УДК 621.78

ПРЕДЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

В. П. Житников, Е. М. Ошмарина, С. С. Поречный, Г. И. Федорова

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа, Россия
E-mails: zhitnik@ugatu.ac.ru, elena_azalka@mail.ru, porechny@mail.ru, g_fed@mail.ru

Для исследования способа прецизионной электрохимической обработки предложена модель, в которой выход по току имеет вид скачкообразной функции плотности тока. Сформулированы и решены задачи предельно стационарной и квазистационарной обработки, что позволило с достаточной точностью исследовать нестационарный процесс.

Ключевые слова: скачкообразная функция выхода по току, квазистационарное решение, конформные отображения, метод коллокаций.

Введение. Моделирование растворения при электрохимической обработке (ЭХО) основано на законе Фарадея, согласно которому скорость растворения равна

$$V_{\text{ЭХО}} = k\eta j, \qquad k = \varepsilon/\rho,$$

где ε — электрохимический эквивалент; ρ — плотность растворяемого материала; j — плотность тока на анодной границе; $\eta = \eta(j)$ — выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла).

При использовании ЭХО с непрерывной подачей тока и поступательным движением электрода-инструмента (ЭИ) в электролите происходят накопление продуктов реакции и другие побочные эффекты, что приводит к уменьшению точности обработки. В настоящее время для повышения точности применяются прецизионные технологии импульсно-циклической ЭХО, в которых на поступательное движение ЭИ накладывается колебательная (обычно синусоидальная) составляющая, а ток подается прямоугольными импульсами в моменты наибольшего сближения ЭИ с деталью. При отходе ЭИ от детали происходит замена отработанного электролита. Вследствие малости скоростей ЭХО (несколько миллиметров в минуту) и кратковременности импульсов (порядка 1–3 мс) изменение размера межэлектродного зазора за один период можно считать малой величиной. Тогда можно применить дискретно-непрерывную модель процесса, для которой справедлива указанная выше зависимость скорости растворения от плотности тока, при этом коэффициент пропорциональности k уменьшается в Q раз (Q — скважность импульса).

В данной работе рассматриваются прецизионные технологии обработки, характеризующиеся высокой степенью локализации процесса растворения, которая в случае ЭХО определяется коэффициентом

$$k_{loc} = \frac{S}{V_{\text{ЭХО}}}\Big|\frac{dV_{\text{ЭХО}}}{dS}\Big|$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания образовательным организациям высшего образования (код проекта 2229).

(S — размер зазора между электродами). При заданной зависимости выхода по току от плотности тока $\eta(j)$ и постоянных потенциалах электродов коэффициент локализации вычисляется по формуле [1]

$$k_{loc} = 1 + \frac{j}{\eta}\frac{d\eta}{dj}.$$

Для повышения степени локализации используются пассивирующие электролиты, в которых электрохимическое растворение происходит только при плотностях тока, превышающих некоторое критическое значение j_1, что подтверждается экспериментальными данными [2, 3]. В работах [4–7] зависимость $\eta(j)$ для таких электролитов аппроксимируется гиперболической зависимостью

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0(1 - j_1/j), & j > j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases}$$

В рассматриваемых процессах существенное увеличение коэффициента локализации имеет место при малых значениях плотности тока ($j_1 \approx 20$ А/см^2), что обусловлено потерей производительности.

В последнее время разработаны технологии, характеризующиеся высокой точностью и производительностью [1]. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при использовании таких технологий процесс растворения резко прекращается при достижении критического значения j_1, т. е. зависимость $\eta(j)$ имеет разрыв первого рода [8]. Уменьшение длины импульса приводит к сдвигу j_1 в сторону больших значений (до $j_1 \approx 100$ А/см^2) [1], что подтверждается, в частности, наличием четко выраженных границ между зонами растворения и нерастворения.

1. Задача прецизионной стационарной ЭХО. В работах [8–10] предложено исследовать процесс ЭХО в случае скачкообразной зависимости выхода по току от плотности тока

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \tag{1}$$

Такая модель позволяет описать прецизионные процессы, однако в соответствии с условием (1) необходимо изменить формулировку и методы решения задач.

