквозь цилиндры имеют вид

$$v_r\big|_{r=R} = V, \qquad v_r\big|_{r=R+h} = 0. \tag{1.2}$$

Как известно, касательная скорость, в данном случае v_z, на указанных в (1.2) границах идеальной среды не задается. Также требуется выполнение граничных условий на свободной поверхности колец $R < r < R + h$, $z = \pm l$ в интегральном смысле.

Запишем систему шести уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности, включающую два уравнения равновесия

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + (s_{rr} - s_{\theta\theta})/r = 0; \tag{1.3}$$

$$-p_{,z} - (s_{rr} + s_{\theta\theta})_{,z} + s_{rz,r} + s_{rz}/r = 0, \tag{1.4}$$

условие пластичности Мизеса — Генки

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr}s_{\theta\theta} + s_{rz}^2 = \sigma_s^2/2 \equiv \tau_s^2, \tag{1.5}$$

два условия соосности (тензорной линейности, или квазилинейности, материала)

$$s_{rr}v_r/r = s_{\theta\theta}v_{r,r}; \tag{1.6}$$

$$s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \tag{1.7}$$

и условие несжимаемости

$$v_{r,r} + v_r/r + v_{z,z} = 0. \tag{1.8}$$

В (1.2)–(1.8) входят шесть неизвестных: давление p, компоненты девиатора напряжений s_{rr}, $s_{\theta\theta}$, s_{rz} и скорости частиц v_r и v_z.

На жестких цилиндрических поверхностях помимо условий (1.2) должно выполняться требование, чтобы модуль касательного напряжения s_{rz} достигал максимального значения:

$$|s_{rz}|_{r=R} = |s_{rz}|_{r=R+h} = m\tau_s, \qquad m = \text{const}, \qquad 0 < m \leqslant 1. \tag{1.9}$$

Здесь m — так называемая шероховатость прессующего цилиндра (абсолютной шероховатости (полному сцеплению) соответствует значение $m = 1$).

Введем безразмерные координаты ρ и ζ в цилиндрическом слое Ω:

$$\rho = (r - R)/h, \qquad \zeta = z/l = \alpha z/h, \qquad 0 < \rho < 1, \qquad -1 < \zeta < 1 \tag{1.10}$$

и заметим, что область Ω содержит три характерных геометрических размера: h, R и l. Отношение $h/l = \alpha \ll 1$ принимается в качестве малого асимптотического параметра, а отношение R/l может иметь любой “промежуточный” порядок малости:

$$R/l = a\alpha^c, \quad 0 \leqslant c \leqslant 1, \qquad a = O(1) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1.11}$$

В указанном в (1.11) диапазоне значений показателя c выделим точки $c = 1$, $c = 0$ и интервал $0 < c < 1$. Рассмотрим эти три случая, имеющие различный математический и механический смысл.

2. Случай $c = 1$ (радиусы цилиндров порядка толщины слоя). Для целых значений c асимптотические разложения всех неизвестных в (1.3)–(1.8) величин можно вести по целым степеням параметра α:

$$\begin{aligned} &v_z(r,z) = V(\alpha^{-1}\bar v_z^{\{-1\}} + \bar v_z^{\{0\}} + \alpha \bar v_z^{\{1\}} + \ldots), \qquad v_r(r,z) = V(\bar v_r^{\{0\}} + \alpha \bar v_r^{\{1\}} + \ldots), \\ &s_{\beta\gamma}(r,z) = \tau_s(\bar s_{\beta\gamma}^{\{0\}} + \alpha \bar s_{\beta\gamma}^{\{1\}} + \ldots), \qquad p(r,z) = \tau_s(\alpha^{-1}\bar p^{\{-1\}} + \bar p^{\{0\}} + \alpha \bar p^{\{1\}} + \ldots). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь индексы $(\beta;\gamma)$ соответствуют индексам $(r;r)$, $(\theta;\theta)$, $(r;z)$; безразмерные коэффициенты рядов (2.1) (отмеченные чертой) — функции ρ и ζ (см. (1.10)). Наличие в (2.1) членов $\alpha^{-1}\bar v_z^{\{-1\}}$ и $\alpha^{-1}\bar p^{\{-1\}}$ свидетельствует о стремлении v_z и p к бесконечности при $\alpha \to 0$, что подтверждается физическими соображениями; при этом остальные четыре неизвестные остаются конечными.

