УДК 539.3: 517.958

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Б. Д. Аннин*,**, Н. И. Остросаблин*

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: annin@hydro.nsc.ru, abd@hydro.nsc.ru

Получено представление общего решения уравнений динамики трансверсально-изотропной термоупругой среды в случае выполнения условия Карриера — Гассмана с учетом дополнительного соотношения, связывающего температурные коэффициенты напряжений с модулями упругости. Смещения выражены через три разрешающих потенциала, удовлетворяющих трем неоднородным квазиволновым уравнениям. Потенциалы связаны уравнением теплопроводности. Дано представление решения с помощью функций напряжений и смещений. Две функции смещений определяются из решения системы двух однородных уравнений, не содержащих температуру. После определения этих функций смещений из третьего уравнения можно найти температуру. Из полученного представления решения следует также решение статических уравнений термоупругости.

Ключевые слова: трансверсальная изотропия, термоупругость, теплопроводность, условие Карриера — Гассмана, общие решения, плоские волны.

DOI: 10.15372/PMTF20190204

Модель упругой трансверсально-изотропной среды часто используется для описания слоистых композитов и слоистых горных пород [1]. Учет влияния температурного поля на деформации и распространение упругих волн также является важной задачей [2]. Связь температуры и поля деформаций влияет на скорость распространения упругих волн. Исследование динамических процессов в трансверсально-изотропных средах имеет большое значение при решении задач сейсмологии и геофизики. В данной работе развивается подход, предложенный в [3].

Выбирая в качестве оси симметрии (вращения) ось x_3 прямоугольной системы координат x_i, $i = 1, 2, 3$, запишем матрицу модулей упругости трансверсально-изотропной среды

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта III.23.3.1) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00679).

в следующем виде [4, 5]:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}-A_{21} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Здесь и далее обозначение sym соответствует элементам матрицы, симметричным относительно ее диагонали. Матрице A_{ij} (1) соответствует тензор четвертого ранга модулей упругости $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ связаны соотношениями Дюгамеля — Неймана [6–8]

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = A_{11}\,\partial_1 u_1 + A_{21}\,\partial_2 u_2 + A_{31}\,\partial_3 u_3 - \beta_1 u_4, \qquad \sigma_{32} = A_{44}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3)/2, \\ \sigma_{22} = A_{21}\,\partial_1 u_1 + A_{11}\,\partial_2 u_2 + A_{31}\,\partial_3 u_3 - \beta_1 u_4, \qquad \sigma_{31} = A_{44}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3)/2, \\ \sigma_{33} = A_{31}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + A_{33}\,\partial_3 u_3 - \beta_3 u_4, \qquad \sigma_{21} = (A_{11} - A_{21})(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)/2. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора смещения; $u_4 = T - T_0$ — изменение температуры, отсчитываемой от температуры T_0, соответствующей естественному состоянию; ∂_i — производная по координате x_i; β_1, β_3 — коэффициенты температурных напряжений.

Уравнения движения сплошной среды записываются в виде [7]

$$\partial_j \sigma_{ij} - \rho c^2\,\partial_{44} u_i + F_i = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

Здесь $x_4 = ct$; t — время; c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости; ρ — постоянная плотность среды; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование; $\partial_{kl} = \partial_k\,\partial_l$ — вторые производные по координатам x_k, x_l; F_i — компоненты вектора объемных сил. Постоянная c вводится для того, чтобы все коэффициенты в уравнениях, так же как и переменные x_i, $i = \overline{1, 4}$, имели одинаковую размерность.

При подстановке напряжений (2) в (3) получаем уравнения движения в смещениях [5, 7, 8]

$$\begin{gathered} [A_{11}\,\partial_{11} + \mu\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]u_1 + (\lambda + \mu)\,\partial_{12} u_2 + \varkappa\,\partial_{13} u_3 - \beta_1\,\partial_1 u_4 + F_1 = 0, \\ (\lambda + \mu)\,\partial_{21} u_1 + [\mu\,\partial_{11} + A_{11}\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]u_2 + \varkappa\,\partial_{23} u_3 - \beta_1\,\partial_2 u_4 + F_2 = 0, \\ \varkappa(\partial_{31} u_1 + \partial_{32} u_2) + [(A_{44}/2)(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]u_3 - \beta_3\,\partial_3 u_4 + F_3 = 0, \end{gathered} \qquad (4)$$

