

ЛОКАЛЬНО-ОДНОРОДНЫЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СУСПЕНЗИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭЙЛЕРА

Ю. А. Бувич, Е. Н. Ившин, В. Г. Марков

(Москва)

Псевдотурбулентные движения фаз и внутренняя структура монодисперсной локально-однородной суспензии частиц в капельной жидкости рассмотрены в пренебрежении производными динамических переменных, описывающих среднее течение суспензии. При этом число столкновительной диссипации, выражающее отношение диссипативной силы, обусловленной ускорением жидкой фазы при скачкообразных изменениях скоростей сталкивающихся частиц, к силам вязкого взаимодействия, предполагается малым. Динамические уравнения, определяющие движение суспензии в континуальном приближении, и уравнение баланса псевдотурбулентной энергии частиц получены в приближении, аналогичном приближению Эйлера в гидродинамике однофазной среды.

1. Спектральные меры псевдотурбулентных случайных процессов. Стохастические уравнения для псевдотурбулентных пульсаций объемной концентрации суспензии ρ' , давления p' , скоростей жидкости $\mathbf{v}'$ и частицы $\mathbf{w}'$ и следующие из них алгебраические уравнения для спектральных мер случайных функций получены в [1]. Имея в виду получить далее полную систему уравнений, определяющих среднее движение суспензии в «приближении Эйлера», т. е. с точностью до членов нулевого порядка по отношению к масштабам псевдотурбулентности к соответствующим масштабам среднего движения, запишем уравнения для спектральных мер, пренебрегая производными динамических переменных

$$\begin{aligned} (\omega + \mathbf{uk}) dZ_\rho - (1 - \rho) k dZ_v &= 0 \\ id_1(1 - \rho)(\omega + \mathbf{uk}) dZ_v &= -i(1 - \rho) k dZ_p - \mu_0 S (k^2 dZ_v + \frac{1}{3} \mathbf{k} (k dZ_v)) - \\ &- d_1 \rho [\beta K + i\xi\omega + \gamma\eta(1 + i \operatorname{sign} \omega) \sqrt{|\omega|}] (dZ_v - dZ_w) - d_1 \rho \beta K' u dZ_\rho \\ id_2 \omega dZ_w &= -i k dZ_p + d_1 [\beta K + i\xi\omega + \gamma\eta(1 + i \operatorname{sign} \omega) \sqrt{|\omega|}] (dZ_v - dZ_w) + \\ &+ d_1 \rho \beta K' u dZ_\rho - d_1 \xi dZ_w, \quad K' \equiv dK/d\rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\beta = \frac{9\nu_0}{a^2}, \quad \gamma = \frac{9}{2a} \left(\frac{\nu_0}{\pi} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{c}{4} \frac{N}{n} \left[\xi + 4\gamma\eta \left(\frac{n}{N} \right)^{1/2} \right]$$

Здесь приняты обозначения работ [1,2], но знак $\langle \rangle$ в обозначениях динамических переменных опущен. В (1.1) использовано представление для силы межфазового взаимодействия, верное для $R \lesssim 1$, где $R = 2au/\nu_0$ — число Рейнольдса. Кроме того, ниже предполагаем течение локально-однородным в том смысле, что в нем не образуются крупные агрегаты частиц, пузыри, заполненные только дисперсионной средой, и т. п.

Перейдем, как и в [2], к безразмерным переменным по формулам

$$dZ_v' = \frac{dZ_v}{u}, \quad dZ_w' = \frac{dZ_w}{u}, \quad dZ_p' = \frac{dZ_p}{d_1 \beta K u a}, \quad \omega' = \frac{a\omega}{u}, \quad \mathbf{k}' = a\mathbf{k} \quad (1.2)$$

После преобразования получим из (1.1) и (1.2) следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\omega' + u_0 k') dZ_\rho - (1 - \rho) k' dZ_v' &= 0 \quad (1.3) \\
 i \frac{r}{\kappa} \omega' dZ_w' &= -ik' dZ_\rho' + \left[1 + ir\xi\omega' + \frac{3}{V^{2\pi}} \eta (1 + i \operatorname{sign} \omega) \sqrt{r|\omega'|} \right] \times \\
 &\times (dZ_v' - dZ_w') + \frac{d \ln K}{d\rho} u_0 dZ_\rho - \alpha dZ_w' \\
 \rho \left(i \frac{r}{\kappa} \omega' + \alpha \right) dZ_w' &+ [ir(1 - \rho)(\omega' + u_0 k') + sk'^2] dZ_v' = \\
 &= -ik' dZ_\rho' - \frac{1}{3} sk' (k' dZ_v') \\
 \kappa = \frac{d_1}{d_2}, \quad u_0 = \frac{u}{u}, \quad s = \frac{2}{9} \frac{S}{K}, \quad r = \frac{R}{9K} = \frac{2}{9K} \frac{ua}{v_0} \ll 1, \quad \alpha = \frac{\xi}{\beta K}
 \end{aligned}$$

При $\omega' = 0$ уравнения (1.3) сводятся к уравнениям в [2].

Параметр α в (1.3) характеризует отношение диссипативных сил, возникающих за счет ускорения присоединенных масс жидкости при скачкообразных изменениях скоростей частиц при столкновениях, к силам вязкого взаимодействия между фазами суспензии [1]. Если концентрация ρ суспензии не слишком близка к концентрации ρ_* слоя частиц в плотноупакованном состоянии, можно считать «число столкновительной диссипации» α малым (см. обсуждение в [2]). Ниже рассматриваем суспензию только в пренебрежении прямыми столкновениями частиц, т. е. при $\alpha = 0$.

