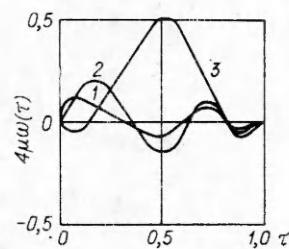


Ф и г. 1



Ф и г. 2

тод регуляризации А. Н. Тихонова [4]. На ЭЦВМ проведен численный анализ поведения вертикального смещения центра штампа δ и угла его поворота относительно оси Ox ω во времени в зависимости от скорости V набегающих волн давлений при следующих параметрах: $A = 1$, $\alpha = 1$, $n = 1$, $\nu = 0,3$, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 7,2 \cdot 10^4$ кг/(м·с²), где ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность среды; μ — параметр Ламэ данной среды.

Результаты вычислений приведены на фиг. 1, 2. По вертикали отложены величины $\delta(\tau)$ и $\omega(\tau)$, умноженные на 4μ , при этом $\tau = t(1 + t)^{-1}$. Такая замена позволяет изучить поведение указанных функций на всем интервале времени. Кривые 1—3 соответствуют $V = 1$; 10 и 20 м/с.

Поступила 6 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
3. Бабешко В. А. Новый метод в теории пространственных задач. — ДАН СССР, 1978, т. 242, № 1.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

УДК 622.24.026.3.001+539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕНОК СКВАЖИН

Г. П. Черепанов

(Москва)

1. Введение. Научно-техническая проблема сверхглубокого бурения чрезвычайно сложна. Современная техника строительства скважин [1—3] состоит в многократном повторении цикла «сверление специальным долотом забоя скважины — вынос частиц разрушенной породы промывочной жидкостью — износ или слом бурового инструмента и его замена, включающая обычно подъемно-спусковые операции всей колонны буровых труб».

Крепление стенок сверхглубокой скважины (свыше 6 км) обсадными колоннами становится технически весьма сложным из-за потери устойчивости стенок скважины, их обрушения и, как следствие, значительного увеличения поперечного сечения скважины по сравнению с начальным. При этом наличие гидравлического давления столба промывочной жидкости служит существенным стабилизирующим фактором. Глинистые и другие добавки в этой жидкости, забивая поры, приводят к образованию плотной корки на стенках и тем самым к герметизации скважин. В дальнейшем рассматриваются только вертикальные скважины, не защищенные обсадной колонной вблизи забоя на расстоянии, по меньшей мере, порядка ста диаметров скважины. Фильтрацией жидкости в породу пренебрегается.

Важнейшим фактором в таких условиях является горное давление от вышележащих пород. Существенные технологические трудности при сверхглубоком бурении вызываются также повышением температуры (примерно 20°C на каждый километр).

2. Локальная неустойчивость стенок круглой скважины. Скважина представляет собой цилиндрическую полость $r < r_0$, $0 < z < H$ в земной коре $z < H$, где r , z — цилиндрические координаты (z совпадает с осью скважины, фиг. 1). Забой скважины (торец цилиндра при $z = 0$) разрушается под действием зубцов долота, которое вдавливаются и вращаются вокруг оси скважины. Стенки скважины и забоя на больших глубинах под влиянием горного давления разрушаются, так что форма скважины оказывается весьма далекой от указанной. Рассмотрим этот процесс естественного разрушения вдали от забоя (практически на расстоянии, большем $5r_0$).

Обозначим через q невозмущенное вертикальное горное давление, а через ηq — невозмущенное боковое горное давление; коэффициент бокового распора η в зависимости от геотектонических условий может быть как меньше, так и больше 1.

Имеем вдали от скважины

$$(2.1) \quad \sigma_z = -q, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\eta q \quad (q > 0).$$

Величина q равна $\rho g H$, где g — ускорение силы тяжести, ρ — средняя плотность вышележащих горных пород, H — расстояние рассматриваемой точки от поверхности Земли (в среднем $\rho g \sim 3,5$ г/см³).

Рассмотрим начальный круговой контур скважины, созданной буровым инструментом (ее поперечное сечение изображено на фиг. 1, б). Некоторая точка O на стенке этой скважины будет находиться под действием трехосного сжатия напряжениями

$$(2.2) \quad \sigma_z = -q, \quad \sigma_r = -p, \quad \sigma_\theta = p - 2\eta q.$$

Здесь p — гидростатическое давление жидкости в скважине ($p \sim \rho_H g H$, где для воды $\rho_H g \sim 1$ г/см³, а для глинистых растворов $\rho_H g$ может достигать 2,5 г/см³). Окружное напряжение σ_θ получается из решения соответствующей задачи теории упругости для кругового отверстия [4].

Возможны два случая: $|\sigma_\theta| > |\sigma_z| > |\sigma_r|$, когда $p - 2\eta q < -q$, т. е. $(2\eta - 1)q > p$; $|\sigma_z| > |\sigma_\theta| > |\sigma_r|$, когда $p - 2\eta q > -q$, т. е. $(2\eta - 1)q < p$.

В этих случаях характер локальных разрушений в точке O будет различным и по-разному будет протекать процесс кавернообразования.