При подстановке разложений (2.1) в систему (1.3)–(1.8) в слагаемых, содержащих $1/r$, появляется отношение

$$h/(R + \rho h) = 1/(\rho + a), \tag{2.2}$$

не зависящее от α и, следовательно, при $\alpha \to 0$ представляющее собой величину $O(1)$. Приравнивая в разложениях (2.1) коэффициенты при α^{-1} и α^0, из (1.3)–(1.8) получаем уравнения

$$\bar p^{\{-1\}}_{,\rho} = 0, \qquad \bar v^{\{-1\}}_{z,\rho} = 0; \tag{2.3}$$

$$-\bar p^{\{0\}}_{,\rho} + \bar s^{\{0\}}_{rr,\rho} + (\bar s^{\{0\}}_{rr} - \bar s^{\{0\}}_{\theta\theta})/(\rho + a) = 0, \qquad -\bar p^{\{-1\}}_{,\zeta} + \bar s^{\{0\}}_{rz,\rho} + \bar s^{\{0\}}_{rz}/(\rho + a) = 0; \tag{2.4}$$

$$(\bar s^{\{0\}}_{rr})^2 + (\bar s^{\{0\}}_{\theta\theta})^2 + \bar s^{\{0\}}_{rr}\bar s^{\{0\}}_{\theta\theta} + (\bar s^{\{0\}}_{rz})^2 = 1; \tag{2.5}$$

$$\bar s^{\{0\}}_{rr}\bar v^{\{0\}}_{r}/(\rho + a) = \bar s^{\{0\}}_{\theta\theta}\bar v^{\{0\}}_{r,\rho}, \qquad \bar s^{\{0\}}_{rr}\bar v^{\{0\}}_{z,\rho} = 2\bar s^{\{0\}}_{rz}\bar v^{\{0\}}_{r,\rho}; \tag{2.6}$$

$$\bar v^{\{0\}}_{r,\rho} + \bar v^{\{0\}}_{r}/(\rho + a) + \bar v^{\{-1\}}_{z,\zeta} = 0 \tag{2.7}$$

относительно восьми функций ρ и ζ, являющихся коэффициентами при α^{-1} и α^0 в (2.1). Из граничных условий (1.2), (1.9) следует, что

$$\bar v^{\{0\}}_{r}\big|_{\rho=0} = 1, \qquad \bar v^{\{0\}}_{r}\big|_{\rho=1} = 0; \tag{2.8}$$

$$|\bar s^{\{0\}}_{rz}|_{\rho=0} = |\bar s^{\{0\}}_{rz}|_{\rho=1} = m, \tag{2.9}$$

причем на одной (изначально неизвестно на какой) из поверхностей $\bar s^{\{0\}}_{rz} = -m$, а на другой $\bar s^{\{0\}}_{rz} = m$.

В работах [13–15] содержится подробный аналитический вывод решений систем, аналогичных (2.3)–(2.9), в задачах о прессовании плоскими жесткими поверхностями (задача Прандтля и ряд ее обобщений). При этом заранее не принимаются какие-либо силовые или кинематические гипотезы о линейной зависимости той или иной величины от поперечной координаты слоя. Апробируем описанный в [14] алгоритм последовательного нахождения неизвестных на задаче о растекании вдоль образующей цилиндрического слоя.

Из первого уравнения в (2.3), второго уравнения в (2.4) и граничных условий (2.9) после интегрирования по ρ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $\bar{s}_{rz}^{\{0\}}$ с точностью до знака следуют выражения для касательного напряжения $\bar{s}_{rz}^{\{0\}}$ и давления $\bar{p}^{\{-1\}}$:

$$\bar{s}_{rz}^{\{0\}} = -sm[(\rho+a)^2 - a(1+a)]/(\rho+a), \qquad s = \pm 1; \tag{2.10}$$

$$\bar{p}^{\{-1\}} = \bar{p}_0^{\{-1\}} - 2sm\zeta, \qquad \bar{p}_0^{\{-1\}} = \mathrm{const}\,. \tag{2.11}$$

С учетом геометрической симметрии задачи давление должно быть четной функцией ζ, поэтому $s = \pm \operatorname{sign}\zeta$ и, следовательно, $s\zeta = \pm|\zeta|$. В соответствии с физико-механическим смыслом процесса сжатия и растекания слоя сингулярная составляющая давления (слагаемое $\bar{p}^{\{-1\}}/\alpha$ в (2.1)) максимальна в центре слоя, т. е. в окрестности сечения $\zeta = 0$, и убывает до нуля вблизи краев $\zeta = \pm 1$. С учетом сказанного выше и выражения (2.11) имеем

$$\bar{p}^{\{-1\}} = 2m(1 - |\zeta|). \tag{2.12}$$

Кроме того, в (2.10) и далее $s = \operatorname{sign}\zeta$.

