О ПРИМЕНЕНИИ ЯЧЕЕЧНОЙ МОДЕЛИ К РАСЧЕТУ ВЯЗКОСТИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В. М. Сафрай

(Москва)

При анализе процессов в концентрированных дисперсных системах нельзя не учитывать влияния возмущений, вносимых каждой частицей в гидродинамическое поле дисперсионной среды, на движение остальных частиц. Учет такого влияния можно провести в рамках «ячеечной» модели, неоднократно применявшейся для исследования дисперсных систем, а также в кинетической теории плотных газов[1-3]. При значительных концентрациях наиболее существенными становятся только силы взаимодействия частицы с соседними, т. е. имеет место эффективное «экранирование» гидродинамического взаимодействия выделенной частицы с удаленными. Согласно ячеечной модели каждой сферической частице радиуса a отвечает гипотетическая поверхность («ячейка»), которую в первом приближении можно считать концентрической сферой радиуса $b > a$, причем возмущения потока, вызванные остальными частицами, влияют на обтекание выделенной частицы лишь через посредство граничных условий на поверхности ячейки. Ниже на основе этой модели получены выражения для эффективного коэффициента вязкости дисперсной системы при различных формах граничных условий на поверхности ячейки, отличающихся от использованных в [4]. При этом в отличие от [1], где рассматривались суспензии твердых частиц, полученные здесь результаты относятся к случаю, когда включения не являются твердыми.

Пусть сферическая частица помещена в поток несжимаемой жидкости, описываемый распределением скоростей $v_i^{(0)} = \alpha_{ij}x_j$, где α_{ij} — постоянный симметричный тензор градиентов скорости, след которого $\alpha_{ii} = 0$ в силу уравнения неразрывности [5]. Решение гидродинамической задачи стоксова обтекания жидкой частицы этим потоком имеет вид [4]

$$\mathbf{v}^{(1)} = (2A + Br^{-5} + 5Cr^{-7})\,(\mathbf{v}^{(0)}\,\mathbf{r})\,\mathbf{r} + (-5Ar^2 - 2Cr^{-5} + D)\,\mathbf{v}^{(0)}$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = 2A'\,(\mathbf{v}^{(0)}\mathbf{r})\,\mathbf{r} + (-5A'r^2 + D')\,\mathbf{v}^{(0)} \tag{1}$$

$$p^{(1)} = \mu_1\,(-21A + 2Br^{-5})\,(\mathbf{v}^{(0)}\mathbf{r}), \qquad p^{(2)} = -21\mu_2 A'\,(\mathbf{v}^{(0)}\mathbf{r}) + p_\sigma$$

(центр частицы помещен в начало координат). Здесь $\mathbf{v}^{(1)}$, $p^{(1)}$, μ_1 и $\mathbf{v}^{(2)}$, $p^{(2)}$, μ_2 — скорость, давление и вязкость вне и внутри частицы соответственно; A, B, C, D, A', D' — произвольные постоянные; смысл величины p_σ подробно обсуждается в [4].

Принимая во внимание уравнения движения в напряжениях

$$\partial\sigma_{ij}\,/\,\partial x_j = 0,$$

имеющие место как вне, так и внутри частицы, воспользуемся тождеством

$$\sigma_{ik} = \partial\,(\sigma_{ij}x_k)\,/\,\partial x_j,$$

что позволяет применить теорему Остроградского — Гаусса при вычислении среднего по объему системы значения тензора напряжений $\langle\sigma_{ik}\rangle$

$$\langle\sigma_{ik}\rangle = \frac{1}{V_0}\int\limits_{V_0}\sigma_{ik}\,dV = \frac{3}{4\pi b^4}\oint\limits_{r=b}\sigma_{ij}^{(1)}x_jx_k\,dS = \alpha_{ik}\mu_1\,(-8.4\,Ab^2 - 1.2Bb^{-3} + 2D) \tag{2}$$

где V_0 — объем ячейки. (Здесь использована непрерывность вектора $\sigma_{ij}x_j$ при переходе через поверхность частицы $r = a$.) Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\left\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right\rangle = \frac{1}{V_0}\int\limits_{V_0}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dV = \alpha_{ik}\,(-8.4Ab^2 + 0.8Bb^{-3} + 2D)$$

Из двух последних выражений вытекает формула для скалярной эффективной вязкости дисперсной системы

$$\mu = \mu_1\,[1 + 5B\,/\,(21Ab^5 - 2B - 5Db^3)] \tag{3}$$

(Заметим, что в [4] вместо (2) было получено несколько иное выражение вследствие некорректно выполненного осреднения тензора напряжений.)

