УДК 539.376
DOI: 10.15372/PMTF202215202

ВЛИЯНИЕ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ НА РАСХОД В ОДНОМЕРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ СРЕД

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Исследуются течения несжимаемых сред с тензорно-линейными определяющими соотношениями, включающими произвольную скалярную нелинейность в виде монотонно возрастающей функции упрочнения. Выделяются два типа сред: без предела текучести (нелинейно-вязкие жидкости) и с пределом текучести (вязкопластические тела), причем среды второго типа интерпретируются как конечные возмущения соответствующих сред первого типа. На примере задачи об одномерном стационарном сдвиговом течении в круглой трубе показано влияние способа возмущения предела текучести на максимальную скорость и расход. Значения этих величин зависят от знака второй производной функции упрочнения, т. е. от того, каким материалом является невозмущенная среда: псевдопластичным или упрочняющимся.

Ключевые слова: нелинейно-вязкая среда, предел текучести, вязкопластическая среда, интенсивность тензора, функция упрочнения, течение в круглой трубе, расход, среды с мягкой и жесткой характеристиками

Одним из направлений развития теории устойчивости процессов деформирования является исследование устойчивости материальных функций, входящих в определяющие соотношения, к бесконечно малым либо конечным возмущениям [1, 2]. К числу таких возмущений относятся вариации предела текучести в нелинейно-вязких течениях [3] и вариации вязкости при идеально пластическом деформировании [4]. В этом случае неустойчивость интерпретируется как изменение характера течения невозмущенной среды вследствие смены типа задачи, появления жестких зон, скачкообразного изменения интегральных характеристик течений.

В данной работе на примере несжимаемых сред с тензорно-линейными определяющими соотношениями, включающими скалярную нелинейность, и задачи об одномерном продольном сдвиговом течении в круглой трубе исследуется влияние различных возмущений предела текучести в нелинейно-вязкой модели на максимальную скорость и расход.

1. Тензорно-линейные определяющие соотношения с произвольной скалярной нелинейностью. Рассмотрим процесс деформирования несжимаемых сплошных сред с определяющими соотношениями [5]

$$\tilde{s} = \frac{\sigma_{int}(v_{int})}{v_{int}}\,\tilde{v}, \qquad v_{int} > 0, \tag{1.1}$$

связывающими девиатор $\tilde{s}$ тензора напряжений $\tilde{\sigma} = \tilde{s} + p\tilde{I}$ с тензором скоростей деформаций $\tilde{v}$. В (1.1) $\tilde{I}$ — единичный тензор второго ранга; p — давление; $v_{int} = \sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{v}^2)}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00077).

$\sigma_{int} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\tilde{s}^2)}$ — интенсивности скоростей деформации и напряжений, являющиеся квадратичными инвариантами тензоров $\tilde{v}$, $\tilde{s}$ соответственно. Соотношения (1.1) тензорно-линейны (согласно терминологии [6] квазилинейны), в силу того что безразмерные единичные направляющие $\tilde{s}/\sigma_{int}$ и $\tilde{v}/v_{int}$ совпадают.

Вообще говоря, нелинейная зависимость $\sigma_{int} = \sigma_{int}(v_{int})$, входящая в (1.1) и называемая скалярным определяющим соотношением среды, является экспериментально определяемой материальной функцией. Эта функция не зависит от вида напряженно-деформированного состояния, поэтому для ее нахождения достаточно проведения простых экспериментов, например на одномерный сдвиг.

Нелинейно-вязкие жидкости, или среды без предела текучести, характеризуются скалярным соотношением вида

$$\sigma_{int} = F(v_{int}), \tag{1.2}$$

где функция упрочнения $F(v_{int})$ имеет следующие свойства: 1) $\lim\limits_{v_{int}\to 0^+} F(v_{int}) = 0$; 2) $F(v_{int})$ монотонно возрастает при $v_{int} > 0$. Введем обратную материальную функцию

$$v_{int} = F^{-1}(\sigma_{int}) \equiv G(\sigma_{int}), \tag{1.3}$$

обладающую теми же свойствами, что и функция $E(v_{int})$: 1) $\lim\limits_{\sigma_{int}\to 0^+} G(\sigma_{int}) = 0$; 2) $G(\sigma_{int})$ монотонно возрастает при $\sigma_{int} > 0$.