Из (2.7), второго уравнения в (2.3) и граничных условий (2.8) после интегрирования по ρ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $\bar{v}_r^{\{0\}}$ следует

$$\bar{v}_r^{\{0\}} = \frac{a}{1+2a}\,\frac{(1+a)^2 - (\rho+a)^2}{\rho+a}; \tag{2.13}$$

$$\bar{v}_z^{\{-1\}} = \frac{2a\zeta}{1+2a}. \tag{2.14}$$

Если функции $\bar{s}_{rz}^{\{0\}}$ в (2.10) и $\bar{v}_r^{\{0\}}$ в (2.13) известны, то первое уравнение в (2.6) и критерий пластичности (2.5) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\bar{s}_{rr}^{\{0\}}$ и $\bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}}$. Решив эту систему, находим

$$\bar{s}_{rr}^{\{0\}} = \mp\sqrt{1 - (\bar{s}_{rz}^{\{0\}})^2}\;\frac{(1+a)^2 + (\rho+a)^2}{\sqrt{(1+a)^4 + 3(\rho+a)^4}}; \tag{2.15}$$

$$\bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}} = \pm\sqrt{1 - (\bar{s}_{rz}^{\{0\}})^2}\;\frac{(1+a)^2 - (\rho+a)^2}{\sqrt{(1+a)^4 + 3(\rho+a)^4}}. \tag{2.16}$$

Интегрируя по ρ первое уравнение в (2.4), с точностью до произвольной функции $f_1(\zeta)$ можно определить $\bar{p}^{\{0\}}$:

$$\bar{p}^{\{0\}} = \bar{s}_{rr}^{\{0\}} + \int \frac{\bar{s}_{rr}^{\{0\}} - \bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}}}{\rho+a}\,d\rho + f_1(\zeta). \tag{2.17}$$

Последняя из восьми неизвестных в системе (2.3)–(2.7) функций — компонента скорости $\bar{v}_z^{\{0\}}$ — находится из второго уравнения в (2.6) с точностью до произвольной функции $f_2(\zeta)$:

$$\bar{v}_z^{\{0\}} = \pm\frac{2a}{1+2a}\int \frac{\bar{s}_{rz}^{\{0\}}}{\sqrt{1 - (\bar{s}_{rz}^{\{0\}})^2}}\,\frac{\sqrt{(1+a)^4 + 3(\rho+a)^4}}{(\rho+a)^2}\,d\rho + f_2(\zeta). \tag{2.18}$$

Выбор верхнего либо нижнего знака в (2.15), (2.16) и (2.18) обусловлен тем, что в процессе сжатия компонента $\bar{s}_{rr}^{\{0\}}$ девиатора напряжений в главном по α приближении всюду в слое должна быть отрицательна. Тогда кольцевая компонента $\bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}}$ всюду положительна, а профиль осевой скорости по толщине $\bar{v}_z^{\{0\}}(\rho)$ (точнее, микропрофиль, поскольку главная составляющая осевой скорости (2.14) от ρ не зависит) будет выпуклым в направлении движения частиц. Итак, в (2.15), (2.16) и (2.18) необходимо выбрать верхние знаки.

Наличие сигнатуры s в (2.10), (2.17) и (2.18) свидетельствует о разрыве решения в сечении $\zeta = 0$ и, следовательно, о его достоверности лишь вдали от этого сечения и от зон влияния краевого эффекта вблизи торцов $\zeta = \pm 1$.

Анализ системы главного приближения (2.3)–(2.7) с граничными условиями (2.8), (2.9) показал, что пока неизвестны две функции: f_1 в (2.17) и f_2 в (2.18).

