

УДК 532.59

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

С. П. Актершев, С. В. Алексеенко

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: sergey-aktershev@mail.ru, aleks@itp.nsc.ru

Для описания длинноволновых трехмерных возмущений в пленке жидкости разработана модель, учитывающая наличие касательного напряжения на межфазной поверхности. В данной модели, основанной на разложении компонент вектора скорости жидкости в ряд по линейно независимым базисным функциям (гармоникам), не используется предположение об автомодельности профиля скорости. Проведен линейный анализ устойчивости пленочного течения относительно трехмерных возмущений, а также численное моделирование нелинейных волн.

Ключевые слова: пленка жидкости, трехмерные волны, численное моделирование, касательные напряжения, устойчивость.

Введение. Течение тонких пленок жидкости реализуется в различных технологических процессах и аппаратах, предназначенных для интенсификации процессов тепло-массообмена. Пленочные течения жидкости относятся к классу течений со свободной поверхностью, в которых важную роль играют развитие и взаимодействие поверхностных волн. В этом случае волновая структура течения определяет особенности режимов работы установок. В настоящее время двумерные волновые течения свободно стекающих пленок жидкости исследованы достаточно полно, результаты этих исследований представлены и обобщены в [1–4]. В то же время режимы развитых трехмерных волновых течений остаются малоизученными. Результаты теоретического исследования трехмерных волн представлены в ряде работ. В [5] впервые получено решение в виде стационарной уединенной волны при числах Рейнольдса $Re \approx 1$. В [6–9] для ряда частных случаев построены решения в виде периодических и уединенных трехмерных волн, в том числе при умеренных значениях Re . В [10] впервые описаны экспериментально полученные стационарные уединенные трехмерные волны.

Во всех упрощенных моделях волнового течения пленки используется длинноволновое приближение, т. е. разложение по малому параметру — отношению толщины пленки к длине волны. Например, на основе теоретического подхода, предложенного в работе [11], В. Я. Шкадов разработал модель для двумерных волн в стекающей пленке жидкости [12]. В модели Шкадова (integral boundary layer (IBL)) используются погранслойное приближение и автомодельный (параболический) профиль скорости. В основе IBL-модели лежит предположение, что в случае длинных волн профиль скорости в пленке геометрически подобен профилю скорости невозмущенного течения. В дальнейшем IBL-модель была обобщена на случай трехмерных волн. При умеренных числах Рейнольдса IBL-модель достаточно точно описывает характеристики нелинейных двумерных волн и в настоящее время является основой для изучения волновых течений пленки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-29-00093).

Дальнейшее усовершенствование предложенного в [11, 12] подхода с целью адекватного описания пленочных течений в сложных условиях привело к появлению новых моделей (см., например, [13–15]), в которых для аппроксимации профиля скорости в пленке применяются различные системы полиномов от безразмерной координаты $\eta = y/h$. В [16] разработана модель двумерного волнового течения стекающей пленки, основанная на разложении профиля скорости в ряд по базисной системе тригонометрических функций $f_j(\eta) = \sin(2j - 1)\pi\eta/2$, проведен линейный анализ модели и получены дисперсионные зависимости. В настоящей работе модель [16] обобщается на случай трехмерных волн с учетом касательного напряжения, действующего на поверхности пленки. В предлагаемой модели не используется гипотеза об автомодельности профиля скорости, что позволяет более детально описать поле скоростей жидкости. Это особенно важно, например, для расчета процессов тепломассопереноса в пленках, а также для более полного учета особенностей волнового течения пленок жидкости в сложных условиях. Заметим, что система тригонометрических функций $f_j(\eta)$ обычно применяется для аппроксимации профиля температуры в задаче о нестационарном теплопереносе в твердой пластине толщиной h , но в [16] эта система базисных функций впервые использована для аппроксимации скорости в стекающей пленке жидкости.

1. Уравнения нестационарного трехмерного течения пленки. Рассмотрим течение пленки вязкой жидкости на плоской пластине, наклоненной к горизонту под углом θ . Введем декартову систему координат $Oxyz$ с осью Ox , направление которой совпадает с направлением проекции силы гравитации на пластину, и осью Oy , направленной по нормали к пластине. Будем считать, что на поверхности пленки действует касательное напряжение, обусловленное воздействием газового потока или наличием термокапиллярного эффекта (в случае неизотермического течения). Возмущение поверхности пленки считаем длинноволновым (толщина пленки h значительно меньше длины волны λ) и используем погранслоное приближение, полагая $\partial h/\partial x \ll 1$, $\partial h/\partial z \ll 1$, $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$, $\partial^2/\partial z^2 \ll \partial^2/\partial y^2$. В первом приближении по параметру $\varepsilon = h/\lambda$ течение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости в направлениях Ox, Oy, Oz соответственно. В левой части третьего уравнения (1.1) пренебрегается компонентой v , поскольку $v/u \sim \varepsilon \ll 1$. На стенке выполняются условия $u = v = w = 0$, а на поверхности пленки — кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + w_s \frac{\partial h}{\partial z} = v_s \quad (1.3)$$

и динамические условия

$$p = p_s - \sigma \Delta h, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_x(x, z, t), \quad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_z(x, z, t), \quad (1.4)$$

где $\Delta h = \partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial z^2$ — кривизна поверхности пленки; p_s — давление газа; u_s, v_s, w_s — компоненты вектора скорости на поверхности пленки. Компоненты касательного напряжения τ_x, τ_z на поверхности пленки считаются заданными. Интегрируя третье уравнение (1.1) с учетом (1.4), находим давление

$$p = p_s + \rho g \cos \theta (h - y) - \sigma \Delta h. \quad (1.5)$$

Так же как и в двумерном случае, первые два уравнения (1.1) проинтегрируем по толщине пленки. Интегралы в левой части преобразуем с помощью (1.2)–(1.5) и граничных условий на пластине. В результате уравнения импульса принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h uw dy &= \\ &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) + gh \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h uw dy &= \\ &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) + gh \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $q = \int_0^h u dy, m = \int_0^h w dy$ — расходы жидкости в направлениях Ox и Oz соответственно.

