ПМТФ, № 1, 1975

УДК 532.5

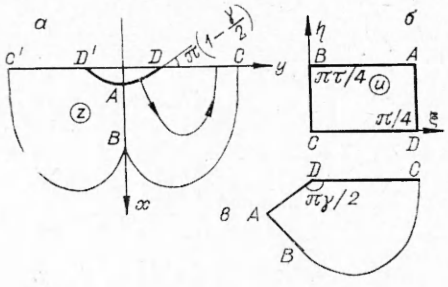
О ВЗРЫВЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТА ЛИНЕЙНО-РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЗАРЯДА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Л. М. Котляр

(Казань)

Рассматривается в импульсной постановке, предложенной М. А. Лаврентьевым [1,2], плоская задача о взрыве на поверхности грунта линейно-распределенного заряда криволинейной формы. Впервые задача о взрыве прямолинейного заряда в такой постановке была решена в [2]. Грунт считается идеальной несжимаемой жидкостью при скоростях, больших некоторой критической скорости, которая остается постоянной вдоль границы воронки; вне этой границы среда неподвижна. Потенциал скорости предполагается постоянным на заряде и равен нулю на поверхности грунта.

1. Рассмотрим плоское потенциальное установившееся течение идеальной невесомой жидкости в части плоскости $z=x+iy$, ограниченное криволинейным участком $D'AD$, прямолинейными границами $D'C'$ и DC, на которых постоянен потенциал скорости, и линией тока $C'BC$, на которой модуль скорости постоянен и равен V_0. Ось x направлена вертикально вниз и является осью симметрии течения; ось y направлена по горизонтальной поверхности (фиг. 1,*а*).



Фиг. 1

В силу симметрии будем рассматривать только правую половину течения.

Для решения задачи введем вспомогательное комплексное переменное $u=\xi+i\cdot\eta$, изменяющееся в области G — прямоугольнике со сторонами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi\cdot\tau}{4}$ $(\tau=i\,|\tau|)$, и будем искать функцию $z(u)$, конформно отображающую область G на область течения с соответствием точек, указанном на фиг. 1, *б*.

Следуя [2], запишем граничные условия для комплексного потенциала $W(u)=\varphi+i\psi$

$$\operatorname{Re} W=\varphi=\varphi_0,\quad u=\frac{\pi}{4}+i\eta,$$

$$\operatorname{Re} W=\varphi=0,\quad u=\xi,$$

$$\operatorname{Im} W=\psi=\text{const},\quad u=i\eta,\quad u=\xi+\frac{\pi\cdot\tau}{4}.$$

Функция $\frac{dW}{du}$, как видно из (1. 1), чисто мнима на $BCД$ и вещественна на BAD. Следовательно, ее можно продолжить по принципу симметрии на всю плоскость. В области G $\frac{dW}{du}$ имеет нуль первого порядка в точке B

п полюс первого порядка в точке D (вихрь). На основании теории эллиптических функций [3], найдем

$$(1.2)\qquad -iNF(u)=\frac{dW}{du}=-iN\frac{\vartheta_1\left(u-\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_1\left(u+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(u-\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(u+\frac{\pi\tau}{4}\right)}{\vartheta_1\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_1\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_4\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_4\left(u+\frac{\pi}{4}\right)},$$

где N — вещественная положительная постоянная, $\vartheta_k(u)$ — тэта-функции для периодов π и $\pi\tau$ [3].

Определяя из (1. 2) $W(u)$ в точке D, выразим постоянную N через φ_0

$$(1.3)\qquad N=\frac{\varphi_0}{\pi}M,\quad M=2\left[\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{\left|\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right|}\right]^2,$$

где $\vartheta_k=\vartheta_k(0)$.

Рассмотрим функцию Жуковского $X(u)=\ln\frac{1}{V}\cdot\frac{dW}{dz}=\ln\frac{V}{V_0}-i\Theta=$ $=r-i\Theta$, где V — модуль скорости, Θ — угол наклона вектора скорости к оси x.

На прямолинейных участках границы функция $X(u)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$(1.4)\qquad \begin{aligned}&\operatorname{Im}X(u)=-\Theta=-\pi,\quad u=\xi,\\ &\operatorname{Im}X(u)=-\Theta=0,\quad u=\xi+\frac{\pi\tau}{4}.\end{aligned}$$

На свободной границе $V=V_0$ и

$$(1.5)\qquad \operatorname{Re}X(u)=r=0,\quad u=i\eta.$$

Пусть на криволинейной дуге AD задан угол, образованный касательной с осью абсцисс $\beta(s)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки A и отнесенная к полной длине дуги AD l. Тогда безразмерная кривизна дуги $\varkappa(\beta)=\frac{d\beta}{ds}$ и, так как $\beta=\Theta+\frac{\pi}{2}$,

$$(1.6)\qquad \varkappa(\Theta)=\frac{d\Theta}{ds}.$$

Учитывая (1. 2), (1. 3) и (1. 6), **получим** граничное условие для $X(u)$ при $u=\frac{\pi}{4}+i\eta$

$$(1.7)\qquad \frac{d\Theta}{d\eta}=\delta\frac{M}{\pi}\varkappa(\Theta)\left|F\left(\frac{\pi}{4}+i\eta\right)\right|e^{-r(\eta)},$$

где $\delta=\frac{\varphi_0}{V_0l}$ — безразмерный параметр.