Перейдем к математической постановке задачи следующего по α приближения. Рассмотрим систему шести уравнений, записанных с учетом известных коэффициентов с индексом “$\{0\}$” в (2.1) (в частности, примем во внимание, что ни $\bar{v}_r^{\{0\}}$, ни девиатор напряжений $\bar{s}_{\beta\gamma}^{\{0\}}$ не зависят от ζ):

$$-\bar{p}_{,\rho}^{\{1\}} + \bar{s}_{rr,\rho}^{\{1\}} + (\bar{s}_{rr}^{\{1\}} - \bar{s}_{\theta\theta}^{\{1\}})/(\rho + a) = 0, \qquad \bar{s}_{rz,\rho}^{\{1\}} + \bar{s}_{rz}^{\{1\}}/(\rho + a) = \bar{p}_{,\zeta}^{\{0\}} \equiv f_1'(\zeta); \tag{2.19}$$

$$(2\bar{s}_{rr}^{\{0\}} + \bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}})\bar{s}_{rr}^{\{1\}} + (\bar{s}_{rr}^{\{0\}} + 2\bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}})\bar{s}_{\theta\theta}^{\{1\}} + 2\bar{s}_{rz}^{\{0\}}\bar{s}_{rz}^{\{1\}} = 0; \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}(\bar{s}_{rr}^{\{0\}}\bar{v}_r^{\{1\}} + \bar{v}_r^{\{0\}}\bar{s}_{rr}^{\{1\}})/(\rho + a) = \bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}}\bar{v}_{r,\rho}^{\{1\}} + \bar{v}_{r,\rho}^{\{0\}}\bar{s}_{\theta\theta}^{\{1\}},\\ \bar{s}_{rr}^{\{0\}}\bar{v}_{z,\rho}^{\{1\}} + \bar{v}_{z,\rho}^{\{0\}}\bar{s}_{rr}^{\{1\}} = 2(\bar{s}_{rz}^{\{0\}}\bar{v}_{r,\rho}^{\{1\}} + \bar{v}_{r,\rho}^{\{0\}}\bar{s}_{rz}^{\{1\}});\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\bar{v}_{r,\rho}^{\{1\}} + \bar{v}_r^{\{1\}}/(\rho + a) = -\bar{v}_{z,\zeta}^{\{0\}} \equiv -f_2'(\zeta), \tag{2.22}$$

а также граничные условия

$$\bar{v}_r^{\{1\}}\big|_{\rho=0} = \bar{v}_r^{\{1\}}\big|_{\rho=1} = 0; \tag{2.23}$$

$$\bar{s}_{rz}^{\{1\}}\big|_{\rho=0} = \bar{s}_{rz}^{\{1\}}\big|_{\rho=1} = 0. \tag{2.24}$$

Из второго уравнения в (2.19) и условий (2.24) получаем $\bar{s}_{rz}^{\{1\}} \equiv 0$, $f_1 \equiv \mathrm{const}$, а из (2.22) и условий (2.23) — $\bar{v}_r^{\{1\}} \equiv 0$, $f_2 \equiv \mathrm{const}$. Постоянная f_1 в (2.17) представляет собой гидростатическое давление $\bar{p}_0^{\{0\}}$, для определения которого нужно использовать граничные условия (в интегральной форме) на свободных краях $\zeta = \pm 1$. Постоянная f_2 в (2.18) равна нулю в силу нечетности $\bar{v}_z^{\{0\}}$ по ζ.

Нетрудно показать, что оставшиеся четыре неизвестные $\bar{s}_{rr}^{\{1\}}$, $\bar{s}_{\theta\theta}^{\{1\}}$, $\bar{p}^{\{1\}}$, $\bar{v}_z^{\{1\}}$ в линейной однородной системе (2.19)–(2.22) также тождественно равны нулю. То же можно сказать о коэффициентах с верхними индексами “$\{2\}$”, “$\{3\}$”, ... в асимптотических разложениях (2.1). Это свидетельствует о том, что полученное в случае $c = 1$ решение является асимптотически точным, т. е. содержит один либо два ненулевых члена в разложениях по α. Приведем это решение в размерных переменных:

$$s_{rz} = -s\tau_s m\,\frac{r^2 - R(R+h)}{rh}, \qquad s_{rr} = -\sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2}\;\frac{(R+h)^2 + r^2}{\sqrt{(R+h)^4 + 3r^4}},$$

$$
\begin{gathered}
s_{\theta\theta} = \sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2}\, \frac{(R+h)^2 - r^2}{\sqrt{(R+h)^4 + 3r^4}}, \qquad v_r = \frac{VR}{h+2R}\, \frac{(R+h)^2 - r^2}{rh}, \\
v_z = \frac{2VR}{h(h+2R)}\Big(z + \int \frac{s_{rz}}{\sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2}}\, \frac{\sqrt{(R+h)^4 + 3r^4}}{r^2}\, dr\Big), \\
p = 2\tau_s m\, \frac{l - |z|}{h} + s_{rr} + \int \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{r}\, dr + p_0.
\end{gathered}
\tag{2.25}
$$

Заметим, что выражения (2.25) точно удовлетворяют граничным условиям (1.2), (1.9) и исходным уравнениям (1.3)–(1.8) всюду, за исключением сечения $z = 0$.