Пренебрегая в (1.3) параметрами α и r , получаем решение этих уравнений в форме

$$\begin{aligned}
 -ik' dZ_\rho' &= \frac{dZ_\rho}{i(r/\kappa)(1 - \rho)\omega' + 1} \left[i \frac{r}{\kappa} \omega' \left(\rho \frac{d \ln K}{d\rho} u_0 k' + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\rho + \frac{4}{3} sk'^2 \right) \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \right) + \frac{4}{3} sk'^2 \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \right] \frac{k'}{k'^2} \quad (1.4) \\
 dZ_v' &= \left[i \frac{r}{\kappa} \omega' (\rho + sk'^2) + sk'^2 \right]^{-1} \left[- \left(i \frac{r}{\kappa} (1 - \rho) \omega' + 1 \right) ik' dZ_\rho' - \right. \\
 &\quad \left. - \left(i \frac{r}{\kappa} \omega' \left(\rho \frac{d \ln K}{d\rho} u_0 + \frac{s}{3} \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} k' \right) + \frac{s}{3} \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} k' \right) dZ_\rho \right] \\
 dZ_w' &= \left[i \frac{r}{\kappa} \omega' (\rho + sk'^2) + sk'^2 \right]^{-1} \left[- (1 + sk'^2) ik' dZ_\rho' + \right. \\
 &\quad \left. + sk'^2 \left(\frac{d \ln K}{d\rho} u_0 - \frac{1}{3} \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} \right) dZ_\rho \right]
 \end{aligned}$$

В общем случае вычисления, основанные на соотношениях (1.4), весьма сложны и громоздки. Но, как легко видеть, возможны два значительно более простых случая: 1) $\kappa \gg 1$, когда $r/\kappa \ll 1$, и 2) $\kappa \ll 1$, так что $r/\kappa \gg 1$. Ниже для определенности рассматриваем только суспензии или эмульсии в капельных жидкостях, когда $r/\kappa \ll 1$. Второй случай, характерный для газовзвесей при не слишком малых r , нуждается в независимом анализе.

При $r/\kappa \ll 1$ из (1.4) имеем соотношения

$$\begin{aligned}
 -ik' dZ_\rho' &= \frac{4}{3} sk'^2 \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} dZ_\rho, \quad dZ_v' = \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} dZ_\rho \quad (1.5) \\
 dZ_w' &= \left[\frac{d \ln K}{d\rho} u_0 + \left(1 + \frac{4}{3} sk'^2 \right) \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} \right] dZ_\rho
 \end{aligned}$$

Соответствующие выражения для безразмерных спектральных плотностей имеют вид

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{\rho,v}(\omega', k') &= \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{\rho,w}(\omega', k') &= \left[\frac{d \ln K}{d\rho} u_0 + \left(1 + \frac{4}{3} s k'^2\right) \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} \right] \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{v,v}(\omega', k') &= \left(\frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \right)^2 \frac{k' * k'}{k'^4} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k'), \quad \mathbf{a} * \mathbf{b} = \|a_i b_j\| \quad (1.6) \\
 \Psi'_{w,w}(\omega', k') &= \left[\left(\frac{d \ln K}{d\rho} \right)^2 u_0 * u_0 + \left(1 + \frac{4}{3} s k'^2\right) \frac{d \ln K}{d\rho} \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{u_0 * k' + k' * u_0}{k'^2} + \left(1 + \frac{4}{3} s k'^2\right) \left(\frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \right)^2 \frac{k' * k'}{k'^4} \right] \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{v,w}(\omega', k') &= \left[\frac{d \ln K}{d\rho} k' * u_0 + \left(1 + \frac{4}{3} s k'^2\right) \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k' * k'}{k'^2} \right] \times \\
 &\times \frac{\omega' + u_0 k'}{(1 - \rho) k'^2} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{-vp,\rho}(\omega', k') &= \frac{4}{3} s k'^2 \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k'}{k'^2} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{-vp,v}(\omega', k') &= \frac{4}{3} s k'^2 \left(\frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \right)^2 \frac{k' * k'}{k'^4} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') \\
 \Psi'_{-vp,w}(\omega', k') &= \frac{4}{3} s k'^2 \left[\frac{d \ln K}{d\rho} k' * u_0 + \left(1 + \frac{4}{3} s k'^2\right) \frac{\omega' + u_0 k'}{1 - \rho} \frac{k' * k'}{k'^2} \right] \times \\
 &\times \frac{\omega' + u_0 k'}{(1 - \rho) k'^2} \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k')
 \end{aligned}$$

Величину $\Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k')$ можно представить в форме [1,2]