Наряду с нелинейно-вязкими жидкостями с функцией упрочнения $F(v_{int})$ будем рассматривать вязкопластические среды, или среды с пределом текучести $\sigma_s > 0$ вида (1.1), но со скалярным определяющим соотношением $\sigma_{int} = \sigma_{int}(v_{int})$, таким что $\lim\limits_{v_{int}\to 0^+} \sigma_{int} = \sigma_s$. В течениях таких сред во всей области, занятой материалом, имеются заранее неизвестные жесткие зоны, в которых $\sigma_{int} < \sigma_s$, $v_{int} \equiv 0$, и тензорная связь (1.1) отсутствует.

Положим, что скалярное соотношение $\sigma_{int} = \sigma_{int}(v_{int})$ для выбранной вязкопластической среды с пределом текучести σ_s является в феноменологическом смысле конечным возмущением соотношения (1.2), задающего некоторую нелинейно-вязкую жидкость (без предела текучести). Появление предела текучести в такой жидкости может быть вызвано механическим, термодинамическим, электромагнитным, биохимическим воздействием на нее. Исследуем известный в реологии крови [7, 8] процесс образования в относительно однородной плазме монетных эритроцитных столбиков, сцепляющихся друг с другом, электризующихся и уплощающих профиль продольного кровотока в центральной части сосуда. Такое уплощение можно моделировать, вводя в модель предела текучести (в данном случае достаточно малого) всей среды плазма — эритроциты. Не моделируя подробно указанные явления, в рамках феноменологического подхода приведем два возможных вида функции $\sigma_{int}(v_{int})$, график которой на плоскости (v_{int}, σ_{int}) должен проходить через точку $(0, \sigma_s)$, несмотря на то что график $F(v_{int})$ заведомо через эту точку не проходит:

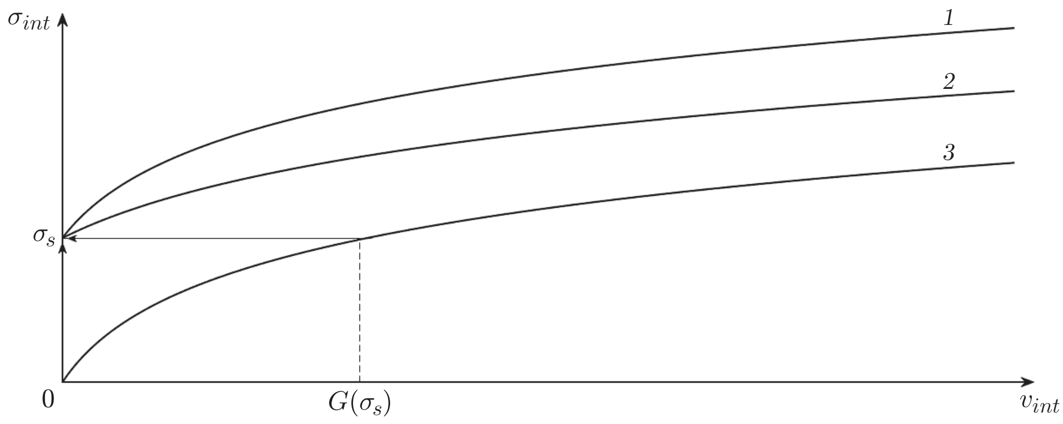
1) при сдвиге графика $\sigma_{int} = F(v_{int})$ вверх на величину, равную σ_s (см. рисунок),

$$\sigma_{int}^{\{1\}} = \sigma_s + F(v_{int}), \qquad v_{int} > 0; \tag{1.4}$$

2) при сдвиге графика $\sigma_{int} = F(v_{int})$ влево на величину, равную $G(\sigma_s)$,

$$\sigma_{int}^{\{2\}} = F(v_{int} + G(\sigma_s)), \qquad v_{int} > 0. \tag{1.5}$$

Очевидно, что $\sigma_{int}^{\{1\}} = \sigma_{int}^{\{2\}}$ только в том случае, если $F(v_{int})$ — линейная функция, т. е. невозмущенная вязкая среда является ньютоновской жидкостью с коэффициентом динамической вязкости μ. Здесь и далее верхние индексы "$\{1\}$" и "$\{2\}$" у характеристик



Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности скорости деформации:
1 — функция (1.4), *2* — функция (1.5), *3* — функция (1.2)

рассматриваемых вязкопластических течений, например максимальной скорости и расхода, соответствуют средам со скалярными определяющими соотношениями (1.4) и (1.5). Ниже рассматривается простое с точки зрения получения аналитических решений одномерное сдвиговое стационарное течение, для которого можно в явном виде сравнить такие величины, как максимальная скорость и расход, полученные на основе зависимостей (1.2), (1.4), (1.5).