Кинематическое условие (1.3) преобразуем к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Чтобы получить систему уравнений, замкнутую относительно q, m, h , необходимо задать профили скорости $u(x, z, t), w(x, z, t)$ и исключить напряжения на стенке. Например, IBL-модель для стекающей пленки [12] выведена в предположении, что профиль является параболическим:

$$\frac{u}{u_s} = 2\eta - \eta^2, \quad \eta = \frac{y}{h}. \quad (1.8)$$

В случае трехмерного течения уравнения (1.6) в IBL-модели имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qm}{h} \right) &= gh \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) - \frac{3\nu q}{h^2}, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{m^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{qm}{h} \right) &= gh \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) - \frac{3\nu m}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Модельные уравнения на основе разложения скорости в ряд по базисным функциям. На интервале $0 < \eta < 1$ введем следующие линейно независимые ортогональные базисные функции (гармоники):

$$f_j(\eta) = \sin \omega_j \eta, \quad \omega_j = (2j - 1)\pi/2, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Любую непрерывную функцию $F(\eta)$, определенную на интервале $0 \leq \eta \leq 1$, можно продолжить на интервал $1 \leq \eta \leq 2$ как четную функцию относительно точки $\eta = 1$, а затем (при

условии $F(0) = 0$) на интервал $-2 \leq \eta \leq 0$ как нечетную функцию. Построенная таким образом нечетная функция является непрерывной на интервале $-2 \leq \eta \leq 2$, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье, в котором присутствуют только синусы (гармоники $f_j(\eta)$):

$$F(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(\eta), \quad a_j = 2 \int_0^1 F(\eta) \sin \omega_j \eta d\eta.$$

Выполняя данную процедуру для $u(\eta)$ и $w(\eta)$, представим эти функции в виде

$$u = \frac{\tau_x h \eta}{\mu} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x, z, t) f_j(\eta), \quad w = \frac{\tau_z h \eta}{\mu} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(x, z, t) f_j(\eta). \quad (2.1)$$

Нетрудно показать, что формулы (2.1) удовлетворяют граничным условиям на стенке и поверхности пленки. Коэффициенты a_j и b_j в (2.1) не имеют физической интерпретации, но их можно выразить через расходы жидкости в направлениях Ox и Oz . Представляя первые слагаемые в (2.1), учитывая касательное напряжение на поверхности пленки, в виде ряда по гармоникам

$$\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j f_j(\eta), \quad \gamma_j = \frac{2(-1)^{j-1}}{\omega_j^2},$$

выражения для расходов жидкости в направлениях Ox и Oz запишем в виде

$$q = h \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j + \frac{\tau_x h \gamma_j}{\mu} \right) \int_0^1 f_j d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} q_j, \quad m = h \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j + \frac{\tau_z h \gamma_j}{\mu} \right) \int_0^1 f_j d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} m_j. \quad (2.2)$$

Здесь $q_j = h(a_j + \tau_x h \gamma_j / \mu) / \omega_j$, $m_j = h(b_j + \tau_z h \gamma_j / \mu) / \omega_j$ — вклады j -й гармоники в общий расход. Используя (2.1), (2.2), с учетом ортогональности гармоник каждый член уравнений (1.6) можно разложить в ряд:

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_j \omega_j \tau_x}{\rho} - \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_j \omega_j \tau_z}{\rho} - \frac{\nu \omega_j^2 m_j}{h^2} \right);$$

$$\int_0^h u^2 dy = h \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j + \frac{\tau_x h \gamma_j}{\mu} \right)^2 \int_0^1 f_j^2 d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j^2 q_j^2}{2h}; \quad (2.4)$$

$$\int_0^h w^2 dy = h \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j + \frac{\tau_z h \gamma_j}{\mu} \right)^2 \int_0^1 f_j^2 d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j^2 m_j^2}{2h}; \quad (2.5)$$

$$\int_0^h uw dy = h \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j + \frac{\tau_x h \gamma_j}{\mu} \right) \left(b_j + \frac{\tau_z h \gamma_j}{\mu} \right) \int_0^1 f_j^2 d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j^2 q_j m_j}{2h}; \quad (2.6)$$

$$gh \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right); \quad (2.7)$$

$$gh \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right). \quad (2.8)$$

В равенствах (2.7), (2.8) использовано тождество $1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^2}$. Подставляя (2.3)–(2.8) в уравнения (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{q_j m_j}{h} \right) + \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2} - \frac{\gamma_j \omega_j \tau_x}{\rho} - \right. \\ \left. - \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) \right) = 0, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{m_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j m_j}{h} \right) + \frac{\nu \omega_j^2 m_j}{h^2} - \frac{\gamma_j \omega_j \tau_z}{\rho} - \right. \\ \left. - \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Вследствие линейной независимости гармоник каждое слагаемое этих рядов равно нулю. Таким образом, для $q_j(x, z, t)$ и $m_j(x, z, t)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{q_j m_j}{h} \right) = \frac{2(-1)^{j-1} \tau_x}{\rho \omega_j} + \\ + \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right) - \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2}, \\ \frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{m_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j m_j}{h} \right) = \frac{2(-1)^{j-1} \tau_z}{\rho \omega_j} + \\ + \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right) - \frac{\nu \omega_j^2 m_j}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При этом уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial m_j}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.10)$$