На поверхности частицы должны выполняться следующие условия: непрерывность вектора скорости, обращение в нуль нормальных составляющих скоростей и непрерывность касательных и нормальных напряжений. При этом величина p_σ из (1) входит лишь в последнее условие (подробнее см. [4]).

Относительно граничного условия на поверхности ячейки $r = b$ в литературе существует ряд мнений, связанных с различными точками зрения на ячеечную модель. Рассмотрим три подхода к этому вопросу.

1. Пусть на поверхности ячейки $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(0)}$. Этим условием пользовался, например, Р. Симха [1] при вычислении вязкости концентрированных суспензий твердых шариков. Привлекая это условие для замыкания алгебраической системы уравнений для неизвестных констант и вводя $\varkappa = \mu_2 / \mu_1$, $\xi = a / b$, получаем

$$\mu(\xi, \varkappa) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{10\varkappa + 4 - 10\xi^7(\varkappa - 1)}{4(\varkappa + 1) - 5\xi^3(5\varkappa + 2) + 42\xi^5\varkappa - 5\xi^7(5\varkappa - 2) + 4\xi^{10}(\varkappa - 1)}\right] \quad (4)$$

В предельном случае $\varkappa \to \infty$ это выражение примет вид

$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{10(1 - \xi^7)}{4 - 25\xi^3 + 42\xi^5 - 25\xi^7 + 4\xi^{10}}\right] \quad (5)$$

что совпадает с формулой, полученной Симха. В предельном случае $\varkappa \to 0$, отвечающем пузырькам газа, имеем

$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{2 + 5\xi^7}{2 - 5\xi^3 + 5\xi^7 - 2\xi^{10}}\right] \quad (6)$$

2. Пусть на поверхности ячейки выполняется скалярное условие $v_r^{(1)} = v_r^{(0)}$ и, сверх того, между соседними ячейками отсутствуют касательные напряжения, обусловленные вносимыми присутствием частиц возмущениями основного потока [2].

В этом случае получаем

$$\mu(\xi, \varkappa) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{25\varkappa + 10 + 10\xi^7(\varkappa - 1)}{10(\varkappa + 1) - 2\xi^3(5\varkappa + 2) - 21\xi^5\varkappa + 5\xi^7(5\varkappa - 2) - 4\xi^{10}(\varkappa - 1)}\right] \quad (7)$$

При $\varkappa \to \infty$

$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{25 + 10\xi^7}{10(1 - \xi^3) - 21\xi^5 + 25\xi^7 - 4\xi^{10}}\right] \quad (8)$$

При $\varkappa \to 0$

$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{5}{5 - 2\xi^3}\right] \quad (9)$$

3. Таким образом, на поверхности ячейки накладывается два условия, из которых более естественным с физической точки зрения является условие обращения в нуль нормальной компоненты возмущения скорости. В [4] была сделана попытка обойтись при $r = b$ именно этим одним граничным условием. При этом, однако, число фигурирующих в (1) постоянных на единицу превышает число граничных условий. Для преодоления этой трудности в [4] выдвигается требование, чтобы решение линейной гидродинамической задачи о возмущении основного течения суспендированной частицей состояло из двух аддитивных частей: невозмущенного течения в отсутствие сферы $\alpha_{ij}x_j$ и обусловленного присутствием частицы течения, которое не содержало бы компонент, пропорциональных основному течению. Полагая в силу этого допущения $D = 1$ всюду в граничных условиях и находя константы A и B, получаем из (3)

$$\mu(\xi, \varkappa) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{5(5\varkappa + 2) + 10\xi^7(\varkappa - 1)}{10(\varkappa + 1) + 5\xi^3(5\varkappa + 2) - 56\xi^5\varkappa + 5\xi^7(5\varkappa - 2) - 4\xi^{10}(\varkappa - 1)}\right] \quad (10)$$