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{\rho,\rho}(\omega', k') &= \frac{\mathbf{D}' \mathbf{k}' \mathbf{k}'}{\pi} \frac{\Phi'_{\rho,\rho}(k')}{M(\omega', k')}, \quad \Phi'_{\rho,\rho}(\omega', k') = \frac{\Phi}{k_0^3} Y(k_0' - k') \\
 M(\omega', k') &= \omega'^2 + \left(\mathbf{D}' \mathbf{k}' \mathbf{k}' - \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{\theta_0} \omega'^2 \right), \quad \mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}}{u a}, \quad \theta_0 = \frac{\langle w'^2 \rangle}{u^2} \quad (1.7) \\
 \Phi &= \frac{3}{4\pi} \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right), \quad k_0' = \left(\frac{3\pi\rho}{2}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^{-1/3}, \quad Y(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отметим, что выражение для k_0' из (1.7) справедливо только для рассматриваемых здесь локально-однородных суспензий. В [1.7] $\mathbf{D}$ представляет собой тензор псевдотурбулентной диффузии частиц, рассмотренный подробно в [2], а $\langle w'^2 \rangle$ — средний квадрат их пульсационной скорости. Очевидно, соотношения (1.6) и (1.7) позволяют вычислить различные корреляционные функции псевдотурбулентности в «равновесном» состоянии. В отличие от кинетической теории газов, где под равновесным понимается пространственно однородное стационарное состояние, здесь под равновесным состоянием подразумеваем, вообще говоря, состояние, в котором функция распределения частиц по скоростям псевдотурбулентных пульсаций f имеет «квазимагвелловский» вид (см. п. 4). Подробнее смысл этого понятия проясняется ниже. Отметим, впрочем, что в рамках рассматриваемого здесь приближения Эйлера оба эти определения равновесности совпадают.

Равновесное состояние суспензии формально можно также определить как состояние, в котором справедливы соотношения (1.7) для спектральной плотности случайного процесса ρ' и следующее из них выражение $\langle \rho'^2 \rangle = \rho^2 (1 - \rho / \rho_*)$.

2. Равновесная структура суспензий. Для целей работы достаточно рассмотреть только средние от бинарных произведений различных псевдотурбулентных величин. Удобно выбрать координатную ось x_1 в направлении единичного вектора u_0 , определяющего оси симметрии псевдотурбулентных движений.

1°. *Интенсивность пульсаций частиц.* Интегрируя $\Psi'_{ww}(\omega', k')$ по всем частотам ω' и всему волновому пространству k' и переходя к размерным переменным, получаем следующие выражения для отличных от нуля средних $\langle w_i' w_j' \rangle$ (2.1)

$$\begin{aligned} \langle w_1'^2 \rangle &= \frac{4\pi\Phi}{3(1-\rho)^2} \left[n^2(\rho) + \frac{2}{3} n(\rho) \left(1 + \frac{4}{5} sk_0'^2 \right) + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{8}{5} sk_0'^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{16}{21} s^2 k_0'^4 \right) \left(1 + \frac{1+5/3 \gamma^2}{1+3\gamma^2} \theta_0 \right) \right] u^2, \quad \gamma^2 = \frac{D_2}{D_1 - D_2} > 0, \quad n(\rho) = (1-\rho) \frac{d \ln K}{d\rho} \\ \langle w_2'^2 \rangle &\equiv \langle w_3'^2 \rangle = \frac{4\pi\Phi}{45(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{8}{5} sk_0'^2 + \frac{16}{21} s^2 k_0'^4 \right) \left(1 + \frac{1+5\gamma^2}{1+3\gamma^2} \theta_0 \right) u^2 \end{aligned}$$

Величина γ^2 рассматривалась в [2]; обычно $\gamma^2 \approx 10^{-2} - 10^{-3}$, поэтому для упрощения считаем далее $\gamma \approx 0$. Суммируя выражения (2.1), получаем уравнения для неизвестной θ_0 . Решая его, имеем следующее представление для θ_0 :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{4\pi\Phi}{3(1-\rho)^2} \left[n^2(\rho) + \frac{2}{3} n(\rho) \left(1 + \frac{4}{5} sk_0'^2 \right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8}{5} sk_0'^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{16}{21} s^2 k_0'^4 \right) \right] \left[1 - \frac{4\pi\Phi}{9(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{8}{5} sk_0'^2 + \frac{16}{21} s^2 k_0'^4 \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что θ_0 неограниченно возрастает при $\rho \rightarrow \rho^0$, где ρ^0 — корень уравнения

$$\frac{4\pi\Phi}{9(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{8}{5} sk_0'^2 + \frac{16}{21} s^2 k_0'^4 \right) = 1 \quad (2.3)$$

Указанная расходимость представляет собой следствие проведенного выше пренебрежения столкновительной диссипацией, которое перестает быть правомерным в непосредственной близости от плотноупакованного состояния. Поэтому ясно, что развиваемая здесь теория может быть справедливой, во всяком случае, при $\rho < \rho^0$; однако, как будет видно, ρ^0 весьма незначительно отличается от ρ_* .

В [2] для конкретных вычислений использовалась аппроксимация

$$K(\rho) \approx \begin{cases} (1-\rho)^{-4.58}, & \rho < \rho_0 = 0.28 \\ 25\rho(3(1-\rho)^2)^{-1}, & \rho > \rho_0 \end{cases}, \quad S(\rho) \approx (1-\rho)^{-2.5} \quad (2.4)$$

Эта аппроксимация $K(\rho)$ несколько неудобна в том отношении, что вторая производная от $K(\rho)$ терпит разрыв в точке $\rho = \rho_0$, и потому на зависимостях различных величин от ρ появляются при $\rho = \rho_0$ угловые точки и в некоторых случаях даже разрывы. Поэтому, используя по-прежнему выражение (2.4) для $S(\rho)$, используем ниже $K(\rho)$ в форме

$$K(\rho) = \frac{2.2}{(1-\rho)^{2.9}} - 1.2, \quad n(\rho) = \frac{6.38}{2.2 - 1.2(1-\rho)^{2.9}} \quad (2.5)$$