3. Случай $c = 0$ (радиусы цилиндров порядка длины образующей). В случае $c = 0$ отношение $h/(R + \rho h)$ имеет вид

$$
\frac{h}{R+\rho h} = \frac{\alpha}{\alpha\rho + a} = \frac{\alpha}{a} + O(\alpha^2). \tag{3.1}
$$

Поскольку показатель степени c в (1.11) по-прежнему является целым числом, асимптотические разложения всех неизвестных можно вести по целым степеням α, т. е. в виде (2.1).

В рассматриваемом случае порядок малости дроби (3.1) более высокий, чем $O(1)$ ($\alpha \to 0$), поэтому система главного асимптотического приближения отличается от (2.3)–(2.7) тем, что в ней отсутствуют слагаемые со знаменателем $\rho + a$ (в данной работе не приведена). Эта система совпадает с системой главного приближения в классической задаче Прандтля о сжатии плоского слоя [14]. С использованием алгоритма, изложенного для случая $c = 1$, последовательно можно найти все неизвестные:

$$
\begin{gathered}
\bar s_{rz}^{\{0\}} = -sm(2\rho - 1), \qquad \bar s_{rr}^{\{0\}} = -\sqrt{1 - m^2(2\rho-1)^2}, \qquad \bar s_{\theta\theta}^{\{0\}} \equiv 0, \\
\bar v_r^{\{0\}} = 1 - \rho, \qquad \bar v_z^{\{-1\}} = \zeta, \qquad \bar v_z^{\{0\}} = (s/m)\sqrt{1 - m^2(2\rho-1)^2} + f_4(\zeta), \\
\bar p^{\{-1\}} = 2m(1 - |\zeta|), \qquad \bar p^{\{0\}} = -\sqrt{1 - m^2(2\rho-1)^2} + f_3(\zeta)
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

(f_3, f_4 — пока неизвестные произвольные функции).

В следующем приближении для величин с верхним индексом “$\{1\}$” имеем систему шести линейных уравнений

$$
-\bar p_{,\rho}^{\{1\}} + \bar s_{rr,\rho}^{\{1\}} + \bar s_{rr}^{\{0\}}/a = 0, \qquad -\bar p_{,\zeta}^{\{0\}} + \bar s_{rz,\rho}^{\{1\}} + \bar s_{rz}^{\{0\}}/a = 0; \tag{3.3}
$$

$$
2\bar s_{rr}^{\{0\}} \bar s_{rr}^{\{1\}} + \bar s_{rr}^{\{0\}} \bar s_{\theta\theta}^{\{1\}} + 2\bar s_{rz}^{\{0\}} \bar s_{rz}^{\{1\}} = 0; \tag{3.4}
$$

$$
\bar s_{rr}^{\{0\}} \bar v_r^{\{0\}}/a = \bar s_{\theta\theta}^{\{1\}} \bar v_{r,\rho}^{\{0\}}, \qquad \bar s_{rr}^{\{0\}} \bar v_{z,\rho}^{\{1\}} + \bar s_{rr}^{\{1\}} \bar v_{z,\rho}^{\{0\}} = 2(\bar s_{rz}^{\{0\}} \bar v_{r,\rho}^{\{1\}} + \bar s_{rz}^{\{1\}} \bar v_{r,\rho}^{\{0\}}); \tag{3.5}
$$

$$
\bar v_{r,\rho}^{\{1\}} + \bar v_r^{\{0\}}/a + \bar v_{z,\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{3.6}
$$

и граничные условия, совпадающие с (2.23), (2.24).