При заданных τ_x , τ_z получается замкнутая система уравнений (2.9), (2.10) для $q_j(x, z, t)$, $m_j(x, z, t)$, $h(x, z, t)$. Заметим, что в случае свободно стекающей пленки уравнения (2.9) и уравнения (1.9) в ИВЛ-модели имеют одну и ту же структуру, но различаются числовыми коэффициентами. Предлагаемая модель в некотором смысле является обобщением ИВЛ-модели, но в отличие от нее обладает большей “степенью свободы” для формы профиля скорости.

3. Анализ устойчивости невозмущенного течения. Выберем в качестве масштаба длины толщину невозмущенной пленки h_0 и введем масштабы скорости $u_m = gh_0^2/(3\nu)$, времени $t_m = h_0/u_m$, расхода $q_m = gh_0^3/(3\nu)$, напряжения $\tau_m = \rho gh_0/3$. Сохранив прежние

обозначения, перейдем к безразмерным переменным x/h_0 , z/h_0 , h/h_0 , q_j/q_m , m_j/q_m , τ/τ_m , t/t_m . Уравнения (2.9), (2.10) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{q_j m_j}{h} \right) &= \frac{3}{\text{Re}_m} \left(\frac{2\tau_x (-1)^{j-1}}{3\omega_j} + \frac{2h}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\omega_j^2 q_j}{3h^2} \right) + \\ &+ \frac{2h \text{We}}{\omega_j^2} \frac{\partial \Delta h}{\partial x}, \\ \frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{m_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{q_j m_j}{h} \right) &= \frac{3}{\text{Re}_m} \left(\frac{2\tau_z (-1)^{j-1}}{3\omega_j} - \cos \theta \frac{2h}{\omega_j^2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\omega_j^2 m_j}{3h^2} \right) + \\ &+ \frac{2h \text{We}}{\omega_j^2} \frac{\partial \Delta h}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial m_j}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\text{We} = (3 \text{Fi} / \text{Re}_m^5)^{1/3}$ — число Вебера; $\text{Fi} = \sigma^3 / (\rho^3 g \nu^4)$ — число Капицы; $\text{Re}_m = gh_0^3 / (3\nu^2)$. В двумерном случае свободно стекающей пленки ($\tau_{x0} = \tau_{z0} = 0$, $m_{0j} = 0$) безразмерный параметр Re_m связан с числом Рейнольдса пленки $\text{Re} = q/\nu$ соотношением $\text{Re} = \text{Re}_m \sin \theta$. В общем случае для невозмущенного течения из (3.2) получаем $h = 1$, $q_{0j} = 6 \sin \theta / \omega_j^4 + 2\tau_{x0} (-1)^{j-1} / \omega_j^3$, $m_{0j} = 2\tau_{z0} (-1)^{j-1} / \omega_j^3$.

3.1. *Дисперсионное уравнение для трехмерных волн.* Рассмотрим устойчивость свободно стекающей пленки относительно трехмерных возмущений. Положим $h = 1 + H$, $q_j = q_{0j} + Q_j$, $m_j = M_j$. Здесь H , Q_j , M_j — малые возмущения в виде бегущей волны:

$$H = H_a \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z),$$

$$Q = Q_a \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z), \quad M = M_a \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z),$$

α , β — компоненты вещественного волнового числа $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; скорость $C = C_R + iC_I$ — комплексная величина; C_R — фазовая скорость волны; αC_I — временной инкремент волны (значения $C_I > 0$ соответствуют росту возмущений).

Подставляя приведенные выше соотношения в уравнения (3.1), (3.2) и линеаризуя их относительно возмущений H , Q_j , M_j , получаем

$$\left(i\alpha(2E_j - C) + \frac{\omega_j^2}{\text{Re}_m} \right) Q_{ja} + i\beta E_j M_a = \frac{2}{\omega_j^2} \left(\frac{9 \sin \theta}{\text{Re}_m} + i\alpha \left(E_j^2 - \frac{3 \cos \theta}{\text{Re}_m} - \text{We} k^2 \right) \right) H_a; \quad (3.3)$$

$$\left(i\alpha(E_j - C) + \frac{\omega_j^2}{\text{Re}_m} \right) M_{ja} = \frac{2}{\omega_j^2} \left(-\frac{3 \cos \theta}{\text{Re}_m} - \text{We} k^2 \right) i\beta H_a; \quad (3.4)$$

$$-\alpha C H_a + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha Q_{ja} + \beta M_{ja}) = 0. \quad (3.5)$$

Умножая уравнение (3.3) на α , уравнение (3.4) на β и складывая их, находим

$$\alpha Q_{ja} + \beta M_{ja} = \frac{2}{\omega_j^2} \frac{3\alpha E_j + i \text{Re}_m \alpha^2 D_j / \omega_j^2}{1 + i\alpha \text{Re}_m (2E_j - C) / \omega_j^2} H_a. \quad (3.6)$$

Здесь $E_j = 3 \sin \theta / \omega_j^2$; $D_j = E_j^2 - B$; $B = 3 \cos \theta (1 + \beta^2 / \alpha^2) / \text{Re}_m + \text{We} \alpha^2 (1 + \beta^2 / \alpha^2)^2$.