Рассмотрим стационарную задачу об электрохимической обработке с помощью ЭИ в виде клина $A'CB'$ с углом раствора, равным $\pi/2$, движущегося вертикально вниз с постоянной скоростью V_{et}. Сечение межэлектродного пространства, показанное на рис. 1,*а*, не изменяется со временем, происходит только его сдвиг вниз на величину $V_{et}t$.

Электрическое поле считается потенциальным и соленоидальным. Для решения задачи применяются методы теории функций комплексной переменной.

На границах, соответствующих границам ЭИ и обрабатываемой поверхности, потенциал φ считается постоянным, поэтому областью, соответствующей межэлектродному пространству на плоскости комплексного потенциала W, является полоса шириной U (U — разность потенциалов между электродами) (см. рис. 1,*б*).

Зависимость выхода по току от напряженности определяется скачкообразной функцией (1). На обрабатываемой поверхности имеется два участка с краевыми условиями двух типов. На первом участке AD вследствие близости к поверхности ЭИ напряженность превышает значение $E_1 = j_1/\varkappa$ ($\varkappa$ — электропроводность электролита) и выполняется условие стационарности $V_{\text{ЭХО}} = V_{et}\cos\gamma$ (γ — угол между направлением движения ЭИ и нормалью к анодной поверхности) [2]. В плоскости годографа с напряженностью $\bar{E} = dW/dZ = |E|\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ (θ — угол наклона вектора напряженности к оси X) (см. рис. 1,*в*)

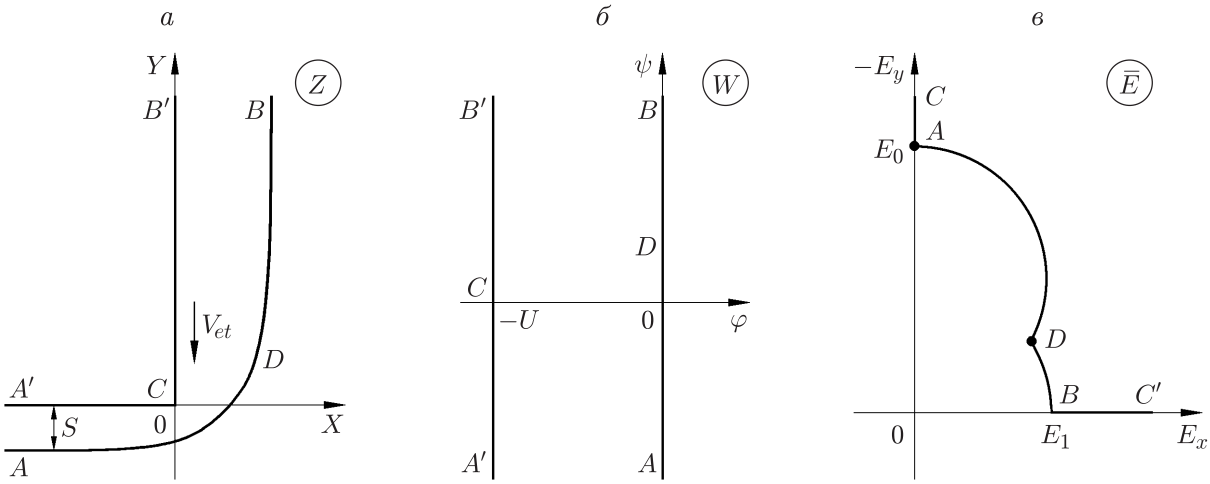

Рис. 1. Формы межэлектродного пространства на различных плоскостях для стационарной задачи:
а — физическая плоскость; *б* — плоскость комплексного потенциала; *в* — плоскость годографа напряженности