Интегрируя по ρ второе уравнение в (3.3) с граничными условиями (2.24) (функции $\bar s_{rz}^{\{0\}}$ и $\bar p^{\{0\}}$ определены в (3.2)), можно показать, что в (3.2) следует положить $f_3(\zeta) \equiv \bar p_0^{\{0\}} = \mathrm{const}$. Тогда

$$
\bar s_{rz}^{\{1\}} = -sm\rho(1 - \rho)/a. \tag{3.7}
$$

Интегрируя по ρ уравнение (3.6) с граничными условиями (2.23) (функции $\bar v_r^{\{0\}}$ и $\bar v_z^{\{0\}}$ определены в (3.2)), можно показать, что в (3.2) необходимо положить $f_4(\zeta) = -\zeta/(2a)$. Тогда

$$
\bar v_r^{\{1\}} = -\rho(1 - \rho)/(2a). \tag{3.8}
$$

Вместе с уже вычисленными коэффициентами $\bar{s}_{rz}^{\{1\}}$ (3.7) и $\bar{v}_r^{\{1\}}$ (3.8) запишем другие коэффициенты рядов (2.1) с верхним индексом "$\{1\}$", являющиеся решениями системы (3.3)–(3.6):

$$\bar{s}_{\theta\theta}^{\{1\}} = \frac{1-\rho}{a}\sqrt{1-m^2(2\rho-1)^2}, \qquad \bar{s}_{rr}^{\{1\}} = -\frac{1-\rho}{2a}\,\frac{1-m^2(2\rho-1)(4\rho-1)}{\sqrt{1-m^2(2\rho-1)^2}},$$
$$\bar{p}^{\{1\}} = \bar{s}_{rr}^{\{1\}} - \big[\arcsin\left(m(2\rho-1)\right) + m(2\rho-1)\sqrt{1-m^2(2\rho-1)^2}\,\big]/(4ma) + f_5(\zeta). \tag{3.9}$$

С учетом соотношений (3.2), в которые надо подставить найденные функции f_3 и f_4, решение задачи о растекании тонкого цилиндрического слоя в случае $c=0$ в размерных переменных имеет вид

$$\begin{gathered} s_{rz} = -s\tau_s m[2(r-R)-h]/h + O(h/l), \\ s_{rr} = -\tau_s\sqrt{h^2-m^2[2(r-R)-h]^2}\,/h + O(h/l), \\ s_{\theta\theta} = O(h/l), \qquad v_r = V(R+h-r)/h + O(h/l), \\ v_z = V\big[z - zh/(2R) + s\sqrt{h^2-m^2[2(r-R)-h]^2}/m\big]/h + O(h/l), \\ p = \tau_s\big\{2m(l-|z|) - \sqrt{h^2-m^2[2(r-R)-h]^2}\,\big\}/h + p_0 + O(h/l), \end{gathered} \tag{3.10}$$

причем $O(h/l)$ в (3.10) можно заменить на $O(h/R)$. В отличие от случая $c=1$ в данном случае ряды (2.1) содержат бесконечное число тождественно ненулевых членов, поэтому возникает вопрос об их сходимости.

Действительно, разность $\sqrt{1-m^2(2\rho-1)^2}$ в знаменателе выражения для $\bar{s}_{rr}^{\{1\}}$ в (3.9) может быть равна нулю, если одновременно $m=1$ и $\rho=0$ или $m=1$ и $\rho=1$. Вычислим соответствующие пределы:

$$\lim_{m=1,\ \rho\to 1}\bar{s}_{rr}^{\{1\}} = \lim_{m=1,\ \rho\to 0}\bar{s}_{rr}^{\{1\}} = 0.$$

Следовательно, ряды (2.1) остаются асимптотическими в смысле Пуанкаре в точках соприкосновения пластического слоя с цилиндрическими прессующими поверхностями, в случае когда эти поверхности абсолютно шероховаты.

4. Случай $0<c<1$ (радиусы цилиндров имеют "промежуточный" порядок малости). В случае $0<c<1$ дробь $h/(R+\rho h)$ имеет порядок

$$\frac{h}{R+\rho h} = \frac{\alpha^{1-c}}{\alpha^{1-c}\rho + a} = \frac{\alpha^{1-c}}{a} + O(\alpha^{2(1-c)}).$$

Наличие в уравнениях дробных степеней α свидетельствует о том, что первые члены асимптотических разложений по α должны быть следующими:

$$\begin{gathered} v_z(r,z) = V(\alpha^{-1}\bar{v}_z^{\{-1\}} + \alpha^{-c}\bar{v}_z^{\{-c\}} + \bar{v}_z^{\{0\}} + \alpha^{1-c}\bar{v}_z^{\{1-c\}} + \ldots), \\ v_r(r,z) = V(\bar{v}_r^{\{0\}} + \alpha^{1-c}\bar{v}_r^{\{1-c\}} + \ldots), \qquad s_{\beta\gamma}(r,z) = \tau_s(\bar{s}_{\beta\gamma}^{\{0\}} + \alpha^{1-c}\bar{s}_{\beta\gamma}^{\{1-c\}} + \ldots), \\ p(r,z) = \tau_s(\alpha^{-1}\bar{p}^{\{-1\}} + \alpha^{-c}\bar{p}^{\{-c\}} + \bar{p}^{\{0\}} + \alpha^{1-c}\bar{p}^{\{1-c\}} + \ldots). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Подставим (4.1) в основную систему уравнений осесимметричной идеальной пластичности (1.3)–(1.8) и последовательно приравняем коэффициенты при α^{-1}, α^{-c}, α^0, α^{1-c}. В результате, как и выше, получим два равенства (2.3) (в случае, когда приравниваются коэффициенты при α^{-1}) и шесть уравнений, аналогичных (2.4)–(2.7) (в случае, когда приравниваются коэффициенты при α^0), в которых надо опустить слагаемые со знаменателем $\rho + a$:

$$\begin{gathered}
\bar{p}^{\{-c\}}_{,\rho} = 0, \qquad \bar{v}^{\{-c\}}_{z,\rho} = 0,\\
-\bar{p}^{\{1-c\}}_{,\rho} + \bar{s}^{\{1-c\}}_{rr,\rho} + \bar{s}^{\{0\}}_{rr}/a = 0, \qquad -\bar{p}^{\{-c\}}_{,\zeta} + \bar{s}^{\{1-c\}}_{rz,\rho} + \bar{s}^{\{0\}}_{rz}/a = 0,\\
(2\bar{s}^{\{0\}}_{rr} + \bar{s}^{\{0\}}_{\theta\theta})\bar{s}^{\{1-c\}}_{rr} + (\bar{s}^{\{0\}}_{rr} + 2\bar{s}^{\{0\}}_{\theta\theta})\bar{s}^{\{1-c\}}_{\theta\theta} + 2\bar{s}^{\{0\}}_{rz}\bar{s}^{\{1-c\}}_{rz} = 0, \qquad (4.2)\\
\bar{s}^{\{0\}}_{rr}\bar{v}^{\{0\}}_{r}/a = \bar{s}^{\{0\}}_{\theta\theta}\bar{v}^{\{1-c\}}_{r,\rho} + \bar{s}^{\{1-c\}}_{\theta\theta}\bar{v}^{\{0\}}_{r,\rho},\\
\bar{s}^{\{0\}}_{rr}\bar{v}^{\{1-c\}}_{z,\rho} + \bar{s}^{\{1-c\}}_{rr}\bar{v}^{\{0\}}_{z,\rho} = 2(\bar{s}^{\{0\}}_{rz}\bar{v}^{\{1-c\}}_{r,\rho} + \bar{s}^{\{1-c\}}_{rz}\bar{v}^{\{0\}}_{r,\rho}),\\
\bar{v}^{\{1-c\}}_{r,\rho} + \bar{v}^{\{0\}}_{r}/a + \bar{v}^{\{-c\}}_{z,\zeta} = 0.
\end{gathered}$$

Решение, соответствующее верхним индексам “$\{-1\}$” и “$\{0\}$”, будет иметь вид (3.2), но функции $f_3(\zeta)$ и $f_4(\zeta)$ будут другими. Решение системы (4.2) с граничными условиями

$$\bar{v}^{\{1-c\}}_{r}\big|_{\rho=0} = \bar{v}^{\{1-c\}}_{r}\big|_{\rho=1} = 0, \qquad \bar{s}^{\{1-c\}}_{rz}\big|_{\rho=0} = \bar{s}^{\{1-c\}}_{rz}\big|_{\rho=1} = 0$$

будет следующим. Для величины с верхними индексами “$\{-c\}$” имеем

$$\bar{p}^{\{-c\}} \equiv \bar{p}^{\{-c\}}_0 = \mathrm{const}, \qquad \bar{v}^{\{-c\}}_{z} = -\zeta/(2a),$$

а выражения для величин с верхними индексами “$\{1-c\}$” совпадают с соответствующими выражениями для величин в (3.7)–(3.9).

Для нахождения пока произвольных функций $f_i(\zeta)$ необходимо рассмотреть более высокие приближения по α. Однако при $c \in (0;1)$ возможны различные варианты разложений в зависимости от того, каким будет порядок следующего члена после α^{1-c} в (4.2): $\alpha^{2(1-c)}$ или α. В случае $0 < c < 1$, вообще говоря, имеется счетное количество частных случаев, в каждом из которых c — некоторое рациональное число из интервала $(0;1)$. Не останавливаясь на более детальном анализе этих частных случаев, ограничимся найденными для любого $c \in (0;1)$ коэффициентами при α^{-1}, α^{-c}, α^0, α^{1-c} в (4.1).