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем дисперсионное уравнение для комплексной скорости

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^2} \frac{3E_j + i\alpha \operatorname{Re}_m D_j/\omega_j^2}{1 + i\alpha \operatorname{Re}_m(2E_j - C)/\omega_j^2}. \quad (3.7)$$

В случае двумерных волн ($\beta = 0$) в асимптотике $\alpha \operatorname{Re}_m \ll 1$ из (3.7) следует

$$C_R = 3 \sin \theta, \quad C_I = \alpha \operatorname{Re}_m \left(\frac{41}{35} \sin^2 \theta - \frac{\cos \theta}{\operatorname{Re}_m} - \frac{\operatorname{We} \alpha^2}{3} \right).$$

Отсюда находим критическое число Рейнольдса $\operatorname{Re}_* = (35/41) \operatorname{ctg} \theta$, близкое к значению $\operatorname{Re}_* = (5/6) \operatorname{ctg} \theta$, полученному из уравнения Орра — Зоммерфельда (различие составляет 2,5 %).

3.2. *Нейтральная кривая для трехмерных волн в асимптотике $\alpha \operatorname{Re}_m \ll 1$.* В случае трехмерных волн уравнение нейтральной кривой получаем, подставляя в (3.7) $C_R = 3 \sin \theta$, $C_I = 0$:

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j - 3E_j(2E_j - 3 \sin \theta)}{\omega_j^4}.$$

Подставляя в это соотношение выражения для E_j , D_j , B и значения сумм

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^8} = \frac{17}{630}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^6} = \frac{1}{15}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{1}{6},$$

запишем уравнение нейтральной кривой в виде

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\operatorname{Re}_m} \cos \theta + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{3} \operatorname{We} = \frac{41\alpha^2}{35} \sin^2 \theta. \quad (3.8)$$

В случае вертикальной пленки область неустойчивости в координатах (α, β) ограничена полуокружностью $(\alpha - \alpha_n/2)^2 + \beta^2 = (\alpha_n/2)^2$ и осью α ($\alpha_n = \sqrt{123/(35 \operatorname{We})}$ — нейтральное волновое число для двумерных волн). Отметим, что для IBL-модели уравнение нейтральной кривой имеет вид

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\operatorname{Re}_m} \cos \theta + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{3} \operatorname{We} = \alpha^2 \sin^2 \theta. \quad (3.9)$$

и отличается от (3.8) только коэффициентом 41/35. Из (3.8), (3.9) следует, что в предлагаемой модели область неустойчивости является более широкой, чем в IBL-модели.

4. Численное моделирование волн в стекающей пленке. На основе предлагаемой модели разработан численный алгоритм расчета двумерных и трехмерных волн в пленке жидкости.

4.1. *Двумерные волны. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.* В [17, 18] проведено численное моделирование двумерных периодических волн в стекающей пленке. В расчетах волны генерировались малым возмущением расхода на входе $q(0, t) = q_0(1 + Q_a \sin(2\pi ft))$ (Q_a — малая амплитуда; f — заданная частота колебаний расхода). Профиль скорости на входе задавался в виде (1.8). При умеренных значениях числа Рейнольдса результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [19, 20] для различных жидкостей. Модель достаточно точно описывает форму нелинейных солитоноподобных волн включая амплитуду капиллярного предвестника. На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов, соответствующих условиям экспериментов [21] (водоглицериновый раствор, длина волны $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-2}$ м, $\operatorname{Re} = 12,4$). В расчетах малые

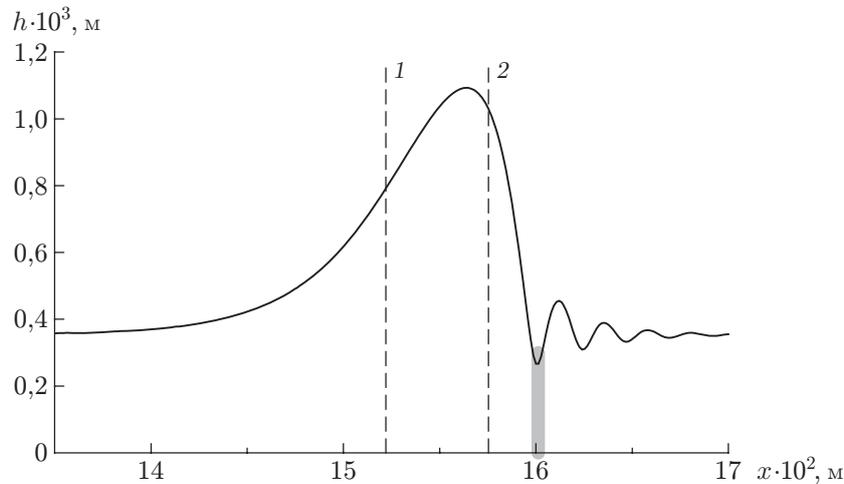


Рис. 1. Профиль нелинейной развитой волны ($\lambda = 3,6 \cdot 10^{-2}$ м, $Re = 12,4$):
1, 2 — контрольные сечения в области пика, заштрихованная область — зона минимума