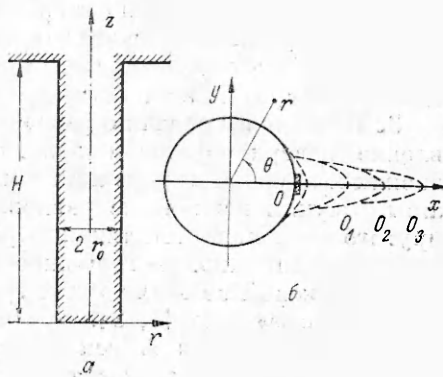
Критерий локального разрушения можно представить в виде поверхности $f(\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta) = 0$, охватывающей начало координат в пространстве $\sigma_z \sigma_r \sigma_\theta$. В интересующей нас области сжимающих напряжений $\sigma_z < 0$, $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta < 0$ при $|\sigma_z| > |\sigma_r|$ и $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$ эта поверхность может быть представлена [5, 6] следующим образом:

$$(2.3) \quad \text{при } |\sigma_\theta| > |\sigma_z| > |\sigma_r| \quad \sigma_\theta = -\sigma_c + \delta(\sigma_z + \sigma_r),$$

при $|\sigma_z| > |\sigma_\theta| > |\sigma_r|$ $\sigma_z = -\sigma_c + \delta(\sigma_\theta + \sigma_r)$. Здесь δ и σ_c — эмпирические константы, подобранные так, чтобы лучше описать экспериментальные данные в исследуемом диапазоне напряжений.

Число δ подобно коэффициенту Пуассона удовлетворяет неравенству $0 \leq \delta \leq 1/2$. Без большой ошибки его можно считать равным 1/2 (это соответствует экспериментальному факту о том, что прочность при

10*



Фиг. 1

всестороннем сжатии, когда $\sigma_r = \sigma_z = \sigma_0$, во много раз превышает прочность при одноосном сжатии).

Подставляя (2.2) в (2.3), находим следующее условие локального разрушения в точке O :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\text{при } 2\eta q - p > q > p \quad (2\eta - \delta)q = \sigma_c + p(1 + \delta), \\ &\text{при } (2\eta - 1)q < p < \eta q \quad q(1 - 2\delta\eta) = \sigma_c. \end{aligned}$$

При $(2\eta - 1)q > p$ сдвигка в точке O стенки скважины в момент локального разрушения будет происходить вдоль плоскости, параллельной оси z , а при $(2\eta - 1)q < p$ — вдоль плоскости, наклоненной к оси z под некоторым углом и параллельной касательной к окружности контура скважины в точке O .

Исследуем устойчивость формы кругового контура скважины по отношению к малым возмущениям формы контура, совершенно неизбежным в процессе строительства скважины. Пусть, например, вблизи точки O имеется весьма малая выемка (фиг. 1, б). Эта выемка приведет к дополнительной концентрации напряжений в окрестности этой точки, вследствие чего при увеличении горного давления локальное разрушение в ней произойдет раньше, чем в других точках кругового контура скважины. Очевидно, ввиду непрерывного увеличения концентрации напряжений в растущей выемке процесс локального разрушения будет самоподдерживающимся до тех пор, пока система не придет в устойчивое состояние равновесия (т. е. пока скважина не примет новую форму, устойчивую по отношению к неизбежным малым возмущениям).

Подчеркнем, что рассматриваемые горные породы обладают следующим свойством: образование области предельного состояния означает разделение на мелкие несвязанные частицы во всех точках этой области; эти частицы вымываются промывочной буровой жидкостью, пока область предельного состояния не вырождается в некоторую поверхность, которая будет границей тела. Дальнейшее же вымывание породы невозможно, так как оставшийся объем будет сплошным и упругим. Поэтому при неизменных внешних условиях получившаяся предельная граница тела будет неизменной и ее естественно назвать равновесной формой тела.

Согласно (2.4), гидростатическое давление жидкости влияет лишь на устойчивость круговых стенок и кавернообразование первого рода; кавернообразование второго рода не зависит от давления жидкости в круговой скважине.

Учитывая стратифицированную (слоистую) структуру земной коры, нетрудно сообразить, что описанное явление потери устойчивости и кавернообразования может происходить также на небольших глубинах в малопрочных слоях. Поэтому при оптимальном управлении бурением необходимо иметь в виду, что выбором параметра управления p можно избежать кавернообразования первого рода, для этого должно быть $p(1 + \delta) > (2\eta - \delta)q - \sigma_c$ в соответствующем слое. Кавернообразование второго рода, согласно второму соотношению (2.4), является практически неуправляемым процессом (некоторое влияние на σ_c и δ породы оказывает лишь образование глинистой корки на стенках скважины под действием буровой жидкости).

3. Постановка задачи о равновесных формах упругих тел. Рассмотрим явление кавернообразования первого рода, протекающее в условиях, близких к плоской деформации в плоскости xu поперечного сечения скважины. Изучим возможные равновесные состояния. Равновесной формой упругого тела является такая форма, при которой все граничные точки тела имеют одинаковую возможность разрушения, т. е. когда концентрация напряжений во всех точках границы одинакова. Это так называемые «равнопрочные» тела [7, 8].

Обозначим через L неизвестный «равнопрочный» контур упругого тела в комплексной плоскости $z = x + iy$ (фиг. 2). Имеем следующие граничные условия:

на контуре L

$$(3.1) \quad \sigma_n = -p, \quad \tau_{nt} = 0,$$

$$\sigma_t = -\sigma = \text{const};$$

при $z \rightarrow \infty$

$$(3.2) \quad \sigma_x = \sigma_y = -\eta q, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Здесь t и n — касательная и нормаль к контуру L (образующие правую систему nt). С учетом некруговой формы полости, согласно (2.3), имеем

$$(3.3) \quad \text{при } |\sigma_t| \geq |\sigma_z| \geq |\sigma_n| \text{ на стенках каверны, т. е.}$$

$$\text{при } \sigma \geq |q + \nu(p + \sigma - 2\eta q)| \geq p,$$

$$\sigma_t = -\sigma_c + \delta(\sigma_c + \sigma_n),$$

$$\sigma = [1/(1 - \nu\delta)][\sigma_c + \delta p(1 + \nu) + \delta q(1 - 2\nu\eta)];$$