Будем искать функцию $X(u)$ в виде

$$(1.8)\qquad X(u)=X_*(u)-f(u),$$

где $f(u)=\mu+i\varepsilon$ — аналитическая в G и непрерывная в $\bar{G}$ функция, а $X_*(u)=r_*-i\Theta_*$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$(1.9)\qquad \begin{aligned}&\operatorname{Im}X_*(u)=-\Theta_*=-\pi,\quad u=\xi,\\ &\operatorname{Im}X_*(u)=-\Theta_*=-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right),\ u=\xi+\frac{\pi\tau}{4},\quad u=\frac{\pi}{4}+i\eta,\\ &\operatorname{Re}X_*(u)=r_*=0,\quad u=i\eta,\end{aligned}$$

где $\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$ —угол, образованный касательной к линии AD в точке D с осью y (фиг. 1, *а*).

Из (1.9) видно, что функция $X_*(u)$ является функцией Жуковского для задачи о плоском течении идеальной невесомой жидкости по схеме (фиг. 1, *в*), которая получается заменой дуги AD отрезком прямой и поворотом линии тока AB на угол $\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$.

Производная функции $X_*(u)$ чисто вещественна на CD и BA и чисто мнима на BC и AD. Представляя ее в виде линейной комбинации логарифмических производных тэта-функций [3] и интегрируя, найдем

$$(1.10)\qquad X_*(u)=i\pi(\gamma-1)+\gamma\ln\frac{\vartheta_1\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_4\left(u+\frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta_1\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_4\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Сравнивая граничные условия для $X(u)$ (1.4), (1.5), (1.7) и $X_*(u)$ (1.9), получим граничные условия для неизвестной функции $f(u)$

$$(1.11)\qquad \varepsilon_\eta{}^1=\delta\frac{M}{\pi}\varkappa(\Theta)\nu(\eta)e^{\mu(\eta)},\quad u=\frac{\pi}{4}+i\eta,$$

$$(1.12)\qquad \begin{aligned}&\operatorname{Re}f(u)=\mu=0,\quad u=i\eta,\\&\operatorname{Im}f(u)=\varepsilon=0,\quad u=\xi,\\&\operatorname{Im}f(u)=\varepsilon=-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right),\quad u=\frac{\pi\tau}{4}+\xi;\end{aligned}$$

где $\nu(\eta)=\left|F\left(\frac{\pi}{4}+i\eta\right)\right|\exp(-r_*(\eta))$.

С помощью формулы Вудса [4] можно ввести оператор, определяющий на AD вещественную часть аналитической в G функции по значениям производной ее мнимой части на AB и удовлетворяющий граничным условиям (1.11), и можно доказать однозначную разрешимость краевой задачи (1.11), (1.12) для достаточно малых значений углового размера дуги.

2. Отобразим область G на полукольцо $\rho\leqslant|\zeta|\leqslant 1$ с помощью функции

$$(2.1)\qquad \zeta=\exp\left(\frac{4u-\pi}{|\tau|}\right),\quad \rho=e^{-\frac{\pi}{|\tau|}}$$

и рассмотрим функцию

$$(2.2)\qquad p(\zeta)=f(u(\zeta))+\ln\zeta\left(1-\frac{\gamma}{2}\right).$$

Эта функция, согласно (1.9), должна удовлетворять граничным условиям

$$(2.3)\qquad \operatorname{Im}p(\zeta)=0,\quad \operatorname{Im}\zeta=0.$$

Следовательно, $P(\zeta)$ продолжима на все кольцо по принципу симметрии и ее можно представить в кольце в виде ряда Лорана

$$(2.4)\qquad p(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\zeta^n,$$

где c_n — вещественные коэффициенты.