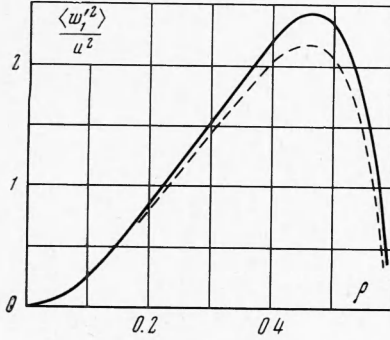
Приводим сравнение значений $K(\rho)$ из (2.4) и (2.5) в интервале ρ от 0 до $\rho_* = 0.60$

$\rho = 0.10$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$K(2.4) = 1.6202$	2.7787	5.1020	9.2593	16.6667	31.2500
$K(2.5) = 1.7862$	3.0021	4.9893	8.4780	15.2214	30.1652

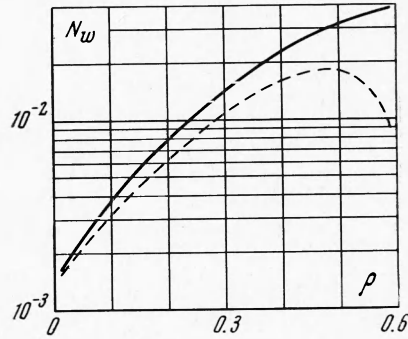
Отсюда видно, что функция (2.5) хорошо приближает $K(\rho)$ из (2.4), но имеет непрерывные производные.

Подсчет корня ρ^0 уравнения (2.3) при $\rho_* = 0,60$ приводит к неравенствам $0,599997 < \rho^0 < 0,599998$, т. е. ρ^0 практически совпадает с ρ_* .

Зависимости $\langle w_1'^2 \rangle / u^2$ и $N_w = \langle w_2'^2 \rangle / \langle w_1'^2 \rangle$ от ρ приведены на фиг. 1 и 2 сплошными кривыми. Пунктиром обозначены соответствующие



Фиг. 1



Фиг. 2

щие зависимости, следующие из «невязкой» модели $s = 0$ (см. [2]). Здесь и везде ниже в конкретных расчетах использованы $S(\rho)$ из (2.4) и $K(\rho)$ из (2.5), $\gamma \approx 0$, $\rho_* = 0,60$.

Отметим, что полученные результаты относятся только к суспензиям твердых частиц. Для капель или пузырьков нужно использовать, конечно, иные представления $S(\rho)$ и $K(\rho)$.

2°. Прочие псевдотурбулентные средние. Из (1.6) и (1.7) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \langle v_1'^2 \rangle &= \frac{4\pi\Phi}{15(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{1 + \frac{5}{3}\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) u^2, \quad \langle v_2'^2 \rangle \equiv \langle v_3'^2 \rangle = \frac{4\pi\Phi}{45(1-\rho)^2} \times \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{1 + 5\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) u^2 \\
 \langle v_1'w_1' \rangle &= \frac{4\pi\Phi}{9(1-\rho)^2} \left[n(\rho) + \frac{3}{5} \left(1 + \frac{4}{5} sk_0'^2 \right) \left(1 + \frac{1 + \frac{5}{3}\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) \right] u^2 \\
 \langle v_2'w_2' \rangle \equiv \langle v_3'w_3' \rangle &= \frac{4\pi\Phi}{45(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{4}{5} sk_0'^2 \right) \left(1 + \frac{1 + 5\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) u^2 \\
 \langle \rho'v_i' \rangle &= \frac{4\pi\Phi u}{9(1-\rho)} \delta_{i1}, \quad \langle \rho'w_i' \rangle = \frac{4\pi\Phi}{3(1-\rho)} \left[n(\rho) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{5} sk_0'^2 \right) \right] u \delta_{i1} \\
 \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_i} \rho' \right\rangle &= \frac{16\pi\Phi sk_0'^2}{45(1-\rho)} d_1 \beta K u \delta_{i1} \quad (2.6) \\
 \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_1} v_1' \right\rangle &= \frac{16\pi\Phi sk_0'^2}{75(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{1 + \frac{5}{3}\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) d_1 \beta K u^2 \\
 \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_2} v_2' \right\rangle \equiv \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_3} v_3' \right\rangle &= \frac{16\pi\Phi sk_0'^2}{225(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{1 + 5\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) d_1 \beta K u^2 \\
 \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_1} w_1' \right\rangle &= \frac{16\pi\Phi sk_0'^2}{45(1-\rho)^2} \left[n(\rho) + \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{7} sk_0'^2 \right) \left(1 + \frac{1 + \frac{5}{3}\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) \right] d_1 \beta K u^2 \\
 \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_2} w_2' \right\rangle \equiv \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_3} w_3' \right\rangle &= \frac{16\pi\Phi sk_0'^2}{225(1-\rho)^2} \left(1 + \frac{20}{21} sk_0'^2 \right) \left(1 + \frac{1 + 5\gamma^2}{1 + 3\gamma^2} \Theta_0 \right) d_1 \beta K u^2 \\
 \langle v_i'v_j' \rangle &= \langle w_i'w_j' \rangle = \langle v_i'w_j' \rangle = \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_i} v_j' \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial p'}{\partial x_i} w_j' \right\rangle = 0, \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

Используя непосредственно соотношения (1.5), имеем также

$$\begin{aligned} \left\langle \rho' \frac{dv_i'}{dt} \right\rangle &= \left\langle \rho' \frac{du_i'}{dt} \right\rangle = \left\langle v_i' \frac{dv_j'}{dt} \right\rangle = \left\langle w_i' \frac{dw_j'}{dt} \right\rangle = \left\langle v_i' \frac{dw_j'}{dt} \right\rangle = \\ &= \left\langle w_i' \frac{dv_j'}{dt} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Дифференцирование по времени производится здесь вдоль траектории частицы [1].