$$\text{при } |\sigma_z| \geq |\sigma_t| \geq |\sigma_n| \text{ на стенках каверны, т. е.}$$

$$\text{при } |q + \nu(p + \sigma - 2\eta q)| \geq \sigma \geq p,$$

$$\sigma_z = -\sigma_c + \delta(\sigma_n + \sigma_t),$$

$$\sigma = -p + (q - \sigma_c - 2\nu\eta q)/(\delta - \nu)$$

(ν — коэффициент Пуассона). Здесь было принято, что искомое поле напряжений в теле представляет собой сумму невозмущенного однородного поля $\sigma_n^0 = \sigma_t^0 = -\eta q$, $\sigma_z^0 = -q$ и возмущенного выработкой неоднородного поля σ'_{ih} , находящегося в условиях плоской деформации, так что $\sigma'_z = \nu(\sigma'_n + \sigma'_t)$.

Компоненты напряжений представим через потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (z = x + iy),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)].$$

Согласно (3.2), имеем

$$(3.4) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad \Phi(z) = -(1/2)\eta q + O(z^{-2}), \quad \Psi(z) = O(z^{-2}).$$

Используя известные соотношения

$$\sigma_t + \sigma_n = \sigma_x + \sigma_y,$$

$$\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{tn} = e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}),$$

где α — угол между n и x (отсчитываемый от x к n), граничные условия (3.1) на контуре L можно записать в виде

$$(3.5) \quad 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = -\sigma - p,$$

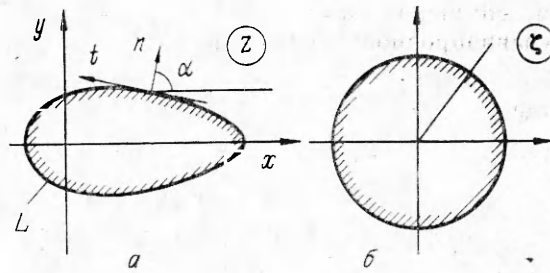
$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = (1/2)(p - \sigma)e^{-2i\alpha}.$$

4. Решение краевой задачи в классе ограниченных потенциалов. Решение этой задачи вначале будем искать в классе ограниченных всюду потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ и в классе контуров L с бесконечными ветвями. В этом классе функций, согласно первому краевому условию (3.5), потенциал $\Phi(z)$ будет всюду постоянным:

$$(4.1) \quad \Phi(z) = -(1/4)(\sigma + p),$$

причем из условия на бесконечности (3.4)

$$\sigma = 2\eta q - p$$



Ф и г. 2

и, согласно формуле (3.3), напряженное состояние на стенках искомой «равнопрочной» скважины будет следующим:

$$\sigma_n = -p, \quad \sigma_t = -2\eta q + p, \quad \sigma_z = -q,$$

где

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (2\eta - \delta)q &= \sigma_c + p(1 + \delta) \text{ при } 2\eta q - p \geq q \geq p, \\ (1 - 2\eta\delta)q &= \sigma_c \quad \text{при } q \geq 2\eta q - p \geq p. \end{aligned}$$

Подставляя (4.1) в (3.5), получим

$$(4.3) \quad 2\Psi(z) = (p - \sigma)e^{-2i\alpha} \quad (z \in L).$$

Конформно преобразуем внешность контура L плоскости z на внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ параметрической плоскости ζ при помощи аналитической функции $\omega(\zeta)$, подлежащей определению: $z = \omega(\zeta)$.

Определим $e^{2i\alpha}$. Дадим приращение точке z в направлении нормали к контуру L (см. фиг. 2)

$$(4.4) \quad dz = e^{i\alpha}|dz|.$$

Соответствующая точка плоскости ζ в силу конформности отображения переместится вдоль радиуса

$$(4.5) \quad d\zeta = \zeta|d\zeta|.$$

При помощи (4.4), (4.5) находим

$$(4.6) \quad e^{2i\alpha} = \left(\frac{dz}{|dz|} \right)^2 = \left(\frac{\omega' d\zeta}{|\omega'| |d\zeta|} \right)^2 = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Краевая задача (4.3) на плоскости ζ запишется в виде

$$(4.7) \quad 2\psi(\zeta) = (p - \sigma)\overline{\omega'(\zeta)} \quad \text{при } |\zeta| = 1.$$

Здесь $\psi(\zeta) = \zeta^2 \omega'(\zeta) \Psi[\omega(\zeta)]$, при $\zeta \rightarrow \infty$ $\psi(\zeta) = O(1)$, $\omega'(\zeta) = O(1)$.

Пусть искомый контур L имеет $2n$ бесконечных ветвей, которым соответствует $2n$ простых полюсов функций $\omega'(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в точках $\zeta = \zeta_k$ и $\zeta = -\zeta_k$:

$$\zeta_k = e^{i\varphi_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Общее решение краевой задачи (4.7) в указанном классе функций имеет вид

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) &= \sum_{k=1}^n \left(A_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} + B_k \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta + \zeta_k} \right) + C_0, \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2}(p - \sigma) \left[-\bar{C}_0 + \sum_{k=1}^n \left(\bar{A}_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} + \bar{B}_k \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta + \zeta_k} \right) \right], \end{aligned}$$

где C_0 , A_k и B_k — произвольные комплексные постоянные.

Так как функция $\omega(\zeta)$ должна быть однозначной при обходе единичного круга, следует положить $B_k = A_k$.