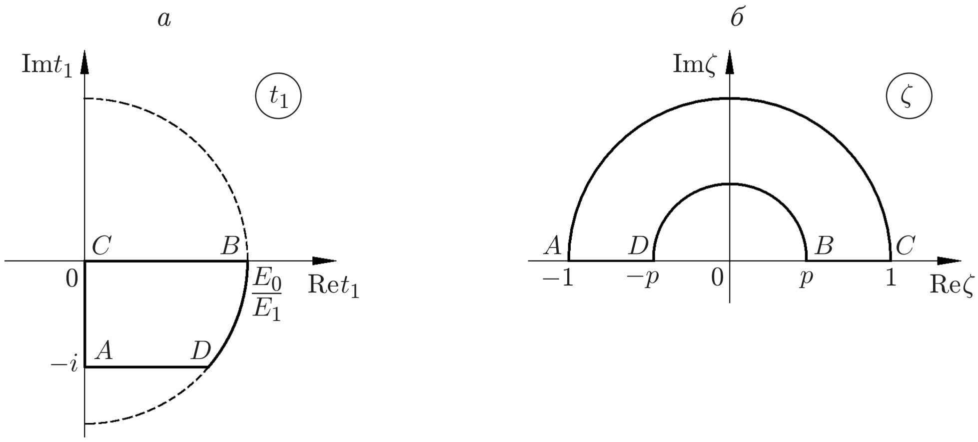

Рис. 2. Формы межэлектродного пространства на параметрических плоскостях t_1 (*а*) и ζ (*б*) для стационарной задачи

участку AD соответствует дуга окружности радиусом $E_0/2$ с центром в точке $iE_0/2$, где $E_0 = V_{et}/(k\eta_0\varkappa)$ — напряженность в точке A. Участку DB с постоянным модулем напряженности на плоскости $\bar{E}$ соответствует дуга окружности радиусом $E_1 \leqslant E_0$ с центром в начале координат. Поскольку поверхности электродов эквипотенциальны, вектор напряженности на границе направлен по нормали к ней в каждой точке. Поэтому на участках границы $A'C$ и CB' угол наклона вектора напряженности к оси X равен $\theta = -\pi/2$; 0 соответственно. В плоскости годографа этим участкам соответствуют вертикальный и горизонтальный лучи.

Введем параметрические плоскости $t_1 = E_0/\bar{E}$ и ζ. Области межэлектродного пространства на этих плоскостях показаны на рис. 2. Задача решается с помощью метода, использованного в [8, 9] для решения задач обработки точечным и горизонтальным пластинчатым ЭИ.

Функция $t_1(\zeta)$ представляется в виде суммы известной функции с заданными особенностями, учитывающими свойства решения, и ряда Лорана с действительными коэффи-

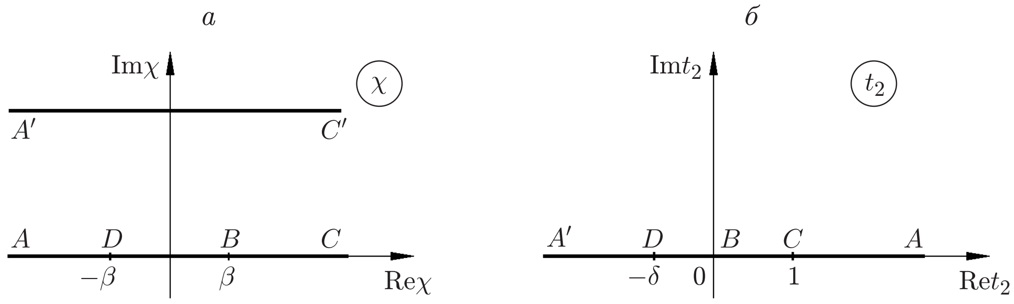

Рис. 3. Формы межэлектродного пространства на параметрических плоскостях χ (*а*) и t_2 (*б*)

циентами:

$$t_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\ln\zeta + \sum_{m=1}^{\infty} d_m(\zeta^m - \zeta^{-m}). \qquad (2)$$

На трех участках границы функция (2) удовлетворяет следующим условиям:

$$BC\colon\quad \operatorname{Im} t_1 = 0, \qquad AC\colon\quad \operatorname{Re} t_1 = 0, \qquad AD\colon\quad \operatorname{Im} t_1 = -1.$$

На участке BD условие $|t_1| = E_0/E_1$ выполняется за счет подбора коэффициентов d_m.