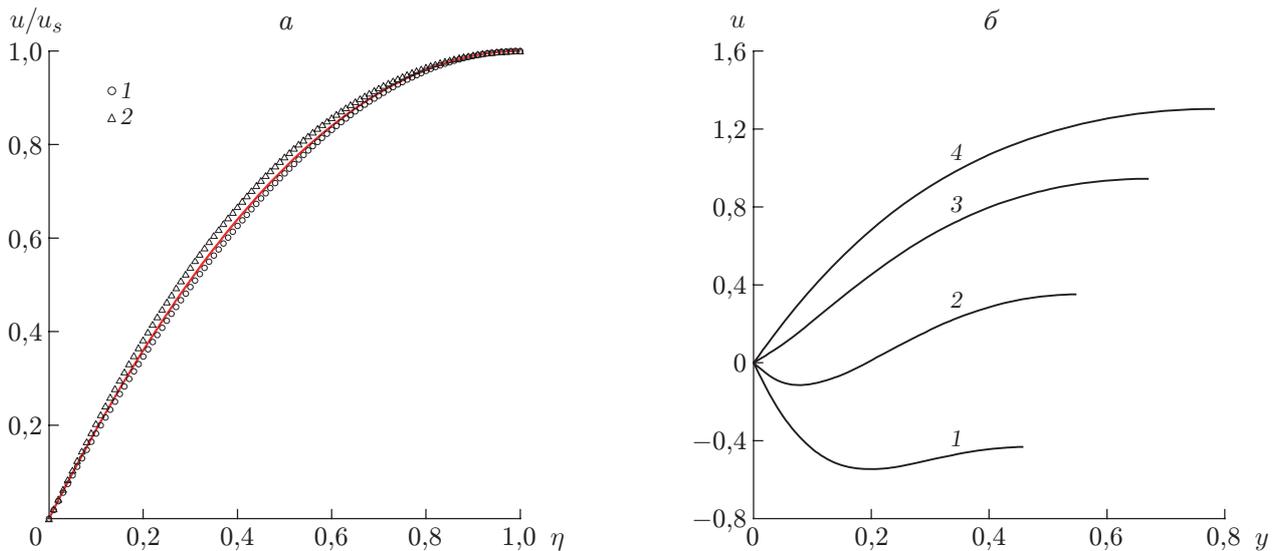


Рис. 2. Профили скорости волны, показанной на рис. 1:
a — скорость, нормированная на u_s (1 — скорость в сечении 1, 2 — скорость в сечении 2, сплошная линия — автомодельный профиль); *б* — безразмерная скорость в зоне минимума при различных значениях координаты x (1 — $x = 16,013 \cdot 10^{-2}$ м, 2 — $x = 16,04 \cdot 10^{-2}$ м, 3 — $x = 16,067 \cdot 10^{-2}$ м, 4 — $x = 16,12 \cdot 10^{-2}$ м)

возмущения расхода на входе на расстоянии, равном 4–5 длинам волны, развиваются в нелинейные солитоноподобные волны большой амплитуды, которые распространяются со скоростью 0,428 м/с (в эксперименте — 0,46 м/с). В расчете для максимальной толщины пленки получено значение $1,1 \cdot 10^{-3}$ м (в эксперименте — $1,12 \cdot 10^{-3}$ м). На рис. 1 показан профиль развитой волны. Цифрами обозначены сечения в области пика, для которых на рис. 2, *a* приведены расчетные профили скорости. На рис. 2, *a* видно, что в области максимальной толщины пленки профиль скорости незначительно отличается от автомодельного профиля (1.8). Эти данные согласуются с результатами измерения скорости методом стробоскопической визуализации частиц [21]. На рис. 2, *б* видно, что в окрестности минимума профиль скорости существенно отличается от автомодельного. Скорость может быть даже

отрицательной во всем сечении пленки (кривая 1) или только вблизи стенки (кривая 2). В опытах [21] не была зафиксирована отрицательная скорость, что объясняется малой протяженностью участка с отрицательными значениями скорости. Знакопеременный характер профиля скорости в точке минимума толщины пленки неоднократно зафиксирован в численных расчетах волн большой амплитуды и подтвержден в экспериментах [20]. Отметим, что в расчетах по IBL-модели расход жидкости в точке минимума толщины пленки также отрицателен, но при этом скорость отрицательна во всем сечении (вследствие автотомельности профиля скорости).

4.2. *Эволюция локализованной трехмерной волны в стекающей пленке.* С использованием предлагаемой модели проведено исследование эволюции локализованного трехмерного возмущения на вертикально стекающей пленке. В [8, 9] этот процесс изучен теоретически, а в [10] получено его описание на основе экспериментов. В опытах локализованное трехмерное возмущение создавалось путем метания капли жидкости на поверхность пленки.