Интегрированием находим функцию $\omega(\zeta)$

$$(4.8) \quad \omega(\zeta) = C\zeta + 2 \sum_{k=1}^n \zeta_k A_k \ln \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta + \zeta_k} \quad (C = C_0 + 2 \sum A_k).$$

Функция $\ln [(\zeta - \zeta_k)/(\zeta + \zeta_k)]$ однозначна в плоскости ζ с разрезом, соединяющим точки $\zeta = \zeta_k$ и $\zeta = -\zeta_k$ внутри единичного круга.

Пусть контур L симметричен относительно действительной оси. Будем считать, что действительная ось плоскости ζ переходит в действительную ось плоскости z в окрестности бесконечно удаленной точки. Отсюда следует, что значение C действительно, действительным и мнимым ζ_k соответствуют действительные коэффициенты A_k , а каждой паре сопря-

женных полюсов ζ_k и $\bar{\zeta}_k$ соответствует пара сопряженных комплексных коэффициентов A_k и $\bar{A}_k$.

Таким образом, искомое семейство контуров L , определяемое функцией $\omega(\zeta)$ в (4.8), зависит от $2N$ произвольных постоянных A_k и $\bar{\zeta}_k$, где один и тот же индекс k отвечает четырем комплексным полюсам ($\zeta_k, \bar{\zeta}_k, -\bar{\zeta}_k, -\zeta_k$) и паре действительных ($\zeta_k, -\zeta_k$) или мнимых ($\zeta_k, \bar{\zeta}_k$) полюсов. Отображение, осуществляемое этой функцией, неоднолистно: внешности круга $|\zeta| > 1$ соответствует двулистная риманова поверхность плоскости z с симметричными бесконечными ветвями на втором листе.

Рассмотрим на примере физический смысл полученного решения. Пусть имеется всего два полюса — в точках $\zeta = \zeta_1 = 1$ и $\zeta = -\zeta_1 = -1$. В этом случае, согласно (4.8), отображение дается функцией

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta - \lambda \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right),$$

где C и λ — произвольные положительные параметры. При этом единичная окружность $\zeta = e^{i\varphi}$ переходит в контур L с самопересекающимися ветвями, уравнение которого имеет вид

$$(4.9) \quad \begin{cases} x = C \left[\cos \varphi - \lambda \ln \left(\alpha \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\ y = C \left(\sin \varphi - \frac{\pi}{2} \alpha \lambda \right) (\lambda > 0, C > 0), \end{cases}$$

где $\alpha = 1$ при $0 < \varphi < \pi$ и $\alpha = -1$ при $\pi < \varphi < 2\pi$.

Естественно считать, что при $\varphi = \pm\pi/2$ $y = \pm r_0$, откуда имеем

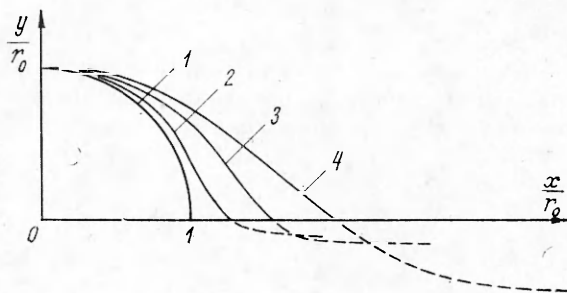
$$C = \frac{r_0}{1 - \frac{i}{2} \pi \lambda}.$$

Следовательно, параметр λ должен удовлетворять неравенству $0 < \lambda < 2/\pi$.

Оси x и y являются осями симметрии для контура L . На фиг. 3 приведено семейство равновесных контуров L , построенное в правой полуплоскости по формулам (4.9) при значениях $\lambda = 0; 0,05; 0,1; 0,2$ (кривые 1—4 соответственно). Самопересекающиеся ветви изображены штриховыми линиями; они находятся на втором листе двулистной римановой поверхности z .

Построенное решение описывает последовательное развитие каверны из кругового отверстия вследствие бесконечно малых начальных разрушений в точках $y = 0$ $x = \pm r_0$ отверстия. Наличие областей самопересечения показывает, что на продолжении каверны внутри тела всегда имеются зоны закритического состояния, не вымываемые жидкостью. Полученные равновесные контуры каверны будут, очевидно, локально-неустойчивыми и могут случайным образом переходить на любую из равновесных форм, описываемых общим решением (4.8). Согласно этому решению, существует бесконечно много форм равновесных каверн самой причудливой конфигурации и с любым числом «каньонов». Все эти формы локально-неустойчивые.

Отметим, что двулистная риманова поверхность уже использовалась ранее в качестве физического прост-



Ф и г. 3

ранства в некоторых гидродинамических работах. Это прежде всего модель Эфроса—Джильбарга—Рокка в теории кавитации [9, 10]. Параметр λ в решении (4.9) играет роль «времени», поэтому можно считать, что это решение описывает развитие конечного возмущения (см., например, [11] о развитии «языка» жидкости из малого возмущения неустойчивой формы равновесия двух жидкостей).

5. Решение краевой задачи в классе неограниченных потенциалов. Изучим теперь решение исходной задачи (3.5) в классе ограниченных контуров L с точками возврата и в классе неограниченных в этих точках потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. На продолжении точек возврата в теле напряжения бесконечны, и поэтому в окрестности такой точки имеется зона закритического состояния, где порода разрушена. Из предыдущего следует, что образование таких зон неизбежно при развитии каверн.

В дальнейшем предполагается, что характерный линейный размер областей предельного и запредельного состояния в окрестности точки возврата мал по сравнению с характерным линейным размером каверны. Это предположение аналогично допущению тонкой структуры в теории хрупких трещин, оно позволяет использовать упругие решения с интегрируемыми особенностями.