Учитывая (2.1), (2.2), будем иметь из (2.4)

$$f(u) = -\frac{(4u-\pi)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{|\tau|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{4u-\pi}{|\tau|}\cdot n}. \tag{2.5}$$

Из первого граничного условия (1.8) получим

$$\operatorname{Re} f(u)_{u=i\eta} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{-\frac{\pi n}{|\tau|}} + c_n e^{\frac{\pi n}{|\tau|}}\right)\cos\frac{n4\eta}{|\tau|} + \frac{\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{|\tau|} = 0, \tag{2.6}$$

$$c_0 = -\frac{\pi}{|\tau|}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right), \quad c_{-n} = -c_n\rho^{2n}, \quad \rho = e^{-\frac{\pi}{|\tau|}}.$$

Подставляя выражения вещественной и мнимой частей $f(u)$ из (2.5) в (1.12), с учетом (2.6) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(1-\rho^{2n})\frac{4n}{|\tau|}\cos\frac{4n}{|\tau|}\eta - 4\frac{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{|\tau|} = \delta\frac{M}{\pi}e^{-\frac{\pi}{|\tau|}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}\times \tag{2.7}$$
$$\times\varkappa(\Theta)Q(\eta),$$

$$Q(\eta) = \frac{\left|\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}+i\eta-\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}+i\eta+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right|^2}{|\vartheta_2(i\eta)\,\vartheta_3(i\eta)|^{1+\gamma}\,|\vartheta_1(i\eta)\,\vartheta_4(i\eta)|^{1-\gamma}}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(1-\right.$$
$$\left.-\rho^{2n})\cos\frac{4n}{|\tau|}\eta\right].$$

Интегрируя (2.7) по η в пределах от 0 до $\frac{\pi|\tau|}{4}$, найдем условие, которому должны удовлетворять коэффициенты c_n,

$$-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right) = \delta\frac{M}{\pi}e^{-\frac{\pi}{|\tau|}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}I_0, \tag{2.8}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi|\tau|}{2}} \varkappa(\Theta)Q(\eta)\,d\eta.$$

Умножая (2.8) на $\cos\frac{4n}{|\tau|}\eta$ и интегрируя в тех же пределах, получим

$$c_n = -\frac{2\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{n(1+\rho^{2n})}\cdot\frac{I_n}{I_0}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi|\tau|}{4}} \varkappa(\Theta)Q(\eta)\cos\frac{4n}{|\tau|}\eta\,d\eta. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) служит для определения итерационным методом коэффициентов c_n при заданных $|\tau|$ и γ.

После нахождения функции $f(u)$ все геометрические и гидродинамические характеристики течения легко находятся из (1.2), (1.8), (1.10).

3. В качестве примера определялась форма воронки при взрыве заряда круговой формы. В этом случае при $\delta = \frac{\varphi_0}{V_0}R$ (R — радиус дуги AB)

$\varkappa(\Theta)=1$. Параметр δ находится по формулам (1.3) и (2.8)

$$\delta = \frac{\pi}{M} a, \quad \left(a = \frac{\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\rho^{-\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}}{|I_0|} \right). \tag{3.1}$$

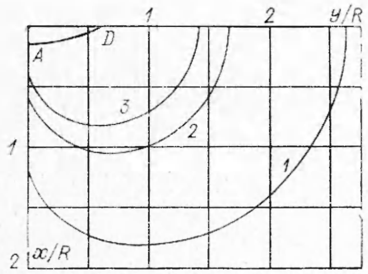
Координаты границы BC находятся из (1.2), (1.8), (1.10)

$$\begin{Bmatrix} x/R \\ y/R \end{Bmatrix} = aI_{x,y},$$

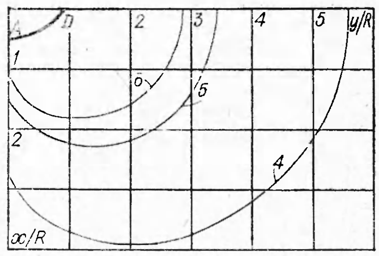
$$I_{x,y} = \int_0^\eta \frac{\left|\vartheta_1\left(i\eta-\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_1\left(i\eta+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(i\eta-\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(i\eta+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right|}{\left|\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}+i\eta\right)\cdot\vartheta_4\left(\frac{\pi}{4}+i\eta\right)\right|^2} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[-4\eta\left(1-\frac{\gamma}{2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n\rho^n \sin\frac{4n}{|\tau|}\eta - 2\gamma\arg\vartheta_1 \times \right.$$

$$\left. \times \left(i\eta+\frac{\pi}{4}\right) - 2\gamma\arg\vartheta_4\left(i\eta+\frac{\pi}{4}\right)\right] d\eta.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Формы воронки выброса представлены на фиг. 2 ($\gamma=5/3$) и фиг. 3 ($\gamma=4/3$). Кривым *1* — *6* соответствуют значения δ=5,05; 2,52; 1,93; 10,81; 5,28;3,96.

Поступила 5 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
2. *Кузнецов В. М.* О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. ПМТФ, 1960, № 3.
3. *Уиттекер Э. Г., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа, ч. II, М., Физматгиз, 1963.
4. *Woods L. C.* Subsonic plane flow in an annulus or a channel with spacewise periodic boundary conditions. Proc. of the Royal. Soc. 1955, Ser. A, vol. 229, No 1176 (Рус. перев. в сб. «Механика», 1965, № 1, с. 52—76).