При $\varkappa \to \infty$

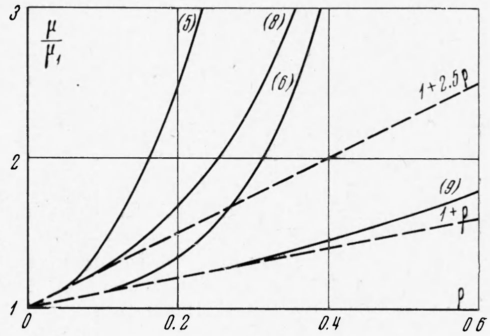
$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{25 + 10\xi^7}{10 + 25\xi^3 - 56\xi^5 + 25\xi^7 - 4\xi^{10}}\right] \quad (11)$$

При $\varkappa \to 0$

$$\mu(\xi) = \mu_1 \left[1 + \xi^3 \frac{1 - \xi^7}{1 + \xi^3 - \xi^7 + 0.4\xi^{10}}\right] \quad (12)$$

Следует отметить, однако, что этот подход, оправданный в случае обтекания одиночной частицы неограниченным потоком, представляется недостаточно обоснованным в рассматриваемом случае.

Необходимо иметь в виду, что в формулах (4) — (12) вязкость выражается через отношение радиуса частицы к радиусу ячейки. Зависимость вязкости от объемной концентрации включений возникает из-за того, что радиус ячейки меняется с изменением концентрации. Вообще говоря, $b \sim a\rho^{-1/3}$, однако вряд ли можно указать точное значение радиуса ячейки, которое годилось бы во всем диапазоне концентраций, тем более что само предположение о сферичности ячейки является весьма грубым. В первом приближении можно принять $b = a\rho^{-1/3}$, что соответствует отождествлению объема ячейки с удельным объемом частицы в системе. В этом (и только в этом) случае при малых концентрациях выражения (4), (7), (10) переходят в формулу, полученную Тейлором для разбавленных эмульсий сферических капель одной вязкой жидкости в другой; выражения (5), (8), (11) переходят в известную формулу Эйнштейна, а (6), (9), (12) — в формулу Гута и Марка для слабоконцентрированной дисперсии пузырьков газа в вязкой жидкости [6]. Графики зависимостей (5), (6), (8), (9), отвечающие $\xi^3 = \rho$, представлены на фигуре, из которой, в частности, видно, что кривые, соответствующие случаю 2, совпадают с зависимостями Эйнштейна и Гута и Марка в несколько более широком диапазоне концентраций; однако отдать предпочтение какой-нибудь из упомянутых моделей затруднительно.



Отметим, что полученные здесь соотношения описывают лишь ту часть полного переноса импульса в системе, которая зависит только от искривлений линий тока жидкости при обтекании ею решетки неподвижных частиц. В действительности в дисперсных системах имеется перенос импульса, связанный с хаотическими пульсациями частиц и жидкости. Поэтому вычисленная здесь вязкость совпадает с эффективной вязкостью дисперсной системы лишь в случаях, когда пульсации частиц незначительны. Более подробное обсуждение может быть найдено в [4].

В заключение следует подчеркнуть, что эффективная вязкость определяется как коэффициент пропорциональности между средним по объему системы значением тензора напряжений и средним значением тензора градиентов скоростей, а не между $\langle\sigma_{ik}\rangle$ и $2\alpha_{ik}$, как это сделано в недавней работе [8], где повторяются проделанные в [5] вычисления вязкости разбавленных суспензий, но безосновательно предлагается заменить в формуле Эйнштейна неоднократно подтвержденный многими авторами член 2.5ρ на 1.5ρ.

Автор благодарит Ю. А. Буевича за обсуждение результатов работы.

Поступила 18 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. S i m h a R. A treatment of the viscosity of concentrated suspensions. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, № 9. p. 1020.
2. H a p p e l J. Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particles. A. I. Ch. E. Journal, 1958, vol. 4, № 2. p. 197.
3. Б у е в и ч Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
4. Б у е в и ч Ю. А., С а ф р а й В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.
5. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред, § 22. М., Гостехиздат, 1954.
6. Р е й н е р М. Реология. М., «Наука», 1965.
7. Реология. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. П о к р о в с к и й В. Н. Уточнение результатов теории вязкости суспензий. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2.