Нетрудно видеть, что при $\gamma \approx 0$ величина $N_v = \langle v_2'^2 \rangle / \langle v_1'^2 \rangle \approx 1/3$; зависимости $\langle v_1'^2 \rangle / u^2$ и $\langle \rho' v_1' \rangle / u$ от ρ показаны на фиг. 3 (кривые 1 и 2 соответственно). Пунктиром показана первая из этих величин при $s = 0$. Зависимости других псевдотурбулентных средних от ρ имеет примерно такой же характер и потому не приводятся.

3°. Средняя сила межфазового взаимодействия. Средняя сила взаимодействия между фазами была вычислена в [1]. Пренебрегая для простоты

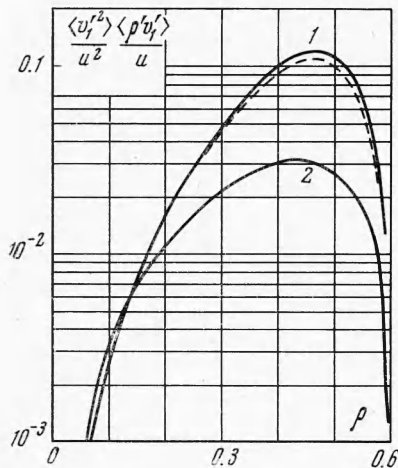
возможной зависимостью коэффициентов ξ и η от концентрации ρ , запишем эту силу в расчете на одну частицу в форме

$$\mathbf{F}_i = -\varsigma_0 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \kappa m \beta K^* \mathbf{u} +$$

$$+ \kappa m \left(\xi \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \gamma \int_{-\infty}^t \eta \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \Big|_{t=t'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\begin{aligned} K^* &= K + \frac{\langle \rho' u' \rangle}{u} \frac{dK}{d\rho} + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \rho'^2 \rangle \frac{d^2 K}{d\rho^2}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{w}' \end{aligned}$$



Фиг. 3

Второй член в (2.8) представляет собой силу вязкого межфазового взаимодействия, величина которой в системе хаотически движущихся частиц существенно отличается от величины, характерной для системы относительно неподвижных частиц. Используя (2.6) и (2.8), имеем в равновесном состоянии соотношение

$$K^* = \lambda_K K, \quad \lambda_K = 1 + \frac{4\pi\Phi}{3(1-\rho)^2} \left[\frac{(1-\rho)^2}{2K} \frac{d^2 K}{d\rho^2} - n(\rho) \left(n(\rho) + \frac{4}{15} s k_0'^2 \right) \right] \quad (2.9)$$

Введенная выше скорость межфазового скольжения u не совпадает с эффективной скоростью u^* в промежутках между частицами, определяемой по полному относительному потоку жидкой фазы Q . Действительно

$$Q = (1-\rho)u^* = (1-\rho)u - \langle \rho' v_1' \rangle, \quad u^* = \lambda_u u, \quad \lambda_u = 1 - \frac{4\pi\Phi}{9(1-\rho)^2} \quad (2.10)$$

В экспериментах силу вязкого взаимодействия выражают обычно через Q или u^* , например $F_1 = \kappa m \beta K_1(\rho) u^*$. Из (2.9), (2.10) имеем тогда

$$K^* = (\lambda_K / \lambda_u) K_1 \quad (2.11)$$

Коэффициент формулы (2.11) показывает, какую часть от гидравлического сопротивления слоя относительно неподвижных частиц составляет сопротивление эквивалентного по пористости слоя частиц, совершающих развитое псевдотурбулентное движение.

Зависимость величины λ_K от ρ при $s \neq 0$ и $s = 0$ (пунктир) приведена на фиг. 4. Соответствующие кривые для λ_K / λ_u лежат лишь очень ненамного выше кривых λ_K . Нетрудно видеть, что λ_K и λ_K / λ_u всегда меньше единицы.

Последнее позволяет дать вполне естественное объяснение явлению, известному как «эффект пониженного сопротивления псевдооживленного слоя» (см., например, [3-6]). Попытки объяснить это очень важное для практики явление предпринимались неоднократно, причем обычно его связывали с наблюдаемой в слое медленной циркуляцией частиц [7,8]. Роль флуктуаций пористости $\varepsilon = 1 - \rho$ слоя в понижении его гидравлического сопротивления впервые, по-видимому, отмечалась в [6,9]; объяснение аналогичное приведенному выше, дано в [10].

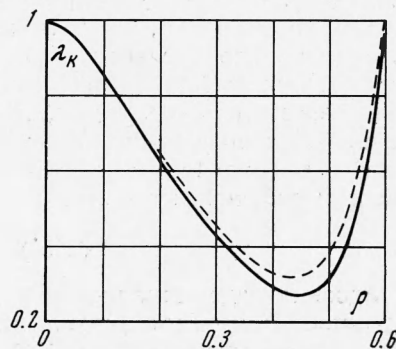
Отметим, что соотношения (2.9) — (2.11) относятся к системе в равновесном состоянии, когда псевдотурбулентность полностью развита. В реальных системах следует, конечно, ожидать существенного влияния границ течения и, в частности, внутренней циркуляции фаз на эффективное гидравлическое сопротивление.

Анализ результатов, полученных в 1 — 3°, показывает, что для суспензий умеренной концентрации хорошие результаты дает также упрощенная модель $s = 0$. Существенные отличия ее от модели с $s \neq 0$ появляются лишь при довольно значительных величинах ρ . Заметим также, что степень анизотропии псевдотурбулентных движений быстро убывает с увеличением ρ .