где

$$\lambda + 2\mu = A_{11}, \quad \mu = (A_{11} - A_{21})/2, \quad \lambda + \mu = (A_{11} + A_{21})/2, \quad \varkappa = A_{44}/2 + A_{31}.$$

Постоянные Ламе λ_1, μ_1 изотропного материала, ближайшего [4] по эвклидовой норме к трансверсально-изотропному материалу с матрицей модулей упругости (1), определяются формулами [5]

$$\lambda_1 = (A_{11} + 5A_{21} + 8A_{31} + A_{33} - 2A_{44})/15, \quad \mu_1 = (7A_{11} - 5A_{21} - 4A_{31} + 2A_{33} + 6A_{44})/30.$$

К уравнениям (4) добавляется уравнение теплопроводности [2, 7]

$$T_0 c\,\partial_4[\beta_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \beta_3\,\partial_3 u_3] + [c_1 c\,\partial_4 - k_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3\,\partial_{33}]u_4 = w. \qquad (5)$$

Здесь c_1 — теплоемкость в единице объема при постоянной деформации; k_1, k_3 — коэффициенты теплопроводности; w — количество тепла, возникающего в единицу времени в единице объема (источник тепла). При решении конкретных задач к уравнениям (4), (5) добавляются начальные и граничные условия.

Матрица

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{32} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$L_{11} = A_{11}\,\partial_{11} + \mu\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44},$$

$$L_{21} = (\lambda + \mu)\,\partial_{21}, \qquad L_{31} = \varkappa\,\partial_{31}, \qquad L_{14} = -\beta_1\,\partial_1,$$

$$L_{22} = \mu\,\partial_{11} + A_{11}\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44},$$

$$L_{32} = \varkappa\,\partial_{32}, \qquad L_{24} = -\beta_1\,\partial_2,$$

$$L_{33} = (A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}, \qquad L_{34} = -\beta_3\,\partial_3,$$

$$L_{41} = T_0 c\beta_1\,\partial_{41}, \quad L_{42} = T_0 c\beta_1\,\partial_{42}, \quad L_{43} = T_0 c\beta_3\,\partial_{43}, \quad L_{44} = -k_1(\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3\,\partial_{33} + c_1 c\,\partial_4$$

операторов системы уравнений (4), (5) относительно четырех неизвестных функций u_1, u_2, u_3, u_4 не является симметричной. Симметрична только часть, соответствующая трем смещениям u_1, u_2, u_3. Матрица вида (6) для статической задачи при $L_{41} = L_{42} = L_{43} = 0$ приведена в [6].

Можно показать, что вектор $C_{j2} = (-\partial_2,\, \partial_1,\, 0,\, 0)$ является собственным вектором матрицы операторов L (6) с собственным оператором

$$D_2 = \mu\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}, \tag{7}$$

т. е. выполняется соотношение $L_{ij}C_{j2} = C_{i2}D_2$. Определитель $|L|$ содержит в качестве множителя оператор (7), но второй множитель определителя матрицы (6) для динамической задачи не удается представить в виде произведения квадратичных множителей вида (7). Для статической задачи разложение определителя $|L|$ в произведение квадратичных множителей возможно [5, 6].

Рассмотрим уравнения (4) при $F_i = 0$ как систему для u_1, u_2, u_3 с правой частью вида

$$g_i = (\beta_1\,\partial_1 u_4,\ \beta_1\,\partial_2 u_4,\ \beta_3\,\partial_3 u_4). \tag{8}$$

Пусть выполняется условие [5, 8, 9, 10]

$$(A_{44}/2 + A_{31})^2 = (A_{11} - A_{44}/2)(A_{33} - A_{44}/2).$$

Выражение для $A_{44}/2$ представляется в виде

$$\frac{A_{44}}{2} = \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{11} + A_{33} + 2A_{31}}. \tag{9}$$

Тогда для симметричной матрицы L системы (4) имеет место соотношение [5, 11]

$$LC = CD, \tag{10}$$

где

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\alpha\,\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -\alpha\partial_{23} \\ \alpha\,\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix}; \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{A_{44}/2 + A_{31}}{A_{11} - A_{44}/2} = \frac{A_{33} - A_{44}/2}{A_{44}/2 + A_{31}} = \frac{A_{33} + A_{31}}{A_{11} + A_{31}}; \tag{12}$$

$$\begin{gathered} D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3), \\ D_1 = A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}, \\ D_2 = \mu\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}, \\ D_3 = (A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}) - \rho c^2\,\partial_{44}. \end{gathered} \tag{13}$$