Пусть искомый контур L имеет n точек возврата, которым в параметрической плоскости ζ соответствуют точки $\zeta = \zeta_k = e^{i\varphi_k}$ единичной окружности, где $k = 1, 2, \dots, n$. Корневой особенностью комплексных потенциалов в точке возврата плоскости z отвечает простой полюс в соответствующей точке ζ_k плоскости ζ , так как

$$\omega'(\zeta_k) = 0, \text{ при } \zeta \rightarrow \zeta_k \quad \omega(\zeta) = \omega(\zeta_k) + O[(\zeta - \zeta_k)^2].$$

Решая задачу Дирихле для внешности единичного круга $|\zeta| > 1$ в указанном классе функций, согласно первому краевому условию (3.5), получаем

$$(5.1) \quad \varphi(\zeta) = -\frac{1}{4}(\sigma + p) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k}, \quad \varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)],$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — некоторые произвольные действительные постоянные, удовлетворяющие, согласно (3.4), следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{4}(\sigma + p - 2\eta q), \quad \sum_{k=1}^n A_k \zeta_k = 0.$$

Введем новую функцию

$$(5.2) \quad \chi(\zeta) = \frac{1}{2}(p - \sigma)\omega'(\zeta) + 2\omega(\zeta) \sum_{k=1}^n \frac{A_k \zeta_k}{(\zeta - \zeta_k)^2},$$

аналитическую во внешности единичного круга $|\zeta| > 1$ и ограниченную при $\zeta \rightarrow \infty$.

Подставляя $\varphi(\zeta)$ из (5.1) во второе условие (3.5) и используя (4.6), получим следующую краевую задачу:

$$\psi(\zeta) = \overline{\chi(\zeta)} \text{ при } |\zeta| = 1,$$

где

$$\psi(\zeta) = \zeta^2 \omega'(\zeta) \Psi[\omega(\zeta)].$$

Общее решение этой краевой задачи в классе функций, ограниченных на бесконечности и, согласно (5.2), имеющих полюсы второго порядка в точках $\zeta = \zeta_k$, имеет вид

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \psi(\zeta) &= -\sum_{k=1}^n \bar{B}_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} + \sum_{k=1}^n \bar{C}_k \left(\frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} \right)^2, \\ \chi(\zeta) &= \sum_{k=1}^n B_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} + \sum_{k=1}^n C_k \left(\frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} \right)^2, \end{aligned}$$

где B_k и C_k — некоторые произвольные комплексные постоянные.

Поскольку функция $\chi(\zeta)$ найдена, соотношение (5.2) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомой функции $\omega(\zeta)$. Исследование аналитической природы этого решения показывает, что при $\sigma \neq p$ в точках $\zeta = \zeta_k$ функция $\omega(\zeta)$ имеет существенно особую точку типа $\exp(1/(\zeta - \zeta_k))$. В данной задаче эта особенность не имеет физического смысла, поэтому следует положить

$$(5.4) \quad \sigma = p.$$

При этом напряженное состояние на стенке полости, согласно (3.3), будет следующим:

$$\sigma_n = \sigma_t = -p, \quad \sigma_z = -q + 2\nu(\eta q - p),$$

причем при $q(1 - 2\nu\eta) > p(1 - 2\nu)$

$$(5.5) \quad q(1 - 2\nu\eta) + 2p(\nu - \delta) = \sigma_z$$

На основании (5.2)–(5.4) искомая функция $\omega(\zeta)$ имеет вид

$$(5.6) \quad \omega(\zeta) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{2A_k \zeta_k}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right]^{-1} \sum_{k=1}^n B'_k \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} \left(1 + C'_k \frac{\zeta_k}{\zeta - \zeta_k} \right),$$

где B'_k и C'_k — произвольные комплексные постоянные. Постоянные A_k, B'_k, C'_k и ζ_k должны удовлетворять лишь условиям $\omega'(\zeta_k) = 0$ и условию конформности отображения $|\omega'(\zeta)| > 0$ при $|\zeta| > 1$, в остальном они произвольны. Поэтому существует бесконечно много форм равновесных каверн с точками возврата.

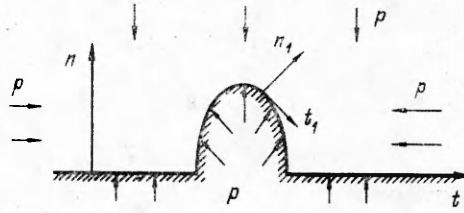
Покажем, что все эти состояния будут локально-устойчивыми по отношению к любым бесконечно малым гладким изменениям формы контура. В окрестности бесконечно малого возмущения формы контура («язык» на фиг. 4) на основании «принципа микроскопа» [6] можно считать, что в невозмущенном состоянии тело занимало верхнюю полуплоскость $n > 0$. Требуется определить поле напряжений в верхней полуплоскости с вырезом гладкой формы (без угловых точек и точек возврата), если на бесконечности действуют напряжения $\sigma_n = \sigma_t = -p$, а ко всей измененной границе приложены нагрузки $\sigma_{n_1} = -p, \tau_{t_1 n_1} = 0$, где n_1 и t_1 — нормаль и касательная на возмущенном контуре границы. Искомое поле напряжений во всех точках тела, очевидно, будет представлять собой всестороннее сжатие величины p ; в частности, на вырезе, как и в невозмущенном состоянии, по-прежнему будет $\sigma_{n_1} = \sigma_{t_1} = -p$. Следовательно, бесконечно малые гладкие возмущения построенных в этом пункте равновесных форм не приводят к концентрации напряжений и прогрессирующему локальному разрушению, т. е. полученные равновесные формы будут локально-устойчивыми.

Не анализируя более общее решение (5.6), приведем лишь несколько симметричных частных случаев.