Для построения отображения $W(\zeta)$ целесообразно использовать промежуточные плоскости. Рассмотрим полосу на плоскости χ (рис. 3,*а*). Будем искать функцию $\chi(\zeta)$ в виде

$$\chi(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1}(\zeta^{2m-1} + \zeta^{-2m+1}).$$

Разложим логарифм в ряд Тейлора. Так как при $\zeta = p\,\mathrm{e}^{i\sigma}$ (участок границы DB) должно выполняться условие $\operatorname{Im}[\chi(p\,\mathrm{e}^{i\sigma})] = 0$, то

$$c_{2m-1} = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2m-1}\,\frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}}.$$

Таким образом, функция $\chi(\zeta)$ представляется в виде ряда с известными коэффициентами

$$\chi(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\,\frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}}\,(\zeta^{2m-1} + \zeta^{-2m+1}).$$

В частности,

$$\beta = \chi(p) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{1-p}{1+p} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\,\frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}}\,(p^{2m-1} + p^{-2m+1}).$$

Чтобы перейти с полосы в плоскости χ на полосу в плоскости W, используем верхнюю полуплоскость t_2 (см. рис. 3,*б*). Тогда

$$\chi = -\frac{1}{\pi}\ln(t_2 - 1) + i + \beta, \qquad W = -i\,\frac{U}{\pi}\ln t_2 - U.$$

Выразив t_2 через χ, получаем

$$t_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\pi(\chi-\beta)}, \qquad W = -i\,\frac{U}{\pi}\ln(\mathrm{e}^{-\pi(\chi-\beta)} - 1).$$

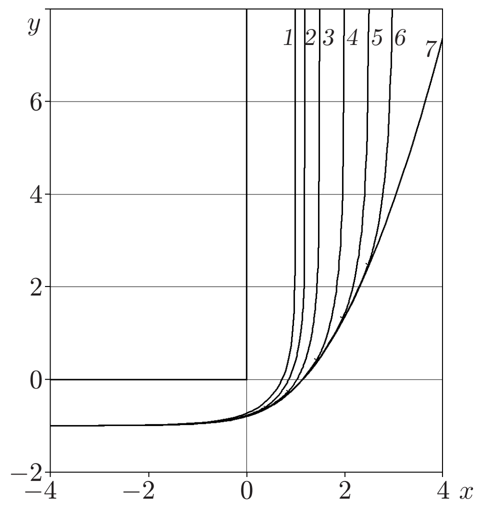

Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности:
1 — $\alpha = 1{,}0$, *2* — $\alpha = 1{,}2$, *3* — $\alpha = 1{,}5$, *4* — $\alpha = 2{,}0$, *5* — $\alpha = 2{,}5$, *6* — $\alpha = 3{,}0$, *7* — $\alpha = \infty$

Найдем производные $dW/d\zeta$ и $dZ/d\zeta$:

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{d\chi}\,\frac{d\chi}{d\zeta} = i\,\frac{4U}{\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi(\chi-\beta)}}{1-\mathrm{e}^{-\pi(\chi-\beta)}}\Big(\frac{1}{\zeta^2-1} + \frac{1}{\zeta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1}-p^{-2m+1}}\,(\zeta^{2m-1}-\zeta^{-2m+1})\Big);$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{dZ}{dW}\,\frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{E_0}\,t_1(\zeta)\,\frac{dW}{d\zeta}. \tag{3}$$

Таким образом, алгоритм решения задачи сводится к определению коэффициентов ряда Лорана d_m методом коллокаций с использованием условия $|t_1(p\,\mathrm{e}^{i\sigma})| = \alpha = E_0/E_1$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ и к численному интегрированию выражения (3).

Формы обрабатываемой поверхности показаны на рис. 4. Заметим, что для данной задачи отношение асимптотических значений размеров бокового S_s и торцевого S зазоров равно $S_s/S = \alpha$.

При $\alpha \to \infty$ зона постоянной напряженности исчезает и решение переходит в стационарное решение [11]

$$z = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{w}\ln\big(\sqrt{\mathrm{e}^{-i\pi w}+1} + \mathrm{e}^{-i\pi w/2}\,\big)\,dw - i(w+1),$$

где $w = W/U$; $z = Z/S$; $S = U/E_0$.

При $\alpha \to 1$ ($E_1 \to E_0$, $D \to A$) зона активного растворения исчезает, а зона постоянной напряженности охватывает всю обрабатываемую поверхность. В результате возникает предельно стационарный режим, который для данной задачи описывается решением [4]

$$z = -i\,\frac{2}{\pi}\Big(\ln\frac{t_3-1}{t_3+1} + i\ln\frac{t_3-i}{t_3+i}\Big),$$

где $t_3 = \sqrt{(\mathrm{e}^{-i\pi w/2}+i)/(\mathrm{e}^{-i\pi w/2}-i)}$.