Выражение (12) получено с учетом формулы (9) [8]. Столбцы матрицы (11) ортогональны друг другу и являются собственными векторами матрицы L или тензора Кристоффеля [4], а собственные значения определяются выражениями (13). При замене ∂_k на n_k, $k = 1, 2, 3$, а ∂_{44} — на v^2 из (13) вычисляются фазовые скорости v^2, соответствующие волновой нормали n_k [5].

С учетом формул (8), (10), (11), (13) решение системы (4) записывается в виде [5]

$$u = C\varphi, \qquad D\varphi = f, \qquad Cf = g,$$

или

$$\begin{gathered} u_1 = \partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 - \alpha\,\partial_{13}\varphi_3, \qquad u_2 = \partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2 - \alpha\,\partial_{23}\varphi_3, \\ u_3 = \alpha\,\partial_3\varphi_1 + (\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_3; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} [A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1 = f_1, \\ [\mu(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2 = f_2, \\ [(A_{44}/2)(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}) - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3 = f_3; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 - \alpha\,\partial_{13} f_3 = \beta_1\,\partial_1 u_4 = g_1, \qquad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 - \alpha\,\partial_{23} f_3 = \beta_1\,\partial_2 u_4 = g_2, \\ \alpha\,\partial_3 f_1 + (\partial_{11} + \partial_{22}) f_3 = \beta_3\,\partial_3 u_4 = g_3. \end{gathered} \tag{16}$$

Потенциалы φ_i, через которые выражаются смещения (14), удовлетворяют неоднородным квазиволновым уравнениям (15), а функции f_i — уравнениям (16). При $g_i = 0$ уравнения (16) являются однородными, как и уравнения (4). Если $f_i = 0$, то система (15) становится однородной. Однако в общем случае функции f_i нельзя считать нулевыми, так как при этом возможна потеря части решений системы (4).

Для однородной системы (4) с помощью матрицы (11) можно получить оператор симметрии [12, 13], который имеет вид [11]

$$S = CC' = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{1133} & & \mathrm{sym} \\ \alpha^2\,\partial_{1233} & \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{2233} & \\ \alpha\,\partial_{13}(1 - (\partial_{11} + \partial_{22})) & \alpha\,\partial_{23}(1 - (\partial_{11} + \partial_{22})) & (\partial_{11} + \partial_{22})^2 + \alpha^2\,\partial_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь штрих означает транспонирование матрицы. Выражение $u = S\tilde{u} = CC'\tilde{u}$ представляет собой формулу производства новых решений, т. е. если $L\tilde{u} = 0$, то из (10) следует, что $u = CC'\tilde{u}$ — новое решение: $Lu = LCC'\tilde{u} = CDC'\tilde{u} = CC'L\tilde{u} = 0$ [5].

Если $A_{33} = A_{11}$, то постоянные (9), (12) принимают значения

$$A_{44} = A_{11} - A_{31}, \qquad \alpha = 1, \tag{17}$$

а матрица (1) имеет вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \mathrm{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{31} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{31} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{21} \end{bmatrix} \tag{18}$$

и соответствует матрице модулей упругости трансверсально-изотропного материала, проводящего чисто продольные и поперечные волны при любом направлении волновой нормали [14]. Матрица (18) есть частный случай матрицы модулей упругости среды Грина [15], проводящей чисто продольные волны при произвольном направлении волновой нормали [14]. Представление общего решения однородной системы (4) при значениях постоянных (17), (18) приведено в [14]. Методами группового анализа [12] для однородной системы (4) при значениях постоянных (17), (18) получен ряд точных решений и выполнено групповое расслоение системы уравнений [16, 17]. Групповой анализ [12] применялся также при исследовании других уравнений упругости и пластичности [18].