Две точки возврата. В этом случае

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2} \eta q + \frac{p - \eta q}{\zeta^2 - 1}, \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2} l' \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

и контур L представляет собой трещиноподобную полость длины $2l$.



Фиг. 4

Четыре симметричные точки возврата. В этом случае

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2}\eta q + \frac{p - \eta q}{\xi^4 - 1}, \quad \omega(\xi) = \frac{3}{2}r_0 \left(\xi + \frac{1}{\xi^3} \right)$$

и контур L представляет собой астроида

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (2r_0)^{2/3},$$

наименьшее расстояние которой от начала координат равно r_0 .

Симметричный контур с $2n$ точками возврата. В этом случае

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2}\eta q + \frac{p - \eta q}{\xi^{2n} - 1}, \quad \omega(\xi) = \frac{2n-1}{2n-2}r_0 \left[\xi + \frac{1}{(2n-1)\xi^{2n-1}} \right]$$

и контур L представляет собой гипоциклоиду

$$x = \frac{2n-1}{2n-2}r_0 \left[\cos \varphi + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)\varphi \right],$$

$$y = \frac{2n-1}{2n-2}r_0 \left[\sin \varphi - \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\varphi \right] \quad (0 < \varphi < 2\pi),$$

наименьшее расстояние которой от начала координат равно r_0 . Естественно предположить, что величина r_0 отвечает радиусу исходной круговой скважины, так что контур образовавшейся устойчивой каверны при $n > 1$ касается начального кругового контура в $2n$ точках.

Потенциал $\psi(\xi)$ определяется по найденным функциям $\varphi(\xi)$ и $\omega(\xi)$ следующим образом:

$$\psi(\xi) = -\xi^2 \varphi'(\xi) \bar{\omega}(1/\xi).$$

6. Предельная глубина скважин. Полученные выше результаты позволяют дать следующую картину развития каверн из начальных скважин. В данной постановке задачи аналогом времени будет глубина скважины H (параметр нагружения). При заданных параметрах $\sigma_c, \eta, \delta, \nu, \rho g, \rho_{Hg}$ процесс развития каверн определяется величиной H . Рассмотрим этот процесс.

Согласно формулам (4.2), (5.5), возможны следующие три варианта разрушения:

вариант I

$$(6.1) \quad (2\eta - \delta)\rho g H - (1 + \delta)(\rho_{Hg} H + p_a) = \sigma_c;$$

вариант II

$$(6.2) \quad (1 - 2\eta\delta)\rho g H_* = \sigma_c;$$

вариант III

$$(6.3) \quad (1 - 2\nu\eta)\rho g H + 2(\nu - \delta)(\rho_{Hg} H + p_a) = \sigma_c$$

$$(q = \rho g H, \quad p = \rho_{Hg} H + p_a).$$

Здесь p_a — добавочное давление буровой жидкости на поверхности Земли.

Этим вариантам отвечают следующие значения H :

$$(6.4) \quad H_I = \frac{\sigma_c + p_a(1 + \delta)}{\rho g(2\eta - \delta) - \rho_{Hg}(1 + \delta)};$$

$$(6.5) \quad H_{II} = \frac{\sigma_c}{\rho g(1 - 2\eta\delta)};$$

$$(6.6) \quad H_{III} = \frac{\sigma_c - 2p_a(\nu - \delta)}{\rho g(1 - 2\nu\eta) + 2\rho_{Hg}(\nu - \delta)}.$$

Физический смысл имеют лишь положительные значения H . Поэтому в случае отрицательного значения H_I, H_{II} или H_{III} соответствующий вариант разрушения не реализуется.

Образование каверны, очевидно, начинается с глубины $H = H_*$, равной

$$(6.7) \quad H_* = \min(H_I, H_{II}).$$

В процессе своего развития при $H = H_*$ каверна из начальной круговой формы проходит через множество непрерывно-изменяемых и локально-неустойчивых равновесных форм, описываемых решениями п. 4. Скорость развития каверны на этом этапе определяется скоростью вымывания разрушенных частиц буровой жидкостью. В настоящей постановке задачи эту скорость можно считать бесконечно большой. При больших отклонениях от начальной круговой формы неустойчивые равновесные формы с бесконечными ветвями (п. 4) становятся нереальными из-за наличия больших зон самопересечения. Естественнo предположить, что конечным этапом развития каверны при $H = H_*$ будут локально-устойчивые равновесные формы с точками возврата (п. 5). Очевидно, этот этап будет устойчивым и равновесным в целом, если $H_{III} > H_* = \min(H_I, H_{II})$; при этом упругая система придет в одно из устойчивых состояний, описываемых решениями п. 5. В этом случае образовавшаяся каверна не будет развиваться до тех пор, пока увеличивающаяся глубина скважины не достигнет величины $H = H_{III}$. Дальнейшее увеличение глубины, большее H_{III} , невозможно, так как оно будет сопровождаться непрерывным и безграничным разрушением стенок каверны согласно критерию (6.3). Таким образом, в рассматриваемом случае предельная глубина скважины $H = \tilde{H}_{**}$ равна H_{III} ; большая глубина бурения невозможна для рассматриваемой технологии.

Если же $H_{III} < H_* = \min(H_I, H_{II})$, то развитие каверны при $H = H_*$ безостановочное, так как упругие состояния п. 5, согласно (6.3), при этом будут неравновесными, закритическими. В этом случае предельная глубина скважины H_{**} равна H_* .