2. Течение в круглой трубе под действием перепада давления. В жесткой трубе с постоянным круглым сечением радиусом R имеет место сдвиговое стационарное течение под действием перепада давления $k = \mathrm{const}$ ($\partial p/\partial z = -k < 0$). В цилиндрической системе координат (r, θ, z) отличны от нуля лишь компонента скорости $v_z(r)$ и компонента девиатора напряжений $s_{rz}(r) = s_{zr}(r)$, которую в силу статической определимости можно найти из уравнения движения:

$$s_{rz} = -\frac{kr}{2} \leqslant 0, \qquad \sigma_{int} = \sqrt{2}\,|s_{rz}| = \frac{kr}{\sqrt{2}}. \tag{2.1}$$

Пусть сначала движущаяся в трубе среда не обладает пределом текучести и описывается определяющими соотношениями (1.1), (1.2). Так как при одномерном (rz)-сдвиге

$$v_{int} = \sqrt{2}\,|v_{rz}| = -\sqrt{2}\,v_{rz} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{dv_z}{dr}, \qquad s_{rz} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,F(v_{int}),$$

то с учетом (2.1) нетрудно записать обыкновенное дифференциальное уравнение для $v_z(r)$, имеющее аналитическое решение

$$v_z = \sqrt{2}\int\limits_r^R G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}}\Big)\,d\xi, \qquad r < R, \tag{2.2}$$

при условии прилипания на стенке $r = R$.

Введем безразмерную радиальную координату $x = r/R$ и функцию $g(x) = G(kr/\sqrt{2})$, которая так же, как и G (1.3), имеет физическую размерность T^{-1}. Эта функция удовлетворяет следующим условиям: 1) $g(0) = 0$; 2) $g(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$. Тогда согласно (2.2)

$$v_z^{\max} \equiv V = \sqrt{2}\int\limits_0^R G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}}\Big)\,dr = \sqrt{2}\,R\int\limits_0^1 g(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Для течения с профилем (2.2) вычислим расход Q_v через сечение, меняя порядок интегрирования в возникающем двойном интеграле:

$$Q_v = 2\sqrt{2}\,\pi \int\limits_0^R r \int\limits_r^R G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}}\Big)\,d\xi\,dr = 2\sqrt{2}\,\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^\xi rG\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}}\Big)\,dr\,d\xi =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi \int\limits_0^R r^2 G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}}\Big)\,dr = \sqrt{2}\,\pi R^3 \int\limits_0^1 x^2 g(x)\,dx. \qquad (2.4)$$

Движение по трубе материалов с пределом текучести характеризуется обязательным наличием в центре трубы жесткого ядра радиусом $R^* = \sigma_s\sqrt{2}/k$. Сдвиговое течение реализуется в цилиндрическом слое $R^* < r < R$, который может отсутствовать, если $\sigma_s \geqslant kR/\sqrt{2}$, т. е. если перепада давления недостаточно для преодоления сдвигового порога и инициирования массопереноса вдоль трубы. Поскольку в этом случае вся среда покоится и расход равен нулю, исключим его из анализа и будем полагать $R^* < R$.

Рассмотрим сначала скалярное определяющее соотношение (1.4). Профиль продольной скорости $v_z^{\{1\}}(r) \in C^1(0;R)$ состоит из криволинейного и плоского участков:

$$v_z^{\{1\}} = \sqrt{2} \int\limits_r^R G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}} - \sigma_s\Big)\,d\xi, \qquad R^* < r < R;$$

$$v_z^{\{1\}} \equiv V^{\{1\}} = \sqrt{2} \int\limits_{R^*}^R G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}} - \sigma_s\Big)\,dr = \sqrt{2}\,R \int\limits_\gamma^1 g(x-\gamma)\,dx, \qquad r \leqslant R^*. \qquad (2.5)$$

Условие прилипания $v_z|_{r=R} = 0$ выполнено.

По аналогии с (2.3) находим расход $Q_{vp}^{\{1\}}$:

$$Q_{vp}^{\{1\}} = 2\sqrt{2}\,\pi \int\limits_{R^*}^R r \int\limits_r^R G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}} - \sigma_s\Big)\,d\xi\,dr + \pi R^{*2} V^{\{1\}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi \int\limits_{R^*}^R r^2 G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}} - \sigma_s\Big)\,dr = \sqrt{2}\,\pi R^3 \int\limits_\gamma^1 x^2 g(x-\gamma)\,dx. \qquad (2.6)$$