Следует отметить, что предельно стационарный режим отличается от предельного [4, 11] тем, что, как и при стационарном режиме, форма межэлектродного пространства в системе координат, связанной с подвижным ЭИ, сохраняется.

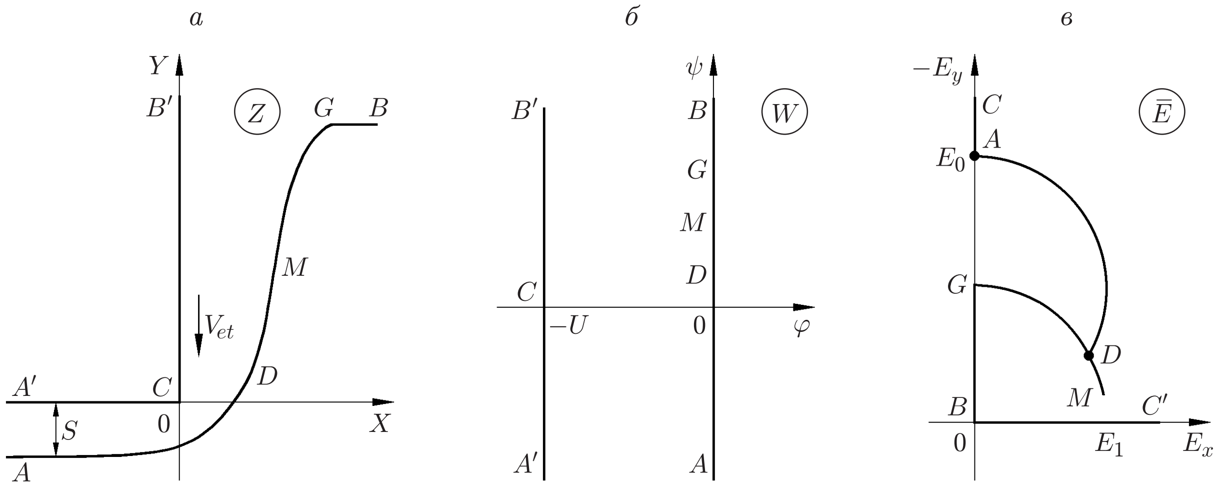

Рис. 5. Формы межэлектродного пространства на различных плоскостях для квазистационарной задачи:
а — физическая плоскость; *б* — плоскость комплексного потенциала; *в* — плоскость годографа напряженности

2. Квазистационарная модель ЭХО. Наряду с известными задачами ЭХО: стационарной, предельной, автомодельной и нестационарной общего вида, рассмотренными в [1, 4–10], условие (1) позволяет сформулировать задачи нового типа: предельно стационарную и квазистационарную.

Рассмотрим задачу об изменении формы поверхности при обработке ЭИ в виде клина $A'CB'$ с углом раствора, равным $\pi/2$, движущегося вертикально вниз с постоянной скоростью V_{et} (рис. 5,*а*). Образом межэлектродного пространства на плоскости комплексного потенциала является полоса шириной U (рис. 5,*б*).

При квазистационарном процессе с зависимостью выхода по току от плотности тока (1) на обрабатываемой поверхности образуются три участка. На горизонтальном участке GB, где $|E| < E_1$, растворение отсутствует ($\theta = -\pi/2$). На участке AD напряженность за счет близости к ЭИ превышает значение E_1 и выполняется условие стационарности, приведенное выше. В плоскости годографа напряженности $\bar{E} = dW/dZ$, как и в предыдущей задаче, участку AD соответствует дуга окружности радиусом $E_0/2$ с центром в точке $iE_0/2$ (см. рис. 5,*в*). Переходному участку DMG (M — точка перегиба границы обрабатываемой поверхности) соответствует дуга окружности радиусом $E_1 \leqslant E_0$ с центром в начале координат. Граница на плоскости $\bar{E}$ может содержать разрез по дуге $|\bar{E}| = E_1$. Однако разрез на продолжении дуги AD невозможен, поскольку при $|\bar{E}| < E_1$ условие стационарности не выполняется.