Система (16) относительно четырех функций f_i, u_4 имеет вид

$$Au = Bv, \tag{19}$$

где A, B — матрицы операторов в (16); u, v — искомые функции. Если выполняется соотношение $AC = BD$, то общее решение системы (19) представляется в следующем виде:

$$u = C\varphi, \qquad v = D\varphi + g, \qquad Bg = 0. \tag{20}$$

В случае соотношений (16), (19) имеем операторы

$$A = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\alpha\,\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -\alpha\,\partial_{23} \\ \alpha\,\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + \alpha\beta_3\,\partial_{33} \\ 0 \\ (\beta_3 - \alpha\beta_1)\,\partial_3 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} \beta_1\,\partial_1 \\ \beta_1\,\partial_2 \\ \beta_3\,\partial_3 \end{bmatrix} [\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33}] = BD.$$

Решением третьего уравнения (20) является функция $g = g(x_4)$. Таким образом, общее решение уравнений (16) имеет вид

$$\begin{gathered} f_1 = [\beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + \alpha\beta_3\,\partial_{33}]\varphi, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = (\beta_3 - \alpha\beta_1)\,\partial_3\varphi, \\ u_4 = (\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33})\varphi + g(x_4), \end{gathered} \tag{21}$$

где $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $g = g(x_4)$ — произвольные функции соответствующих аргументов. С учетом (21) уравнения (15), (5) принимают вид

$$\begin{gathered} [A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1 = [\beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + \alpha\beta_3\,\partial_{33}]\varphi, \\ [\mu\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2 = 0, \\ [(A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}) - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3 = (\beta_3 - \alpha\beta_1)\,\partial_3\varphi, \\ T_0 c\,\partial_4\{[\beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + \alpha\beta_3\,\partial_{33}]\varphi_1 + (\beta_3 - \alpha\beta_1)\,\partial_3(\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_3\} + \\ + [c_1 c\,\partial_4 - k_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3\,\partial_{33}][(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33})\varphi + g(x_4)] = w. \end{gathered} \tag{22}$$

Если выполняется дополнительное условие $\beta_3 = \alpha\beta_1$, то уравнения (22) упрощаются:

$$\begin{gathered} [A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1 = \beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33})\varphi, \\ [\mu\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2 = 0, \\ [(A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}) - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3 = 0, \\ T_0 c\beta_1\,\partial_4(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33})\varphi_1 + \\ + [c_1 c\,\partial_4 - k_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3\,\partial_{33}][(\partial_{11} + \partial_{22} + \alpha^2\,\partial_{33})\varphi + g(x_4)] = w. \end{gathered} \tag{23}$$

Преимущество системы (23) по сравнению с системой (22) заключается в том, что второе и третье уравнения являются однородными. Если выразить $(\partial_{11}+\partial_{22}+\alpha^2\,\partial_{33})\varphi$ из первого уравнения и подставить в четвертое уравнение (23), то получится уравнение, содержащее только потенциал φ_1.

Таким образом, смещения u_1, u_2, u_3 выражаются через потенциалы по формулам (14), а температура u_4 — по формуле (21). Потенциалы φ_1, φ_2, φ_3 удовлетворяют квазиволновым уравнениям (22) или (23) и связаны через функции φ, $g(x_4)$ уравнением теплопроводности. В общем случае нельзя полагать, что функции φ, $g(x_4)$ являются нулевыми, так как при этом возможна потеря части решений. Дальнейшее исследование решений уравнений (22), (23) можно проводить с использованием метода плоских волн [2, 8].

В работах [2, 19] смещения выражены через потенциалы в следующем виде:

$$u_1=\partial_1\varphi_1-\partial_2\varphi_2,\qquad u_2=\partial_2\varphi_1+\partial_1\varphi_2,\qquad u_3=\partial_3\varphi_3. \tag{24}$$

При подстановке (24) в уравнения (4), (5) при $F_i=0$ получаем систему уравнений для потенциалов и температуры

$$\begin{gathered}
\partial_1\{[A_{11}\,(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1+\varkappa\,\partial_{33}\varphi_3-\beta_1u_4\}-\\
-\,\partial_2\,[\mu(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2=0,\\
\partial_2\{[A_{11}\,(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1+\varkappa\,\partial_{33}\varphi_3-\beta_1u_4\}+\\
+\,\partial_1\,[\mu(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2=0,\\
\partial_3\{\varkappa(\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_1+[(A_{44}/2)\,(\partial_{11}+\partial_{22})+A_{33}\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3-\beta_3u_4\}=0,\\
T_0c\,\partial_4[\beta_1\,(\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_1+\beta_3\,\partial_{33}\varphi_3]+[c_1c\,\partial_4-k_1(\partial_{11}+\partial_{22})-k_3\,\partial_{33}]u_4=w.
\end{gathered} \tag{25}$$

При выводе (25) не требуется выполнение условия (9).