Здесь $\gamma = R^*/R = \sigma_s\sqrt{2}/(kR)$ — безразмерный предел текучести, меняющийся от значения $\gamma = 0$ до максимального значения $\gamma = 1$, при котором среда не движется вдоль трубы. Заметим, что

$$G(kr/\sqrt{2} - \sigma_s) = g(x-\gamma).$$

Рассмотрим скалярное определяющее соотношение (1.5). Как и в рассмотренном выше случае, профиль $v_z^{\{2\}}(r) \in C^1(0;R)$ состоит из криволинейного и плоского участков:

$$v_z^{\{2\}} = \sqrt{2} \int\limits_r^R G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}}\Big)\,d\xi - \sqrt{2}\,(R-r)G(\sigma_s), \qquad R^* < r < R;$$

$$v_z^{\{2\}} \equiv V^{\{2\}} = \sqrt{2}\int\limits_{R^*}^{R} G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}}\Big)\, dr - \sqrt{2}\,(R-R^*)G(\sigma_s) =$$

$$= \sqrt{2}\,R\int\limits_{\gamma}^{1} g(x)\,dx - \sqrt{2}\,R(1-\gamma)g(\gamma), \quad r \leqslant R^*. \tag{2.7}$$

Выражение для расхода $Q_{vp}^{\{2\}}$ через все сечение имеет следующий вид:

$$Q_{vp}^{\{2\}} = 2\sqrt{2}\,\pi\int\limits_{R^*}^{R} r\int\limits_{r}^{R} G\Big(\frac{k\xi}{\sqrt{2}}\Big)\,d\xi\,dr - 2\sqrt{2}\,\pi G(\sigma_s)\int\limits_{R^*}^{R} r(R-r)\,dr + \pi R^{*2}V^{\{2\}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi\int\limits_{R^*}^{R} r^2 G\Big(\frac{kr}{\sqrt{2}}\Big)\,dr - \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi G(\sigma_s)(R^3 - R^{*3}) =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi R^3\int\limits_{\gamma}^{1} x^2 g(x)\,dx - \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi R^3(1-\gamma^3)g(\gamma). \tag{2.8}$$

3. Сравнение максимальных скоростей и расходов. Найдены три максимальные по сечению трубы скорости $V[g(x)]$ (2.3), $V^{\{1\}}[g(x);\gamma]$ (2.5) и $V^{\{2\}}[g(x);\gamma]$ (2.7) (одна для вязкого течения и две для вязкопластического), а также три расхода $Q_v[g(x)]$ (2.4), $Q_{vp}^{\{1\}}[g(x);\gamma]$ (2.6) и $Q_{vp}^{\{2\}}[g(x);\gamma]$ (2.8) (один для вязкого течения и два для вязкопластического), являющиеся функционалами в пространстве материальных функций $g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ с параметром $\gamma \in [0;1]$. Заметим, что выполняются следующие имеющие физический смысл предельные переходы:

1) $V[g(x)] = V^{\{1\}}[g(x);0] = V^{\{2\}}[g(x);0]$ для любой функции $g(x)$;
2) $V^{\{1\}}[g(x);1] = V^{\{2\}}[g(x);1] = 0$ для любой функции $g(x)$;
3) $V^{\{1\}}[g(x);\gamma] = V^{\{2\}}[g(x);\gamma]$ для любого параметра γ, если функция g линейна;
4) $Q_v[g(x)] = Q_{vp}^{\{1\}}[g(x);0] = Q_{vp}^{\{2\}}[g(x);0]$ для любой функции $g(x)$;
5) $Q_{vp}^{\{1\}}[g(x);1] = Q_{vp}^{\{2\}}[g(x);1] = 0$ для любой функции $g(x)$;
6) $Q_{vp}^{\{1\}}[g(x);\gamma] = Q_{vp}^{\{2\}}[g(x);\gamma]$ для любого параметра γ, если функция g линейна.

Выясним, какая из трех максимальных скоростей больше либо меньше других, а также какой из трех расходов больше либо меньше других при различных значениях $g(x)$ и γ. Так как функция g монотонно возрастает и $g(0)=0$, справедливы оценки

$$V \geqslant \sqrt{2}\,R\int\limits_{\gamma}^{1} g(x)\,dx \geqslant \sqrt{2}\,R\int\limits_{\gamma}^{1} g(x-\gamma)\,dx = V^{\{1\}},$$

$$V \geqslant \sqrt{2}\,R\int\limits_{\gamma}^{1} g(x)\,dx \geqslant \sqrt{2}\,R\int\limits_{\gamma}^{1} g(x)\,dx - \sqrt{2}\,R(1-\gamma)g(\gamma) = V^{\{2\}},$$

$$Q_v \geqslant \sqrt{2}\,\pi R^3\int\limits_{\gamma}^{1} x^2 g(x)\,dx \geqslant \sqrt{2}\,\pi R^3\int\limits_{\gamma}^{1} x^2 g(x-\gamma)\,dx = Q_{vp}^{\{1\}},$$

$$Q_v \geqslant \sqrt{2}\,\pi R^3 \int\limits_\gamma^1 x^2 g(x)\,dx \geqslant \sqrt{2}\,\pi R^3 \int\limits_\gamma^1 x^2 g(x)\,dx - \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi R^3 (1-\gamma^3) g(\gamma) = Q_{vp}^{\{2\}},$$