Изменение времени моделируется сдвигом электрода-инструмента $A'CB'$ в направлении обрабатываемой поверхности относительно ее исходного положения на величину $L = V_{et}t$ (t — время). Величина сдвига L определяет положение конца разреза M.

Введем параметрические плоскости $t_1 = E_0/\bar{E}$ и ζ. Области межэлектродного пространства на этих плоскостях показаны на рис. 6. Конформное отображение $t_1(\zeta)$ проще найти путем численного интегрирования производной

$$\frac{dt_1}{d\zeta} = \frac{1}{(\zeta^2+\gamma^2)^{1/2}(\zeta^2+\beta^2)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}\zeta^{2m}, \qquad (4)$$

поскольку на участках границы AD, AC и BG производная имеет действительные значения, на участке BC — мнимые.

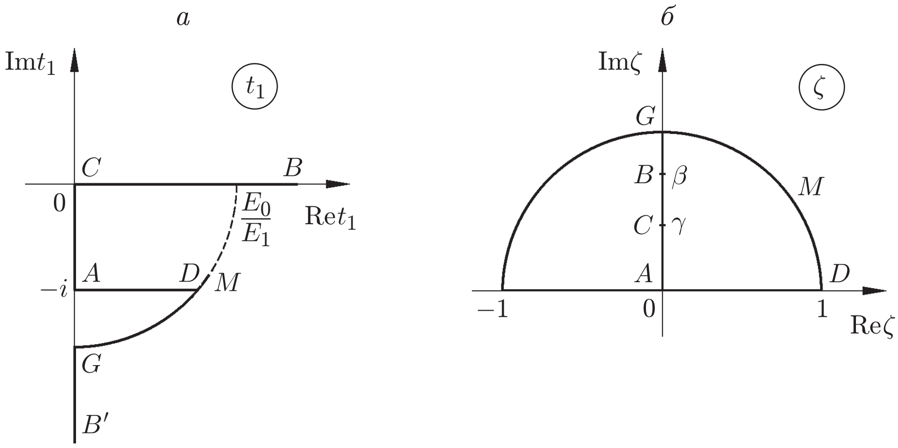

Рис. 6. Формы межэлектродного пространства на параметрических плоскостях t_1 (*а*) и ζ (*б*) для квазистационарной задачи

Для получения отображения $W(\zeta)$ используем метод особых точек Чаплыгина:

$$W(\zeta) = -i\,\frac{U}{\pi}\ln\frac{(\zeta^2+\beta^2)(\zeta^2+\beta^{-2})}{2\zeta^2} + c$$

(c — константа). Функция $Z(\zeta)$ находится путем численного интегрирования:

$$Z(\zeta) = \frac{1}{E_0}\,W(\zeta)\int\limits_{i\gamma}^{\zeta}\frac{dt_1}{d\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{E_0}\int\limits_{i\gamma}^{\zeta}W(\zeta)\,\frac{dt_1}{d\zeta}\,d\zeta. \tag{5}$$

Задача решается методом коллокаций, т. е. в сумме (4) сохраняется N слагаемых, а параметры c_{2m} и β определяются с использованием условия $|t_1(p\,e^{i\sigma})| = \alpha = E_0/E_1$, заданного на дискретном множестве узловых точек $\sigma_m = m\pi/(2N)$. При этом функцию $t_1(\zeta)$ можно вычислить, численно интегрируя (4) с условиями $t_1(i\gamma) = 0$, $t_1(0) = -i$, $\mathrm{Re}\,t_1(i) = 0$. Параметр γ определяется по заданному значению L.

Расчет формы обрабатываемой поверхности проводится путем численного интегрирования (5).

Введем обозначения $U/E_1 = H$, $z = Z/H$, $\tau = tV_{et}/H$. Так как $L = V_{et}t$, то $\tau = L/H$. На рис. 7,*а* показаны формы обрабатываемой поверхности в неподвижной системе координат при $\alpha = 2$. Видно, что вблизи зоны GB, в которой растворения не происходит, образуется предельная форма (кривая *8*), соответствующая известному решению задачи об истечении жидкости из-под щита [12].

На рис. 7,*б* показаны формы обрабатываемой поверхности в системе координат, связанной с движущимся ЭИ. Это позволяет обнаружить стационарную конфигурацию (кривая *8*).