Возрастание псевдотурбулентных средних при $\rho \rightarrow \rho^0$ происходит фактически лишь в области $\rho > 0.58$ и на фиг. 1—3 не показано.

3. Неравновесная структура суспензий и динамические уравнения. Соотношения, полученные в п. 2, характеризуют псевдотурбулентность суспензии вдали от поверхностей, ограничивающих ее движение, — стенок, решеток, свободных поверхностей и т. п. — в предположении о справедливости выражений (1.7). В действительности, конечно, границы течения, равно как и его нестационарность или неоднородность, способны существенно воздействовать на интенсивность псевдотурбулентности и, в частности, нарушать (1.7). Например, твердые стенки способствуют гашению псевдотурбулентных пульсаций, решетку, пронизываемую для жидкой фазы, но не пропускающую частиц, могут в зависимости от степени неравномерности потока жидкости как подавлять, так и усиливать псевдотурбулентность вблизи решетки. Это воздействие в ряде случаев может распространяться на значительные расстояния от границ.

Попытка учесть эту «неравномерность» на основе допущения о том, что она не сказывается на форме соотношений (1.7), т. е. на величине флуктуаций концентрации суспензии, была предпринята в [10]. В этом случае уравнения для различных псевдотурбулентных средних, в частности для энергий пульсаций фаз в разных направлениях, получаются в принципе тем же способом, что и уравнения для корреляционных функций в стати-



Фиг. 4

стической механике турбулентности. При этом разные средние могут зависеть от координат и времени существенно различным образом.

Здесь рассмотрим другую, значительно более простую модель, формулировка которой не требует каких-либо дополнительных допущений. А именно, учитываем, что уравнения (1.1) получаются в [1] после усреднения по $\Delta t \gg \tau$, где τ — характерный минимальный временной масштаб псевдотурбулентности, совпадающий со временем внутренних взаимодействий в системе, приводящих к установлению локально-равновесного состояния, аналогичного по смыслу, например, состоянию молекулярного хаоса в неоднородном и нестационарном течении газа (см. также обсуждение в [10]). Поэтому уравнения (1.1) можно использовать при анализе не только равновесной, но и локально-равновесной псевдотурбулентности, которая только и рассматривается ниже.

Уравнения (1.1) по-прежнему позволяют выразить все спектральные меры через какую-либо одну, причем в неравновесном состоянии эти выражения будут по форме такими же, что и в равновесном состоянии. Поэтому, если в неравновесном состоянии $\langle w'^2 \rangle = \theta$, то для любых псевдотурбулентных переменных в этом состоянии имеем

$$\langle a'b' \rangle = (\theta / \theta_0) \langle a'b' \rangle_0 \quad (3.1)$$

Здесь и везде ниже индекс нуль снизу отмечает величины, относящиеся к равновесному состоянию и вычисленные в п. 2. В частности, из (3.1) ясно, что отношения вида $\langle a'b' \rangle / \langle c'b' \rangle$ одинаковы как в равновесном, так и в соответствующем неравновесном состояниях. Ниже это обстоятельство широко используется.

Таким образом, проблема описания неравновесной (но локально-равновесной) псевдотурбулентности сводится фактически к получению дополнительного уравнения для единственной скалярной величины θ . Такое уравнение рассмотрено в п. 4.

На основании результатов [1] динамические уравнения представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{w}) &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} ((1 - \rho) \mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = -\langle \rho' \mathbf{v}' \rangle \\ d_2 \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{w} &= -\frac{\partial \mathbf{P}^{(p)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathbf{F}_i + d_2 \rho \mathbf{q}, \quad \mathbf{P}^{(p)} = d_2 \rho \langle \mathbf{w}' * \mathbf{w}' \rangle \\ d_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \rho) \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} ((1 - \rho) \mathbf{v} * \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right] &= -\frac{\partial \mathbf{P}^{(f)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \\ &+ \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(S \mathbf{e} + \frac{1}{2} \langle \rho'^2 \rangle \frac{d^2 S}{d\rho^2} \mathbf{e} \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathbf{F}_i + d_1 (1 - \rho) \mathbf{q} \\ \mathbf{e} &= \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right\|, \quad \mathbf{P}^{(f)} = d_1 [(1 - \rho) \langle \mathbf{v}' * \mathbf{v}' \rangle + \mathbf{q} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{q}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

При написании (3.3) было учтено тождество $\langle \rho' \mathbf{e}' \rangle \equiv 0$, следующее непосредственно из (1.5). В пренебрежении зависимостью коэффициентов ξ и η от ρ для $\mathbf{F}_i$ справедливо соотношение (2.8). Еще раз подчеркнем, что псевдотурбулентные величины, входящие в (3.2), в общем случае не совпадают со своими равновесными значениями, определенными выше, а должны вычисляться согласно (3.1).