свидетельствующие о том, что при введении в нелинейно-вязкую модель предела текучести и сохранении других физико-механических параметров задачи (геометрии, перепада давления) профиль скорости уплощается, а максимальная скорость и расход уменьшаются. Этот факт известен в гидродинамике неньютоновских и вязкопластических сред [9].

Для того чтобы сравнить функционалы $V^{\{1\}}[g(x);\gamma]$ и $V^{\{2\}}[g(x);\gamma]$, а также $Q_{vp}^{\{1\}}[g(x);\gamma]$ и $Q_{vp}^{\{2\}}[g(x);\gamma]$, представим их разности в виде

$$V^{\{1\}} - V^{\{2\}} = \sqrt{2}\,R \int\limits_\gamma^1 \big[g(x-\gamma) - \big(g(x) - g(\gamma)\big)\big]\,dx,$$
$$Q_{vp}^{\{1\}} - Q_{vp}^{\{2\}} = \sqrt{2}\,\pi R^3 \int\limits_\gamma^1 x^2 \big[g(x-\gamma) - (g(x) - g(\gamma))\big]\,dx. \qquad (3.1)$$

Если функция $g(x)$ имеет знакопостоянную вторую производную, то знак выражения в квадратных скобках в (3.1) при любых $0 < \gamma < x \leqslant 1$ определяется знаком g''. Если $g'' < 0$, то

$$g(x-\gamma) > g(x) - g(\gamma), \qquad V^{\{1\}} > V^{\{2\}}, \qquad Q_{vp}^{\{1\}} > Q_{vp}^{\{2\}}, \qquad (3.2)$$

если $g'' > 0$, то

$$g(x-\gamma) < g(x) - g(\gamma), \qquad V^{\{1\}} < V^{\{2\}}, \qquad Q_{vp}^{\{1\}} < Q_{vp}^{\{2\}}. \qquad (3.3)$$

Знак второй производной функции $g(x)$ противоположен знаку второй производной функции $F(v_{int})$ как функции, обратной $G(\sigma_{int})$. Таким образом, с учетом (3.2), (3.3) справедливо следующее утверждение. Для нелинейно-вязких течений с мягкой характеристикой (псевдопластичных сред) при введении в модель предела текучести в виде (1.4) максимальная скорость и расход через все сечение трубы меньше, чем при введении в модель предела текучести в виде (1.5). Для нелинейно-вязких течений с жесткой характеристикой (упрочняющихся сред) справедливо противоположное утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Георгиевский Д. В.** Задача устойчивости квазилинейных течений относительно возмущений функции упрочнения // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 5. С. 826–832.
2. **Георгиевский Д. В.** Возмущения течений несжимаемых нелинейно-вязких и вязкопластических жидкостей, порождаемые вариациями материальных функций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 3. С. 55–62.
3. **Георгиевский Д. В., Окулова Н. Н.** О вязкопластическом течении Кармана // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 5. С. 45–49.
4. **Георгиевский Д. В., Юшутин В. С.** Квазистатическое сжатие и растекание асимптотически тонкого нелинейно-вязкопластического слоя // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 3. С. 150–157.
5. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Ленанд, 2014.
6. **Победря Б. Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1995.

7. **Левтов В. А.** Реология крови / В. А. Левтов, С. А. Регирер, Н. Х. Шадрина. М.: Медицина, 1982.
8. **Корнелик С. Е., Борзенко Е. К., Гришин А. Н. и др.** Образование и разрушение монетных столбиков эритроцитов в канале с локальным расширением // Мат. моделирование. 2008. Т. 20, № 1. С. 3–15.
9. **Chhabra R. P., Uhlherr P. H. T.** Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids // Encyclopedia of fluid mechanics. V. 7. Rheology and non-Newtonian flows. Houston: Gulf. Publ., 1988. P. 611–633.

Поступила в редакцию 2/IX 2022 г.,
после доработки — 2/IX 2022 г.
Принята к публикации 27/X 2022 г.