Первые два уравнения (25) можно записать в виде

$$\partial_1f_1-\partial_2f_2=0,\qquad \partial_2f_1+\partial_1f_2=0, \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}
[A_{11}\,(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1+\varkappa\,\partial_{33}\varphi_3-\beta_1u_4=f_1,\\
[\mu\,(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2=f_2.
\end{gathered} \tag{27}$$

Уравнения (26) являются условиями Коши — Римана для аналитической функции

$$f_1+if_2=2g(z,x_3,x_4) \tag{28}$$

комплексной переменной $z=x_1+ix_2$, $i=\sqrt{-1}$. Из третьего уравнения (25) получаем

$$\varkappa\,(\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_1+[(A_{44}/2)\,(\partial_{11}+\partial_{22})+A_{33}\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3-\beta_3u_4=g_3(x_1,x_2,x_4), \tag{29}$$

где $g_3(x_1,x_2,x_4)$ — произвольная функция соответствующих аргументов, возникающая при интегрировании. Из (28) находим

$$\begin{gathered}
f_1-if_2=2\overline{g(z,x_3,x_4)};\\
f_1=g(z,x_3,x_4)+\overline{g(z,x_3,x_4)},\qquad f_2=i[\,\overline{g(z,x_3,x_4)}-g(z,x_3,x_4)].
\end{gathered} \tag{30}$$

Выражения (30) являются решением уравнений (26), выраженным через произвольную аналитическую функцию $g(z,x_3,x_4)$. Черта над величинами означает комплексное сопряжение.

Решение уравнений (26) можно представить через гармонические функции в виде

$$f_1=\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2,\qquad f_2=-\partial_2\psi_1+\partial_1\psi_2. \tag{31}$$

Подставляем (31) в (26):

$$\begin{aligned} &\partial_1(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2)-\partial_2(-\partial_2\psi_1+\partial_1\psi_2)=(\partial_{11}+\partial_{22})\psi_1=0,\\ &\partial_2(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2)+\partial_1(-\partial_2\psi_1+\partial_1\psi_2)=(\partial_{11}+\partial_{22})\psi_2=0. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32) следует, что выражения (31) есть решение уравнений (26), если ψ_1, ψ_2 являются гармоническими функциями по двум переменным x_1, x_2.

Таким образом, с учетом (27), (29), (31) система (25) сводится к системе уравнений

$$\begin{gathered} [A_{11}(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1+\varkappa\,\partial_{33}\varphi_3-\beta_1u_4=\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2,\\ [\mu(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2=-\partial_2\psi_1+\partial_1\psi_2,\\ \varkappa\,(\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_1+[(A_{44}/2)\,(\partial_{11}+\partial_{22})+A_{33}\,\partial_{33}-\rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3-\beta_3u_4=g_3(x_1,x_2,x_4),\\ T_0c\,\partial_4[\beta_1\,(\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_1+\beta_3\,\partial_{33}\varphi_3]+[c_1c\,\partial_4-k_1\,(\partial_{11}+\partial_{22})-k_3\,\partial_{33}]u_4=w. \end{gathered} \tag{33}$$

В [2] правые части первых трех уравнений (33) приняты нулевыми, но при этом, по-видимому, в общем случае возможна потеря части решений исходной системы (4).

Рассмотрим еще один подход, в котором используются функции напряжений и смещений. В работе [20] дано представление общего решения уравнений движения (3) через шесть произвольных функций напряжений и смещений φ_i, $i=\overline{1,6}$, например в форме динамического аналога представления Максвелла

$$\begin{gathered} \sigma_{11}+f_1=\partial_{33}\varphi_2+\partial_{22}\varphi_3+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_4,\\ \sigma_{22}+f_2=\partial_{33}\varphi_1+\partial_{11}\varphi_3+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_5,\\ \sigma_{33}+f_3=\partial_{22}\varphi_1+\partial_{11}\varphi_2+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_6,\\ \sigma_{23}=-\partial_{23}\varphi_1,\qquad \sigma_{13}=-\partial_{13}\varphi_2,\qquad \sigma_{12}=-\partial_{12}\varphi_3,\\ u_1=\partial_1\varphi_4,\qquad u_2=\partial_2\varphi_5,\qquad u_3=\partial_3\varphi_6,\\ F_1=\partial_1f_1,\qquad F_2=\partial_2f_2,\qquad F_3=\partial_3f_3. \end{gathered} \tag{34}$$

Кроме решения (34) в [20] приведены еще 50 равносильных вариантов общего решения уравнений (3).

