

может отвечать большой рост деформаций. В местах, где напряжения меньше, наблюдаются прямолинейные участки балки.

У длинных свободно опертых балок ($\xi_* \geq 5$), находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, максимум изгибающего момента смещается из центра к концам балки. Это показано на рис. 4 при $\mu = 1/3$, $\xi_* = 5$. Для длинных жестко заделанных балок, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, изгибающий момент имеет максимальное значение на опоре, а в пролете максимум момента также перемещается из центра к опорам.

Заметим, что при значении μ , стремящемся к нулю, коэффициенты ω и λ , согласно (13), также обращаются в нуль. Этот случай отвечает воздействию мгновенно приложенной постоянной нагрузки на балку из идеального жесткопластического материала.

Вырожденное решение можно найти в задаче о распространении продольных волн. Используя зависимости, приведенные в [5], можно получить решение о продольном ударе по торцу нелинейно-упругого стержня, другой конец которого свободен или закреплен. При этом решение записывается в квадратурах и выражается через эллиптические интегралы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. Ястребов В. П. Автомоделные задачи динамического изгиба бесконечных нелинейно-упругих балок // ПМТФ. — 1981. — № 4.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. — М.: Наука, 1977. — Ч. 2.
5. Ястребов В. П. Автомоделные задачи о распространении продольных волн в нелинейных средах // ПМТФ. — 1985. — № 4.

Поступила 3/X 1986 г.

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Л. Г. Доборджинидзе

(Тбилиси)

Для материала гармонического типа [1] рассматривается плоская обратная задача нелинейной теории упругости об определении равнопрочного контура отверстия. В линейном классическом случае эта задача решена в [2].

1. Пусть рассматриваемая нелинейно-упругая среда занимает плоскость переменной $z = x + iy$, ослабленной криволинейным отверстием. Предположим, что к контуру L этого отверстия приложены постоянные нормальные усилия [3]

$$(1.1) \quad \sigma_n = P_0, \quad \tau_n = 0,$$

а на бесконечности реализуется двухосное растяжение вдоль координатных осей

$$(1.2) \quad \sigma_x^{(\infty)} = P_1, \quad \sigma_y^{(\infty)} = P_2.$$

В этих условиях требуется найти форму и расположение контура L таким образом, чтобы во всех его точках тангенциальное напряжение σ_t было постоянным

$$(1.3) \quad \sigma_t = \sigma$$

(σ — неизвестная пока постоянная).

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями полей напряжений и деформаций через аналитические в рассматриваемой физической области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [4, 5]:

$$(1.4) \quad \sigma_x + \sigma_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{J}} q \Omega(q),$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{J}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}};$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi'^2(z) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}; \quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z) \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} - \overline{\psi'(z)} \right];$$

$$(1.6) \quad \sqrt{J} = \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial z}, \quad q = 2 \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|, \quad \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

(λ, μ — упругие постоянные Ламэ). При больших $|z|$ эти функции имеют асимптотику

$$(1.7) \quad \varphi(z) = a_0 z + O(z^{-1}), \quad \psi(z) = b_0 z + O(z^{-1})$$

(a_0, b_0 — известные постоянные [6]);

$$(1.8) \quad a_0 = \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu(P_1 + P_2) + P_1 P_2 + 4\mu^2}{\lambda(P_1 + P_2) - P_1 P_2 + 4\mu(\lambda + \mu)} \right]^{1/2},$$

$$b_0 = \frac{(\lambda + 2\mu)(P_1 - P_2)}{\lambda(P_1 + P_2) - P_1 P_2 + 4\mu(\lambda + \mu)}.$$

Из сравнения соотношений (1.4) следует равенство

$$(1.9) \quad \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial z} = \frac{\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}}{\sigma_x + \sigma_y + 4\mu} \frac{\partial z^*}{\partial z},$$

с использованием которого на основании (1.4), (1.5) и (1.6) после некоторых вычислений имеем

$$(1.10) \quad \sigma_x + \sigma_y + 4\mu = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu) |\varphi'^2(z)|}{(1 - A) [\mu |\varphi'^2(z)| + \lambda + \mu]};$$

$$(1.11) \quad A = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x + \sigma_y + 4\mu)^2}.$$