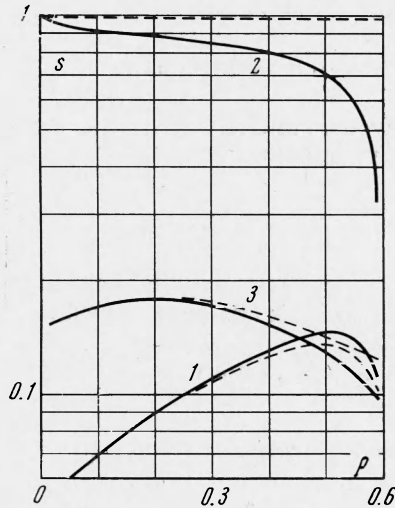
4. Равновесная функция распределения и уравнение переноса псевдотурбулентной энергии частиц. Кинетическое уравнение для системы взвешенных частиц было сформулировано в [1]. В рассматриваемом случае

его можно представить в форме

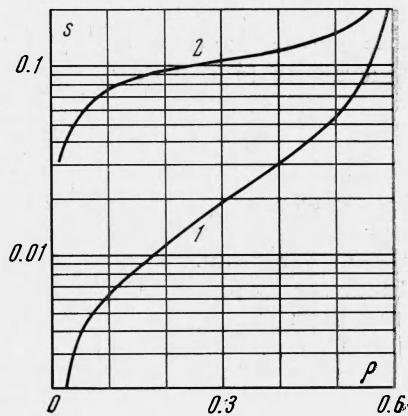
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f + \mathbf{w}' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} \left[\left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i''}{m} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{w} \right) f \right] -$$

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}' \right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \mathbf{w} \right) = \frac{\mathbf{A}}{m} : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} \right) f, \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji} \quad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{F}_i''$ — флуктуации силы взаимодействия частицы с жидкой фазой, усредненная по условным распределениям в соответствии с методом работы [1], $\mathbf{A}$ — некоторый неизвестный тензор, описывающий диффузию в пространстве скоростей. Столкновительный член в правой части (4.1) опущен ввиду сделанного пренебрежения прямыми столкновениями частиц.



Фиг. 5



Фиг. 6

Используя соотношения (2.6), (2.7) и общий метод [1], после вычислений получаем выражения

$$\mathbf{F}_i'' = \kappa m \beta \left[K (s_{u,ii} + s'_{-\nabla p,ii}) \mathbf{w}' + \frac{dK}{d\rho} s'_{\rho,1} w_1 \mathbf{u}_0 \right]$$

$$s_{u,ii} = s_{v,ii} - 1, \quad s_{v,ii} = \frac{\langle v_i' w_i' \rangle}{\langle w_i'^2 \rangle}, \quad s'_{\rho,1} = u s_{\rho,1} =$$

$$= u \frac{\langle \rho' w_1' \rangle}{\langle w_1'^2 \rangle}, \quad s'_{-\nabla p,ii} = \frac{s_{-\nabla p,ii}}{d_1 \beta K \langle w_i'^2 \rangle} = \frac{1}{d_1 \beta K \langle w_i'^2 \rangle} \left\langle - \frac{\partial p'}{\partial x_i} w_j' \right\rangle \quad (4.2)$$

Суммирование по i здесь не производится; зависимостью ξ и η от ρ для простоты пренебрегаем.

Нетрудно видеть, что введенные в (4.2) отношения средних от произведений псевдотурбулентных величин в неравновесном и равновесном состояниях совпадают (см. также п. 3), т. е. не зависят от θ и могут рассматриваться как известные функции от динамических переменных. Зависимости $s_{v,11}$, $s_{v,22}$ и $s_{\rho,1}$ от ρ , подсчитанные по результатам п. 2, приведены на фиг. 5 (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Зависимости $s'_{-\nabla p,11}$ и $s'_{-\nabla p,22}$ от ρ иллюстрируются кривыми 1 и 2 на фиг. 6. Пунктир на фиг. 5 относится к невязкой модели $s = 0$.

Тензор $\mathbf{A}$ в (4.1) легко определяется по рецептам, предложенным в [1]. А именно, рассмотрим функцию распределения частиц в равновесном со-

стоянии $f^{(0)}$, когда уравнение (4.1) с учетом (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} \left[\left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_i}{m} + c_2 \mathbf{w}' + (c_1 - c_2) w_1' \mathbf{u}_0 \right) f^{(0)} \right] &= \frac{\mathbf{A}}{m} : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} \right) f^{(0)} \\ c_1 &= \kappa \beta \left[K(s_{u, 11} - s_{-\nabla p, 11}') + \frac{dK}{d\rho} s_{\rho, 1}' \right] \\ c_2 &\equiv c_3 = \kappa \beta K(s_{u, 22} - s_{-\nabla p, 22}') \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь c_j — некие известные функции динамических переменных. Ввиду осесимметричности псевдотурбулентности можно сразу же принять тензор $\mathbf{A}$ диагональным, имеющим собственные значения $A_1, A_2 = A_3$; ищем далее решение (4.3) в квазимаксвелловской форме

$$f^{(0)} = n \left(\frac{B_1 B_2 B_3}{\pi^3} \right)^{1/2} \exp(-\sum B_j w_j'^2), \quad B_2 \equiv B_3 \quad (4.4)$$

где n — счетная концентрация частиц в суспензии.

Подставляя (4.4) в (4.3), приходим к уравнениям

$$\mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_i}{m} = 0, \quad B_j = -\frac{c_j}{2} \frac{m}{A_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

Первое из этих уравнений совпадает с уравнением сохранения импульса диспергированной фазы (3.2), рассматриваемой как сплошная среда, в равновесном состоянии.

Вычисляя формально $\langle w_i'^2 \rangle$ из (4.4) и (4.5), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{A_i}{m} &= -c_i \langle w_i'^2 \rangle_0, \quad \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{m} = c\theta_0, \quad c = -\sum c_j M_j, \quad B_j = \frac{1}{2M_j \theta_0} \\ M_1 &= \frac{1}{1 + 2N_w}, \quad M_2 = \frac{N_w}{1 + 2N_w} = M_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Согласно сказанному выше, величины $\langle w_i'^2 \rangle_0$, θ_0 и коэффициенты c_j , M_j можно рассматривать как известные функции динамических переменных. Таким образом, равенства (4.6) окончательно определяют кинетическое уравнение (4.1) и равновесную функцию распределения.