В проведенных расчетах, так же как и в [9], задавались начальное возмущение толщины в виде симметричного холма (“капли”) на поверхности пленки:

$$h(x, z, 0) = 1 + A \exp(-((x - a)^2 + z^2)/b^2) \quad (4.1)$$

и невозмущенные значения расходов:

$$q_j(x, z, 0) = q_{0,j}, \quad m_j(x, z, 0) = 0.$$

Здесь A — амплитуда возмущения; b — пространственный масштаб холма; a — координата вершины холма. Уравнения (3.1), (3.2) решались конечно-разностным методом. С учетом симметрии задачи относительно оси Oz расчетная область представляла собой прямоугольник $0 < x < X_{end}$, $0 < z < Z_{end}$. Значение X_{end} выбиралось достаточно большим, что позволяло проследить развитие возмущения вниз по потоку. При численном решении задавалась равномерная сетка с шагами $\Delta x = X_{end}/N_x$, $\Delta z = Z_{end}/N_z$ и координатами узлов $x_i = (i - 1)\Delta x$, $z_k = (k - 1)\Delta z$, $i = 1, 2, 3, \dots, N_x + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots, N_z + 1$. Уравнения (3.1), (3.2) записывались в разностном виде с помощью неявной схемы:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{i,k}^j &= q_{i,k}^j + \Delta t \left(\frac{2\bar{h}_{i,k}}{\omega_j^2} \left(\frac{3A_{i,k}}{\text{Re}_m} + \text{We } B_{i,k} \right) - \frac{\omega_j^2 \bar{q}_{i,k}^j}{\text{Re}_m \bar{h}_{i,k}^2} - \frac{\omega_j^2}{2} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qm}{h} \right)_{i,k}^j} \right), \\ \bar{m}_{i,k}^j &= m_{i,k}^j + \Delta t \left(\frac{2\bar{h}_{i,k}}{\omega_j^2} \left(\frac{3F_{i,k}}{\text{Re}_m} + \text{We } G_{i,k} \right) - \frac{\omega_j^2 \bar{m}_{i,k}^j}{\text{Re}_m \bar{h}_{i,k}^2} - \frac{\omega_j^2}{2} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{m^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{qm}{h} \right)_{i,k}^j} \right), \\ \bar{h}_{i,k} &= h_{i,k} - \Delta t \sum_{j=1}^M \overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} \right)_{i,k}^j}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{i,k} &= \sin \theta - \cos \theta \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i,k}}, & B_{i,k} &= \overline{\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial z^2} \right)_{i,k}}, \\ F_{i,k} &= -\cos \theta \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)_{i,k}}, & G_{i,k} &= \overline{\left(\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial x^2} \right)_{i,k}}, \end{aligned}$$

$j = 1, 2, 3, \dots, M$; Δt — шаг по времени; M — число гармоник (в расчетах использовалось 5–6 гармоник); черта сверху соответствует значениям на новом временном слое. Значения