2. Рассматриваемую физическую область S отобразим конформно и взаимно однозначно функцией

$$(2.1) \quad z = \omega(\zeta) \quad (\omega(\zeta) = R\zeta + O(\zeta^{-1}) \text{ при больших } |\zeta|)$$

на внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ плоскости вспомогательной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ и для рассматриваемых величин в преобразованной области сохраним прежние обозначения. Далее будем пользоваться соотношениями [3]

$$(2.2) \quad \tilde{\rho}\tilde{\rho} + \tilde{\theta}\tilde{\theta} = \sigma_x + \sigma_y, \quad \tilde{\theta}\tilde{\theta} - \tilde{\rho}\tilde{\rho} + 2i\tilde{\rho}\tilde{\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\alpha}.$$

Тогда из (1.1), (1.3), (1.10), (1.11), (2.1), (2.2) получим на единичной окружности $|\zeta| = 1$, обозначаемой через γ ,

$$(2.3) \quad \left| \frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'^2(\sigma)} \right| = \frac{(\lambda + \mu)(P_0 + 2\mu)(\sigma + 2\mu)}{\mu[(\lambda + 2\mu)(P_0 + \sigma + 4\mu) - (P_0 + 2\mu)(\sigma + 2\mu)]} = h_0^2 \text{ на } \gamma.$$

Из граничного условия (2.3) с учетом (1.7) и (2.1) после очевидных рассуждений находим

$$(2.4) \quad \varphi'(\zeta) = h_0 \omega'(\zeta)$$

всюду в области $|\zeta| > 1$.

Сравнив (2.4) с первым соотношением (1.7), имеем

$$(2.5) \quad a_0 = h_0,$$

что на основании (1.8) дает связь между рассматриваемыми усилиями в виде

$$(2.6) \quad \sigma = \frac{4\mu^2 (P_1 + P_2) + (P_0 + 4\mu) P_1 P_2 - 4\mu^2 P_0}{P_0(P_1 + P_2) - P_1 P_2 + 4\mu(P_0 + \mu)}.$$

Обратимся теперь к последнему соотношению (1.4) и учтем в нем (1.5), (2.2) и (2.4). Тогда

$$(2.7) \quad \psi'(\sigma) = A_0 \bar{\sigma}^2 \bar{\omega'(\sigma)} \text{ на } \gamma,$$

где A_0 — постоянная, определяемая формулой

$$(2.8) \quad A_0 = \frac{(\lambda + 2\mu)(P_1 + P_2 + 4\mu)^2 (P_0 - \sigma)(\sigma + 2\mu)(P_0 + 2\mu)}{(\sigma + P_0 + 4\mu)^2 [\lambda(P_1 + P_2) - P_1 P_2 + 4\mu(\lambda + \mu)] [2\mu(P_1 + P_2) + P_1 P_2 + 4\mu^2]}.$$

Далее введем обозначения

$$(2.9) \quad F^-(\zeta) = \psi'(\zeta), \quad F^+(\zeta) = \frac{A_0}{\zeta^2} \bar{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Здесь $F^+(\zeta)$ — голоморфная функция в круге $|\zeta| < 1$, за исключением точки $\zeta = 0$, где она имеет полюс второго порядка, а $F^-(\zeta)$ — голоморфная в области $|\zeta| > 1$ и ограниченная при $\zeta = \infty$ функция. Тогда

$$(2.10) \quad F^+(\sigma) = F^-(\sigma) \text{ на } \gamma.$$

Отсюда с использованием известной теоремы Лиувилля [3] и соотношений (1.7), (2.1) находим единую голоморфную в расширенной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ функцию (за исключением точки $\zeta = 0$) $F(\zeta)$ в виде

$$(2.11) \quad F(\zeta) = b_0 R + A_0 R / \zeta^2.$$

Теперь на основании (2.10) и (2.11) получим решение задачи (2.7)

$$(2.12) \quad \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = A_0 \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta^2 - m};$$

$$(2.13) \quad m = -b_0 / A_0.$$

В правую часть (2.13) внесем значения σ , даваемые равенством (2.6):

$$(2.14) \quad m = \frac{(P_1 - P_2)(2\mu + P_0)}{2\mu(P_1 + P_2 - 2P_0) - (P_1 + P_2)P_0 + 2P_1 P_2}.$$

Следовательно, искомые контуры равнопрочных отверстий представляют собой совокупность подобных эллипсов с эксцентриситетом m , определяемым равенством (2.14).