Подставляем выражения (34) в определяющие соотношения (2) и уравнение теплопроводности (5):

$$\begin{gathered} \partial_{33}\varphi_2+\partial_{22}\varphi_3+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_4-f_1=A_{11}\,\partial_{11}\varphi_4+A_{21}\,\partial_{22}\varphi_5+A_{31}\,\partial_{33}\varphi_6-\beta_1u_4,\\ \partial_{33}\varphi_1+\partial_{11}\varphi_3+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_5-f_2=A_{21}\,\partial_{11}\varphi_4+A_{11}\,\partial_{22}\varphi_5+A_{31}\,\partial_{33}\varphi_6-\beta_1u_4,\\ \partial_{22}\varphi_1+\partial_{11}\varphi_2+\rho c^2\,\partial_{44}\varphi_6-f_3=A_{31}\,(\partial_{11}\varphi_4+\partial_{22}\varphi_5)+A_{33}\,\partial_{33}\varphi_6-\beta_3u_4; \end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered} -\partial_{23}\varphi_1=(A_{44}/2)\,(\partial_{32}\varphi_5+\partial_{23}\varphi_6)=(A_{44}/2)\,\partial_{23}(\varphi_5+\varphi_6),\\ -\partial_{13}\varphi_2=(A_{44}/2)\,(\partial_{31}\varphi_4+\partial_{13}\varphi_6)=(A_{44}/2)\,\partial_{13}(\varphi_4+\varphi_6),\\ -\partial_{12}\varphi_3=\mu\,(\partial_{21}\varphi_4+\partial_{12}\varphi_5)=\mu\,\partial_{12}(\varphi_4+\varphi_5); \end{gathered} \tag{36}$$

$$T_0c\,\partial_4[\beta_1\,(\partial_{11}\varphi_4+\partial_{22}\varphi_5)+\beta_3\,\partial_{33}\varphi_6]+[c_1c\,\partial_4-k_1\,(\partial_{11}+\partial_{22})-k_3\,\partial_{33}]u_4=w. \tag{37}$$

Так как функции φ_i в (34) произвольные, то уравнения (36) будут выполнены, если положить

$$\varphi_1=-(A_{44}/2)\,(\varphi_5+\varphi_6),\qquad \varphi_2=-(A_{44}/2)\,(\varphi_4+\varphi_6),\qquad \varphi_3=-\mu(\varphi_4+\varphi_5). \tag{38}$$

В (35) можно положить

$$f_1=\beta_1u_4,\qquad f_2=\beta_1u_4,\qquad f_3=\beta_3u_4,$$

в этом случае объемные силы имеют вид

$$F_1 = \beta_1\,\partial_1 u_4, \qquad F_2 = \beta_1\,\partial_2 u_4, \qquad F_3 = \beta_3\,\partial_3 u_4.$$

Тогда уравнения (4), как и все последующие уравнения, не будут содержать температурных слагаемых.

Из уравнений (35), (38) получаем систему

$$\begin{gathered}
[A_{11}\,\partial_{11} + \mu\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_4 + (A_{21} + \mu)\,\partial_{22}\varphi_5 + \varkappa\,\partial_{33}\varphi_6 = 0,\\
(A_{21} + \mu)\,\partial_{11}\varphi_4 + [\mu\,\partial_{11} + A_{11}\,\partial_{22} + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_5 + \varkappa\,\partial_{33}\varphi_6 = 0,\\
\varkappa\,(\partial_{11}\varphi_4 + \partial_{22}\varphi_5) + [(A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_6 = 0,
\end{gathered} \tag{39}$$

к которой добавляется уравнение (37). Вычитая из первого уравнения (39) второе уравнение, получаем

$$[\mu(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}](\varphi_4 - \varphi_5) = 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) будет выполнено, если положить $\varphi_5 = \varphi_4$, при этом уравнения (39), (37) принимают вид

$$\begin{gathered}
[A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_4 + \varkappa\,\partial_{33}\varphi_6 = 0,\\
\varkappa\,(\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_4 + [(A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_6 = 0,\\
T_0 c\,\partial_4[\beta_1\,(\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_4 + \beta_3\,\partial_{33}\varphi_6] + [c_1 c\,\partial_4 - k_1\,(\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3\,\partial_{33})]u_4 = w.
\end{gathered} \tag{41}$$