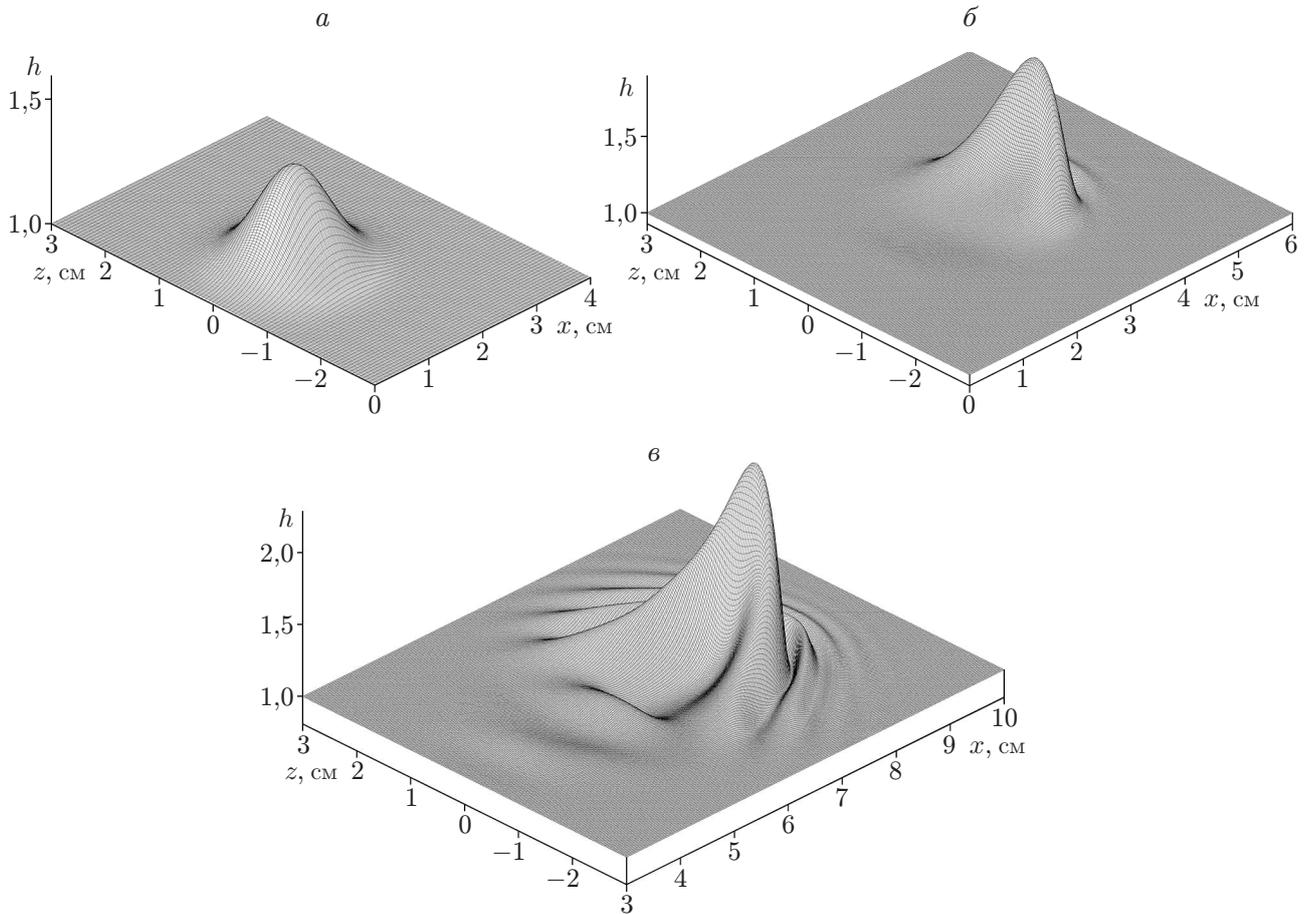


Рис. 3. Поверхность пленки в различные моменты времени:
 а — $t = 0$, б — $t = 0,75$, в — $t = 1,75$

$\bar{q}_{i,k}^j$, $\bar{m}_{i,k}^j$, $\bar{h}_{i,k}$ вычислялись по формулам (4.2) методом итераций (в правую часть подставлялись значения, найденные на предыдущей итерации). Сходимость итераций обеспечивалась выбором малого шага по времени. Для начала итераций выбирались значения на предыдущем временном слое. Производные $\partial q/\partial x$, $\partial m/\partial z$ аппроксимировались центральными разностями, производные $\partial(q^2/h)/\partial x$, $\partial(qm/h)/\partial x$ — разностью “против потока”. На границе $z = Z_{end}$ задавались условия невозмущенного течения $q_j = q_{0,j}$, $m_j = 0$, $\partial/\partial z = 0$. Значение Z_{end} выбиралось достаточно большим, что позволяло исключить влияние границ на результаты расчета. На границе $x = 0$ ставились условия невозмущенного течения, на границе $x = X_{end}$ никакие дополнительные условия не задавались, так как искомые функции h , q , m вычислялись с помощью численной схемы.

4.3. *Результаты расчетов трехмерных волн.* На рис. 3 показана эволюция начального возмущения (4.1) на вертикальной пленке воды при $Re = 10$, $A = 0,4$, $b = 0,7 \cdot 10^{-2}$ м. Эти параметры выбраны таким образом, чтобы начальное возмущение эволюционировало в одногорбую трехмерную волну. Известно, что при малой амплитуде A начальное возмущение трансформируется в волновой цуг, а подковообразный солитон реализуется только при определенных значениях параметров.

На рис. 3 видно, что первоначально симметричный холм эволюционирует в подковообразную волну с крутым передним и пологим задним склонами. На начальной стадии быстро увеличиваются высота холма и скорость его распространения, а перед ним развивается капиллярный предвестник (см. рис. 3,б). В дальнейшем увеличение амплитуды

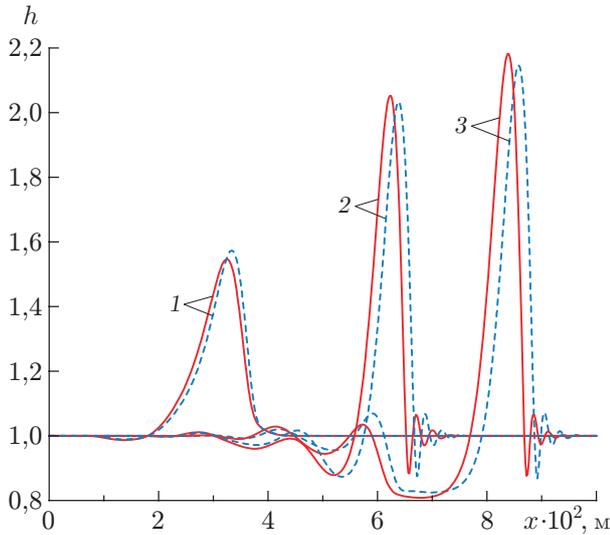


Рис. 4

Рис. 4. Профили пленки при $z = 0$ в различные моменты времени: 1 — $t = 0,5$, 2 — $t = 1,25$, 3 — $t = 1,75$; сплошные линии — расчет по предложенной модели, штриховые — расчет по IBL-модели

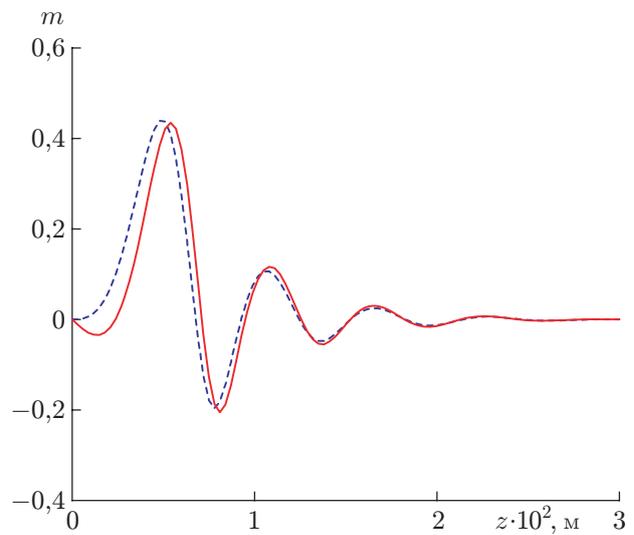


Рис. 5

Рис. 5. Распределение расхода жидкости в поперечном направлении $m(z)$ вблизи вершины подковообразной волны в момент времени $t = 1,75$: сплошная линия — расчет по предложенной модели, штриховая — расчет по IBL-модели