По линейной классической теории имеет место соотношение

$$(2.15) \quad m = (P_1 - P_2) / (P_1 + P_2 - 2P_0)$$

для эксцентриситета и $\sigma = P_1 + P_2 - P_0$ для постоянной σ_t на L .

В таблице приведены значения отношения m_2/m_1 при различных P_i/μ ($i = 1, 2$) сначала в поле двухосного растяжения, а затем — сжатия, m_1 и m_2 — эксцентриситеты по линейной (2.15) и нелинейной (2.14) теориям соответственно.

Как видно из таблицы, в случае двухосного растяжения эксцентриситет искомых равнопрочных эллипсов возрастает, а в случае сжимающих напряжений наблюдается уменьшение этой геометрической характеристики по сравнению с линейным классическим случаем. Зна-

P_2/μ	m_2/m_1				
	P_1/μ				
	0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,2	1	0	1,15	1,17	1,19
	1	0	0,88	0,87	0,86
0,4	1	1,15	0	1,31	1,35
	1	0,88	0	0,81	0,75
0,6	1	1,17	1,31	0	1,51
	1	0,87	0,81	0	0,74

чит, в последнем случае форма эллипса по нелинейной теории более близка к окружности, чем по линейной классической. Этот факт имеет важную практическую ценность.

После определения $\omega(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$ и $\psi'(\zeta)$ функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ находим из (2.4), (2.12) в виде $\varphi(\zeta) = a_0 R(\zeta + m/\zeta)$, $\psi(\zeta) = -A_0 R(m\zeta + 1/\zeta)$. Решение задачи можно считать законченным.

3. Рассмотрим задачу для двух отверстий. В этом случае будем считать, что функция $z = \omega(\zeta)$ осуществляет конформное и взаимно однозначное отображение заданной многосвязной области на внешность разрывов $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ($\Gamma_1 = a_1 b_1$, $\Gamma_2 = a_2 b_2$), расположенных на действительной оси $O\xi$ плоскости переменной $\zeta = \xi + i\eta$.

Тогда рассуждением, аналогичным проведенному в п. 2, можно убедиться, что решение поставленной задачи имеет вид ($a_1 = -b$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = b$)

$$\varphi(\zeta) = a_0 \omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \frac{R(A_0 - b_0)}{2A_0} \zeta + \frac{R(A_0 + b_0)}{2A_0} \left[bE(\varphi, k) - \left(b + \frac{c}{b}\right) F(\varphi, k) \right],$$

$$\psi(\zeta) = \frac{R(b_0 - A_0)}{2} \zeta + \frac{R(A_0 + b_0)}{2} \left[bE(\varphi, k) - \left(b + \frac{c}{b}\right) F(\varphi, k) \right].$$

Здесь R , c — произвольные действительные постоянные; F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \varphi = \arcsin \frac{\xi}{a}, \quad k = \frac{a}{b}.$$

Далее, для сравнения с линейным классическим случаем положим без ограничения общности $a_1 = -2$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 2$. Тогда, следуя рассуждениям [2], определяем постоянную c , а затем и форму контуров в виде

$$c = -\frac{4E(\sqrt{3}/2)}{F(\sqrt{3}/2)} = -2,246, \quad x = -R \left(0,23 + 1,23 \frac{b_0}{A_0} \right) +$$

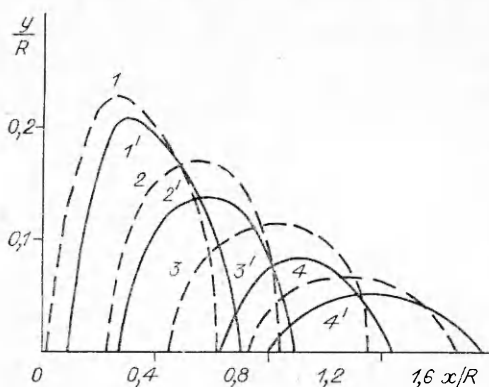
$$+ \frac{R}{2} \left(1 - \frac{b_0}{A_0} \right) (\xi - 1), \quad 1 < \xi < 2, \quad y = -\frac{R}{2} \left(1 + \frac{b_0}{A_0} \right) \left[2E\left(\varphi_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - 1,123 F\left(\varphi_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\xi} \sqrt{(4 - \xi^2)(\xi^2 - 1)} \right], \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{2\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{3}\xi},$$