Таким образом, имеем следующий общий результат:

$$(6.8) \quad H_{**} = \max(H_{III}, H_*) = \max[H_{III}, \min(H_I, H_{II})].$$

Приведем пример. Пусть $\eta = 1/2$, $\nu = 1/3$, $\delta = 1/2$, $p_a = 0$. В этом случае, согласно (6.4)–(6.6), имеем

$$H_I = 2\sigma_c/(\rho - 3\rho_H)g, \quad H_{II} = 2\sigma_c/\rho g, \quad H_{III} = 3\sigma_c/(2\rho - \rho_H)g.$$

Как видно, вариант I разрушения может реализоваться лишь при $\rho > 3\rho_H$, а вариант III — лишь при $2\rho > \rho_H$. Отсюда по формулам (6.7), (6.8) находим начальную глубину кавернообразования и предельную глубину бурения:

$$H_* = \frac{2\sigma_c}{\rho g},$$

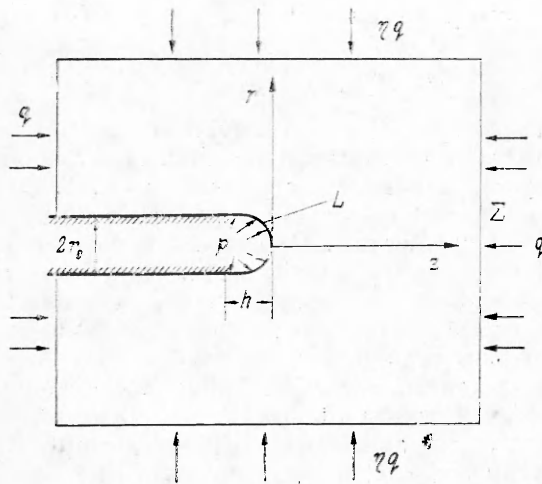
$$H_{**} = \begin{cases} \frac{2\sigma_c}{\rho g} & \text{при } \rho > 2\rho_H \text{ и } \rho < \frac{1}{2}\rho_H, \\ \frac{3\sigma_c}{(2\rho - \rho_H)g} & \text{при } 2\rho_H > \rho > \frac{1}{2}\rho_H. \end{cases}$$

Например, при $\rho g = 3 \text{ г/см}^3$, $\rho_H g = 1,5 \text{ г/см}^3$

$$H_* = \tilde{H}_{**} = \frac{2}{3} \sigma_c \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Отсюда при $\sigma_c = 30 \text{ кг/мм}^2$ (гранит) $H_{**} = 20 \text{ км}$, а при $\sigma_c = 0,003 \text{ кг/мм}^2$ (песок) $H_{**} = 2 \text{ м}$. Как видно, прочность породы играет основную роль при проектировании сверхглубоких скважин.

7. Напряженное состояние в окрестности забоя скважины. Предположим, что стенки скважины в процессе бурения подкреплены вплоть до забоя (цементирование, обсадные колонны и пр.). В этом случае для прогноза предельной глубины бурения необходимо знать напряженное состояние в окрестности забоя закрепленной скважины. Это необходимо



Ф и г. 5

зом L (забой скважины). На L действует постоянное гидростатическое давление ($\sigma_n = -p$, $\tau_{nt} = 0$), остальная граница полости жестко закреплена, так что все смещения обращаются на ней в нуль. На больших расстояниях от забоя действуют постоянные напряжения $\sigma_z = -q$, $\sigma_r = \sigma_\theta = -\eta q$ (фиг. 5). Требуется определить напряжения σ_t и σ_θ на торце L .

Представим искомое упругое поле напряжений σ_{ik} и смещений u_i в виде

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \quad u_i = u_i^0 + u'_i,$$

где u_i^0 соответствуют состоянию всестороннего сжатия давлением p . При этом для поля со штрихом будут справедливы следующие граничные условия:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \sigma'_n = \tau'_{nt} &= 0 \text{ на } L, \\ \frac{\partial u'_r}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial u'_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{E} p \end{aligned}$$

при $r = r_0$ на оставшейся границе полости, где E — модуль Юнга.

Вдали от полости действует однородное поле напряжений

$$(7.2) \quad \sigma'_r = \sigma'_\theta = -\eta q + p, \quad \sigma'_z = -q + p.$$

Рассмотрим замкнутую поверхность Σ , состоящую из границы полости, цилиндра $r = R$ и плоскостей $z = \pm H_0$, где $R \gg r_0$ и $H_0 \gg r_0$ (фиг. 5).

Из условия равновесия упругого тела внутри Σ имеем

$$(7.3) \quad 2 \int_{-\infty}^{-h} \sigma'_{rz}|_{r=r_0} dz = r_0(q - p).$$

Согласно теории инвариантных Г-интегралов [6],

$$\int_{\Sigma} (U' n_z - \sigma'_{nt} u'_{n,z} - \sigma'_{nt} u'_{t,z}) d\Sigma = 0.$$

Здесь U' — упругий потенциал единицы объема для поля со штрихом; n и t — направление нормали и касательной к контуру радиального сечения Σ ; n_z — составляющая вектора нормали на ось z .

также для изучения процессов локального разрушения под зубцами долота при бурении, а также для определения коэффициента бокового распора η . Последний естественно измерять по изменению упругих деформаций кернового образца при извлечении его из забоя на поверхность Земли, для этого необходимо до вырезания керна из забоя прикреплять к нему тензодатчики.