Заключение. Использование предложенной модели ЭХО со скачкообразной функцией выхода по току дает возможность исследовать формообразование при предельно высокой степени локализации процесса растворения в соответствии с принятой моделью. Сформулированы и решены задачи стационарной и квазистационарной ЭХО, что позволило изучить зависимость формы обрабатываемой поверхности от времени, не решая нестационарную задачу. При этом изменение времени моделировалось сдвигом кромки ЭИ вниз и заглублением в тело заготовки. Формулировка такой задачи возможна при существовании переходного участка с постоянным модулем напряженности. Как показывают численные

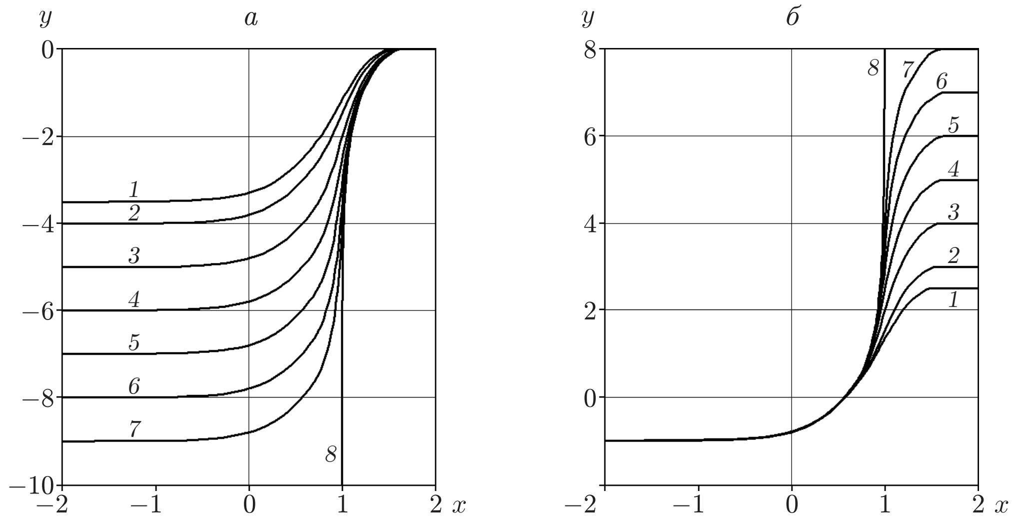

Рис. 7. Формы обрабатываемой поверхности:
а — в неподвижной системе координат, *б* — в системе координат, связанной с кромкой ЭИ; *1* — $\tau = 2{,}5$, *2* — $\tau = 3{,}0$, *3* — $\tau = 4{,}0$, *4* — $\tau = 5{,}0$, *5* — $\tau = 6{,}0$, *6* — $\tau = 7{,}0$, *7* — $\tau = 8{,}0$, *8* — $\tau = \infty$

исследования, квазистационарные решения достаточно точно описывают нестационарный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Житников В. П.** Импульсная электрохимическая размерная обработка / В. П. Житников, А. Н. Зайцев. М.: Машиностроение, 2008.
2. **Седыкин Ф. В., Орлов Б. П., Матасов В. Ф.** Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении // Технология машиностроения. 1975. Т. 39. С. 3–10.
3. **Поречный С. С., Муксимова Р. Р., Маннапов А. Р.** Моделирование процесса формообразования выступов при электрохимической обработке // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2010. Т. 14, № 2. С. 195–201.
4. **Каримов А. Х.** Методы расчета электрохимического формообразования / А. Х. Каримов, В. В. Клоков, Е. И. Филатов. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1990.
5. **Котляр Л. М.** Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ / Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов. М.: Academia, 2005.
6. **Миназетдинов Н. М.** Об одной задаче теории размерной электрохимической обработки металлов // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 214–220.
7. **Миназетдинов Н. М.** Гидродинамическая интерпретация задач теории размерной электрохимической обработки металлов // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 60–68.
8. **Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И.** Моделирование электрохимического формообразования при ограничениях на растворение // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. 2009. № 4. С. 221–224.
9. **Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И.** Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 77–81.

10. **Житников В. П., Ошмарина Е. М., Зиннатуллина О. Р.** Моделирование прецизионной электрохимической обработки секционированным катодом // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 185–192.
11. **Клоков В. В.** Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1984.
12. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 30/V 2013 г.