5. Предельные переходы к решению Прандтля. Во всех рассмотренных случаях — $c = 1$, $c = 0$ и $0 < c < 1$ — найденные решения при $a \to \infty$, т. е. при исчезновении свода, должны стремиться к решению задачи о сжатии плоского слоя двумя жесткими плитами, одна из которых неподвижна, а другая перемещается со скоростью V (решение Прандтля с точностью до масштаба и переносного движения). Параметры решения Прандтля в виде коэффициентов асимптотических разложений, аналогичных (2.1), имеют вид [14]

$$\begin{gathered}
\bar{s}^{\{0\}}_{xy} = -sm(2y-1), \qquad \bar{s}^{\{0\}}_{xx} = -s^{\{0\}}_{yy} = -\sqrt{1-m^2(2y-1)^2}\,,\\
\bar{v}^{\{0\}}_{y} = 1-y, \qquad \bar{v}^{\{-1\}}_{x} = x, \qquad \bar{v}^{\{0\}}_{x} = s\sqrt{1-m^2(2y-1)^2}\,/m, \qquad (5.1)\\
\bar{p}^{\{-1\}} = 2m(1-|x|), \qquad \bar{p}^{\{0\}} = -\bar{s}^{\{0\}}_{xx} + \bar{p}^{\{0\}}_0
\end{gathered}$$

(безразмерная координата x меняется вдоль слоя в диапазоне от -1 до 1, а безразмерная координата y — по толщине слоя в интервале от 0 до 1).

При $a \to \infty$ в решении (2.10), (2.12)–(2.18) для $c = 1$ в пределе получаем

$$\bar{s}_{rz}^{\{0\}} = -sm(2\rho - 1), \qquad \bar{s}_{rr}^{\{0\}} = -\sqrt{1 - m^2(2\rho-1)^2}, \qquad \bar{s}_{\theta\theta}^{\{0\}} \equiv 0,$$
$$\bar{v}_r^{\{0\}} = 1 - \rho, \qquad \bar{v}_z^{\{-1\}} = \zeta, \qquad \bar{v}_z^{\{0\}} = s\sqrt{1 - m^2(2\rho-1)^2}\,/m, \tag{5.2}$$
$$\bar{p}^{\{-1\}} = 2m(1 - |\zeta|), \qquad \bar{p}^{\{0\}} = \bar{s}_{rr}^{\{0\}} + \bar{p}_0^{\{0\}}.$$

Эти выражения с точностью до замены переменных $x \leftrightarrow z$ ($x \leftrightarrow \zeta$), $y \leftrightarrow r$ ($y \leftrightarrow \rho$), как и следовало ожидать, совпадают с (5.1).

В случае $c = 0$ решение (3.2), отличающееся от (5.2) лишь наличием функции $f_4(\zeta) = -\zeta/(2a)$, при $a \to \infty$ также совпадает с (5.1), (5.2). Коэффициенты разложений с верхними индексами "{1}", "{2}", ... (см., например, (3.7)–(3.9)) стремятся к нулю, поэтому предельное решение является асимптотически точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прандтль Л.** Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
2. **Geiringer H., Prager W.** Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand // Ergeb. Exakten Naturwis. 1934. Bd 13. S. 310–363.
3. **Ильюшин А. А.** Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 6. С. 693–713.
4. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
5. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
6. **Друянов Б. А.** Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. М.: Машиностроение, 1990.
7. **Задоян М. А.** Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
8. **Победря Б. Е., Гузей И. Л.** Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Мат. моделирование систем и процессов. 1998. № 6. С. 82–91.
9. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
10. **Колмогоров В. Л.** Механика обработки материалов давлением. Екатеринбург: Урал. гос. техн. ун-т (Урал. политехн. ин-т), 2001.
11. **Кийко И. А., Кадымов В. А.** Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.
12. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Коэффициенты интенсивности скорости деформации при сжатии слоя пластического материала между цилиндрическими поверхностями // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 171–180.
13. **Георгиевский Д. В.** Об осесимметричном аналоге задачи Прандтля // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 3. С. 331–333.
14. **Георгиевский Д. В.** Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 83–93.
15. **Георгиевский Д. В.** Об идеально жесткопластическом растекании асимптотически тонкого цилиндрического слоя // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 328–331.

Поступила в редакцию 10/VIII 2009 г.