Используя стандартный прием, получаем из (4.1) следующее уравнение сохранения для величины θ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) (\rho \theta) + \rho \theta \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \mathbf{r}} - 2c\rho\theta + \frac{2}{d_2} \mathbf{P}^{(p)} : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \mathbf{w} \right) &= \\ = 2\rho \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{m}, \quad \mathbf{q}_0 &= \sigma_0 \int w'^2 \mathbf{w}' f d\mathbf{w}', \quad \sigma_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если умножить это уравнение на $1/2m$, оно превратится, очевидно, в уравнение переноса псевдотурбулентной энергии частиц, аналогичное уравнению теплопроводности. При этом величина $1/2mq_0$ будет представлять собой псевдотурбулентный поток этой энергии.

Используя (4.6), запишем уравнение (4.7) в иной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) (\rho \theta) + \rho \theta \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{d_2} \mathbf{P}^{(p)} : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \mathbf{w} \right) = 2c\rho(\theta_0 - \theta) \quad (4.8)$$

Уравнения (4.8) и (3.2) представляют собой полную систему уравнений, определяющих среднее движение суспензии в континуальном приближении. При этом все характеристики псевдотурбулентности, входящие в эти уравнения, определены через θ и динамические переменные согласно (3.1)

и результатам п. 2. Единственное исключение составляет величина q_0 , вычисление которой требует знания функции распределения в неравновесных условиях.

Формально можно искать решение f уравнения (4.1) и соответствующее выражение для q_0 в виде рядов

$$f = \sum f^{(r)} \varepsilon^r, \quad q_0 = \sum q_0^{(r)} \varepsilon^r \quad (4.9)$$

где через ε обозначена малая величина, имеющая порядок отношений масштабов псевдотурбулентности к соответствующим масштабам среднего движения.

В рассматриваемом здесь приближении Эйлера нулевой член в разложении f по ε из (4.9) просто совпадает с функцией $f^{(0)}$ из (4.4), причем соответствующий член $q_0^{(0)}$ в ряде для q_0 тождественно равен нулю. Следующий член в разложении q_0 имеет, конечно, порядок ε и потому в рассматриваемом здесь приближении Эйлера вообще не должен учитываться. Таким образом, нужно взять $q_0 = 0$ в уравнении (4.8).

Во всех следующих приближениях отдельные коэффициенты $f^{(r)}$ в (4.9) также зависят от ε , что обусловлено наличием производных динамических переменных в полных стохастических уравнениях работы [1], приводящих к зависимости от ρ всех характеристик равновесной псевдотурбулентности и компонент тензора A в кинетическом уравнении (4.1). Видно, что в таких приближениях необходимо вычислять следующие члены рядов (4.9) вплоть до номера r , определяемого порядком приближения. По аналогии с кинетической теорией газов и гидродинамикой приближения первого и второго порядков по ε уместно назвать гидродинамическими приближениями Навье — Стокса и Барнетта для суспензий.

Отметим, что решения θ уравнений (4.7) или (4.8) устойчивы, как это легко видеть, лишь при $c > 0$.

Таким образом, в уравнения (4.8) и (3.2), определяющие движение суспензии в приближении Эйлера, входят следующие характеристики равновесной псевдотурбулентности, отличные от нуля

$$P_{ij}^{(p)} \sim \langle w_i' w_j' \rangle \rho, \quad \langle v_i' v_j' \rangle (1 - \rho), \quad q_1 \lambda_K, c \quad (4.10)$$

Поступила 9 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у е в и ч Ю. А. О гидродинамике однородных суспензий. ПМТФ, 1969, № 6.
2. Б у е в и ч Ю. А., М а р к о в В. Г. Псевдотурбулентная диффузия частиц в однородных суспензиях. ПМТФ, 1970, № 1.
3. H a w k s l e y P. G. W. The effect of concentration on the settling of suspensions and flow through porous media. In: Some aspects of fluid flow. London, Edward Arnold and Co., 1951.
4. L o e f f l e r A. L., R u t h B. F. Particulate fluidization and sedimentation of spheres. AIChE Journal, 1959, vol. 5, No. 3, p. 310.
5. R i c h a r d s o n J. F., M e i k l e R. A. Sedimentation and fluidisation, pt. 3. The sedimentation of uniform fine particles and of two-component mixtures of solids. Trans. Inst. Chem. Engrs, 1961, vol. 39, No. 5, p. 348.
6. Д э в и д с о н И. Ф., Х а р р и с о н Д. Псевдооживление твердых частиц. М., «Химия», 1965.
7. H a p p e l J., B r e n n e r H. Viscous flow in multiparticle systems: motion of spheres and a fluid in a cylindrical tube. AIChE Journal, 1957, vol. 3, No. 4, p. 506.
8. A d l e r I. L., H a p p e l J. The fluidization of uniform smooth spheres in liquid media. Chem. Engng. Progr., Symp. Ser., 1962, vol. 58, No. 38, p. 98.
9. Т о д е с О. М. О гидравлическом сопротивлении псевдооживленного слоя. Теор. основы химич. технол., 1967, т. 1, № 4.
10. Б у е в и ч Ю. А. Гидродинамическая модель дисперсных систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.