и скорости распространения подковообразной волны существенно замедляется, а ее форма почти не меняется. Область подковообразного капиллярного предвестника постепенно расширяется в поперечном направлении (см. рис. 3, в). Отметим, что показанная на рис. 3 волна не является уединенной, подобной солитонам в расчетах [5, 8, 9]. Из рис. 3 следует, что в следе основной волны развивается вторая волна, амплитуда которой растет значительно медленнее. Со временем за второй волной формируется третья волна и т. д. Каждая последующая волна развивается и движется медленнее, чем предыдущая. На рис. 4 показаны профили пленки на оси симметрии ($z = 0$) в различные моменты времени, полученные с использованием предлагаемой модели и IBL-модели. На рис. 5 представлено распределение расхода жидкости в поперечном направлении $m(z)$ вблизи вершины первичной подковообразной волны в момент времени $t = 1,75$. Из рис. 4, 5 следует, что результаты расчетов по обеим моделям качественно хорошо согласуются, но имеется некоторое количественное различие. В частности, представленная модель дает несколько меньшую скорость распространения и несколько большую амплитуду подковообразной волны, чем IBL-модель. Примерно такое же различие с IBL-моделью наблюдается для расхода в поперечном направлении $m(z)$.

Заключение. Разработанная в [16] модель волнового течения стекающей пленки вязкой жидкости обобщена на случай трехмерного течения с учетом касательного напряжения, действующего на поверхности пленки. Предложенная модель, основанная на разложении скорости в ряд по линейно независимым базисным функциям (гармоникам), является обобщением IBL-модели, но в отличие от нее имеет большую “степень свободы” для формы профиля скорости. Расчеты, выполненные для двумерных волн в стекающей пленке, показали, что профиль скорости в волне близок к параболическому, за исключением зоны капиллярной ряби, в которой он существенно отличается от автоматического профиля. Предложенная модель предсказывает знакопеременный профиль скорости в зоне капилляр-

ной ряби, что подтверждается результатами прямого численного моделирования на основе уравнений Навье — Стокса [20, 22]. На примере задачи об эволюции локализованного трехмерного возмущения в стекающей пленке показано, что данная модель применима для описания трехмерных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеенко С. В.** Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
2. **Chang H.-C.** Complex wave dynamics on thin films / H.-C. Chang, E. A. Demekhin. Amsterdam: Elsevier, 2002.
3. **Шкадов В. Я., Демехин Е. А.** Волновые движения пленок жидкости на вертикальной поверхности // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 2. С. 3–65.
4. **Kalliadasis S.** Falling liquid films / S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, M. G. Velarde. L.: Springer, 2012.
5. **Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.** Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // Докл. АН. 1978. Т. 238, № 6. С. 1321–1323.
6. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 21–27.
7. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** Трехмерные стационарные бегущие волны на вертикально стекающей пленке жидкости // ПМТФ. 1986. № 6. С. 35–43.
8. **Калайдин Е. Н., Власкин С. Ю., Демехин Е. А., Каллиадасис С.** О трехмерных солитонах в стекающей пленке жидкости // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 5. С. 44–46.
9. **Demekhin E. A., Kalaidin E. N., Selin A. S.** Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. 3. Experiment and model validation // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 092103.
10. **Alekseenko S. V., Antipin V. A., Guzanov V. V., et al.** Three-dimensional solitary waves on falling liquid film at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2005. V. 17. 121704.
11. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
12. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
13. **Ruyer-Quil C., Manneville P.** Improved modeling of flows down inclined planes // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 15. P. 357–369.
14. **Алексеенко С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю.** Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 1. С. 1–4.
15. **Архипов Д. Г., Качулин Д. И., Цвелодуб О. Ю.** Сравнение моделей волновых режимов стекания пленок жидкости в линейном приближении // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 19–29.
16. **Актершев С. П., Алексеенко С. В.** Модель волнового течения стекающей пленки вязкой жидкости // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 21–31.
17. **Aktershev S. P., Alekseenko S. V.** New model for waves in a falling film // Proc. of the IUTAM Symp. on waves in fluids 2012 “Effects of nonlinearity, rotation, stratification and dissipation”, Moscow, 18–22 June 2012. Moscow: Elsevier, 2013. V. 8. P. 3–12.
18. **Актершев С. П., Алексеенко С. В.** Волны в стекающей пленке жидкости // Современ. наука: исслед., идеи, результаты, технологии. 2012. № 2. С. 73–78.
19. **Liu J., Gollub J. P.** Solitary wave dynamics of film flows // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 5. P. 1702–1711.

20. **Dietze G. F., Sibai F. A., Kneer R.** Experimental study of flow separation in laminar falling liquid films // J. Fluid Mech. 2009. V. 637. P. 73–104.
21. **Alekseenko S. V., Nakoryakov V. Ye., Pokusaev B. G.** Wave formation on a vertical falling liquid film // AIChE J. 1985. V. 31, N 9. P. 1446–1460.
22. **Malamataris N. A., Balakotaiah V.** Flow structure underneath the large amplitude waves of a vertically falling film // AIChE J. 2008. V. 54, N 7. P. 1725–1740.

Поступила в редакцию 4/XII 2013 г.