$$m = \frac{b_0}{A_0} = \frac{(P_1 - P_2)(\sigma + P_0 + 4\mu)^2 (P_1 + 2\mu)(P_2 + 2\mu)}{(P_0 - \sigma)(P_1 + P_2 + 4\mu)^2 (\sigma + 2\mu)(P_0 + 2\mu)}.$$

По линейной классической теории $m = (P_2 - P_1)/(\sigma - P_0)$. На рисунке построены графики семейства равнопрочных контуров отверстий при различных значениях $m = b_0/A_0$ ($x > 0$, $y > 0$). Линии 1—4 отвечают линейному случаю при $m_1 = -0,2$; $-0,4$; $-0,6$; $-0,8$, а 1'—4' — нелинейному при $m_2 = -0,26$; $-0,50$; $-0,61$; $-0,88$.

Анализ приведенных данных показывает, что контуры равнопрочных отверстий, построенные по нелинейной и линейной теориям, отличаются. В некоторых случаях упругого равновесия это отличие может оказаться значительным.



ЛИТЕРАТУРА

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure Applied Math.— 1960.— V. 13, N 2.
2. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 6.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1968.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
5. Доборджинидзе Л. Г. Плоская нелинейная задача о распределении напряжений возле отверстий // ПМ.— 1982.— Т. 13, № 9.
6. Доборджинидзе Л. Г. Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа // Тр. Тбилис. мат. ин-та.— 1979.— Т. 61.

Поступила 20 IX 1986 г.

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Н. Попов, Ю. П. Самарин

(Куйбышев)

Структурная неоднородность материала обуславливает появление ряда механических эффектов, которые не могут быть изучены в рамках классических феноменологических теорий; один из них — эффект пограничного слоя. Суть его состоит в том, что вблизи границы тела со структурной неоднородностью имеется пограничный слой, в котором напряженно-деформированное состояние отлично от напряженно-деформированного состояния внутренних областей. На границе тела возникает концентрация напряжений, которая может достигать заметной величины. Эффект пограничного слоя для упругих тел исследован в [1—6]. В теории ползучести известны решения стохастических задач для внутренних областей, достаточно удаленных от границ тела [7—10], а влияние стохастических неоднородностей вблизи поверхности, на которой заданы краевые условия, до настоящего времени не изучено.

В данной работе рассматривается краевая задача о напряженном состоянии случайно-неоднородной полуплоскости в условиях ползучести. Установлено, что существует узкий пограничный слой, в котором флуктуации напряжений могут быть намного больше, чем в глубине полуплоскости. Приводится пример оценки надежности стохастически неоднородной пластины по критерию разрушения за счет выбросов напряжений.

1. Пусть к границе стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, приложены нагрузки

$$(1.1) \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^0 = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0,$$

а напряжение σ_{11} удовлетворяет условию макроскопической однородности $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^0 = \text{const}$, которое соответствует приложению при $x_1 = \pm h_x$ где h достаточно велико, постоянных по x_2 напряжений σ_{11}^0 .

Решается нелинейная краевая задача ползучести с уравнением состояния типа теории течения в стохастической форме [7]

$$(1.2) \quad \sigma_{ij,j} = 0, \quad \Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\epsilon_{jh,il} = 0, \\ \epsilon_{ij} = cs^n(\sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{mm})[1 + \alpha U(x_1, x_2)]$$

с краевыми условиями (1.1) (все индексы принимают значения 1 и 2). Здесь ϵ_{ij} — компоненты тензора деформаций; Λ_{jk} — единичный антисимметричный псевдотензор; s — интенсивность напряжений; c, n — постоянные материала; $U(x_1, x_2)$ — случайная функция, описывающая флуктуации механических свойств материала ($\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$); α — число, играющее роль коэффициента вариации механических свойств;