Итак, пусть имеется осесимметричная полость в бесконечном упругом пространстве, форма полости — полубесконечный круговой цилиндр с закругленным тор-

Отсюда на основании (7.1)–(7.3) получаем уравнение

$$(7.4) \quad \frac{4}{2\pi} \int_L^R U' n_z dL = \left[\int_0^R (U' - \sigma'_z u'_{z,z}) r dr \right]_{z=H_0} - \left[\int_{r_0}^R (U' - \sigma'_z u'_{z,z}) r dr \right]_{z=-H_0} + \frac{1-2\nu}{2E} p r_0^2 (q-p).$$

Используя элементарные решения, имеем при $z = H_0$

$$U' - \sigma'_z u'_{z,z} = \frac{1-\nu}{E} (p - \eta q)^2 - \frac{1}{2E} (p - q)^2,$$

при $z = -H_0$

$$U' - \sigma'_z u'_{z,z} = \frac{(\nu - \eta + \nu\eta)^2}{E(1+\nu)} q^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 + \frac{1-\nu}{E} (p - \eta q)^2 - \frac{1}{2E} (p - q)^2.$$

Подставляя эти значения в уравнение (7.4), получаем

$$(7.5) \quad \int_L^R U' n_z dL = \frac{\pi}{E} r_0^2 \left\{ -\frac{1}{2} (1-2\nu) p^2 + 2pq(1-\nu)(1-\eta) + \right. \\ \left. + q^2 \left[\eta^2(1-\nu) - \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\nu} (\nu - \eta + \nu\eta)^2 \right] \right\}$$

Уравнение (7.5) можно использовать для оценки напряжений на забое скважины. Для этого вначале рассмотрим равнопрочный забой, для которого будут справедливы следующие условия на L :

$$\sigma_n = \sigma_t = -\sigma = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\sigma'_n = 0, \quad \sigma'_\theta = \sigma'_t = \sigma - p, \quad U' = \frac{1-\nu}{E} (\sigma - p)^2 = \text{const}.$$

Отсюда при помощи уравнения (7.5) получаем искомое напряжение σ на равнопрочном забое

$$\sigma = p + \frac{1}{\sqrt{1-\nu}} \left\{ -\frac{1}{2} (1-2\nu) p^2 + 2pq(1-\nu)(1-\eta) + \right. \\ \left. + q^2 \left[\eta^2(1-\nu) - \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\nu} (\nu - \eta + \nu\eta)^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

В тех случаях, когда подкоренное выражение отрицательно, равнопрочного забоя не существует.

Рассмотрим некоторые предельные частные случаи существования равнопрочного забоя: при $\eta \gg 1$, $p = 0$ $\sigma = q\eta\sqrt{2\nu/(1+\nu)}$,

при $q = 0$ не существует,

при $\eta = 0$, $p = 0$ не существует.

В наиболее реальном случае $\nu = 1/3$ и $\eta = 1/2$ имеем

$$(7.6) \quad \sigma = p + p \sqrt{\frac{q}{p} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p} \right)^2} = p + q \sqrt{\frac{p}{q} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{p}{q} \right)^2}$$

и равнопрочный забой существует в диапазоне

$$\rho_H \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > \rho > \rho_H \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

обычно реализующемся на практике.

Из физических соображений для другой формы забоя напряжения удовлетворяют неравенствам

$$\max(\sigma_\theta, \sigma_t) > \sigma > \min(\sigma_\theta, \sigma_t),$$

поэтому величина σ играет роль среднего напряжения на забое, тем более, что точная закругленная форма забоя, вырабатываемая в процессе бурения, неизвестна.

Критерий разрушения забоя под действием нагрузок p и q можно записать в виде

$$(7.7) \quad \sigma = \sigma_{dc} + \delta p \quad (1 > \delta > 0, \sigma > p),$$

где σ_{dc} — прочность породы при равномерном двусосном сжатии; δ — некоторая эмпирическая постоянная.

При помощи уравнений (7.6), (7.7) получаем выражение для предельной глубины бурения H_{**} в случае закрепления ствола скважины:

$$H_{**} = \frac{\sigma_{dc}}{\rho_H g (1 - \delta) + \varepsilon \sqrt{\rho \rho_H - \frac{1}{4} \rho_H^2 - \frac{1}{2} \rho^2}}.$$

Например, при $\rho = 1,7\rho_H$, $\delta = 1/2$, $\rho_H g = 2$ г/см³, $\sigma_{dc} = 20$ кг/мм² $H_{**} = 20$ км. Для менее прочных пород эта глубина может быть значительно меньше. При $H > H_{**}$ происходит самоподдерживающееся разрушение забоя.

Аналогичным образом можно дать оценку напряжений на забое незакрепленной скважины, однако эта оценка представляет меньший интерес, так как в этом случае наибольшие напряжения имеют место на стенках скважины вдали от забоя.

Полученные результаты по устойчивости и кавернообразованию пород можно обобщить, считая во всех вышеприведенных формулах величину σ_c функцией температуры и времени нагружения; например, согласно температурно-временной аналогии, естественно взять следующую зависимость:

$$\sigma_c = \sigma_{c0} \left(1 - \frac{RT}{U} \ln \frac{\tau}{\tau_0} \right),$$

где τ — время, прошедшее с момента прохождения забоем рассматриваемого объема породы; σ_{c0} и τ_0 — некоторые экспериментально определяемые постоянные, не зависящие от температуры и времени; T — абсолютная температура; R — газовая постоянная; U — энергия активации. При этом потеря устойчивости и кавернообразование будут начинаться в наиболее верхних участках незакрепленной скважины в однородной породе; учет слоистости пород можно провести по тем же формулам.

Поступила 21 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Вадецкий Ю. В. Бурение нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1973.
2. Володин Ю. И. Основы бурения. М.: Недра, 1978.
3. Mauger W. C. Novel Drilling Techniques. Oxford: Pergamon Press, 1968.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
5. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. — В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975.
6. Черепанов Г. Р. Mechanics of Brittle Fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979.
7. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
8. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977.
9. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: ИЛ, 1954.
10. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения. — ДАН СССР, 1946, т. 51, с. 267; 1948, т. 60, с. 29.
11. Тейлор Дж. П. Поверхности раздела между вязкими жидкостями в узких щелях. — В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961.