В общем случае из (40) следует, что $\varphi_5 = \varphi_4 + h$, где h — произвольная функция, удовлетворяющая квазиволновому уравнению (40). Здесь и далее рассматривается частный случай, когда $h = 0$. С учетом (34)–(37) запишем выражения для напряжений и смещений

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = (A_{11}\,\partial_{11} + A_{21}\,\partial_{22})\varphi_4 + A_{31}\,\partial_{33}\varphi_6 - \beta_1 u_4,\\
\sigma_{22} = (A_{21}\,\partial_{11} + A_{11}\,\partial_{22})\varphi_4 + A_{31}\,\partial_{33}\varphi_6 - \beta_1 u_4,\\
\sigma_{33} = A_{31}(\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_4 + A_{33}\,\partial_{33}\varphi_6 - \beta_3 u_4,\\
\sigma_{23} = (A_{44}/2)\,\partial_{23}(\varphi_4 + \varphi_6), \qquad \sigma_{13} = (A_{44}/2)\,\partial_{13}(\varphi_4 + \varphi_6), \qquad \sigma_{12} = 2\mu\,\partial_{12}\varphi_4,\\
u_1 = \partial_1\varphi_4, \qquad u_2 = \partial_2\varphi_4, \qquad u_3 = \partial_3\varphi_6.
\end{gathered} \tag{42}$$

Таким образом, формулы (42) являются представлением напряжений и смещений через две функции смещений φ_4, φ_6 и температуру u_4 для трехмерных динамических уравнений трансверсально-изотропной термоупругой среды. Функции φ_4, φ_6 удовлетворяют первым двум однородным уравнениям (41), которые в отличие от уравнений (33) не содержат температуру. Найдя функции φ_4, φ_6, из третьего уравнения (41) можно определить температуру u_4. Если в (41) коэффициент $\varkappa = A_{44}/2 + A_{31} = 0$, то функции φ_4, φ_6 удовлетворяют отдельным однородным квазиволновым уравнениям. При $\varkappa = 0$ однородная система (4) рассматривалась в [11]. В общем случае необходимо решать систему (39) из трех уравнений.

Матрица системы первых двух уравнений (41) имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44} & \varkappa\,\partial_{33}\\ \varkappa\,(\partial_{11} + \partial_{22}) & (A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Решение этой системы можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\varphi_4 = [(A_{44}/2)\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\psi_1 - \varkappa\,\partial_{33}\psi_2,\\
\varphi_6 = -\varkappa\,(\partial_{11} + \partial_{22})\psi_1 + [A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\psi_2,
\end{gathered} \tag{44}$$

где функции ψ_1, ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} |L|\psi_1 = \{[A_{11}(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\times \\ \times[(A_{44}/2)\,(\partial_{11}+\partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}] - \varkappa^2(\partial_{11}+\partial_{22})\partial_{33}\}\psi_1 = 0, \\ |L|\psi_2 = \{[A_{11}(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\times \\ \times\,[(A_{44}/2)(\partial_{11}+\partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}] - \varkappa^2(\partial_{11}+\partial_{22})\partial_{33}\}\psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Если модули упругости связаны условием $\varkappa^2 = (A_{11} - A_{44}/2)(A_{33} - A_{44}/2)$, т. е. выполняется соотношение (9) или (12), то определитель матрицы (43) разлагается в произведение квадратичных множителей

$$|L| = [A_{11}(\partial_{11}+\partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}][(A_{44}/2)\,\partial_{kk} - \rho c^2\,\partial_{44}] = D_1 D_3,$$

где операторы D_1, D_3 совпадают с операторами (13). В этом случае вместо представления (44), (45) возможно другое представление решения системы первых двух уравнений (41). Должны существовать матрицы T, F, такие что выполняется соотношение

$$LT = FD, \qquad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_3 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Тогда с учетом (46) общее решение первых двух уравнений системы (41) записывается в виде

$$\varphi = T\psi, \qquad D\psi = g, \qquad Fg = 0. \tag{47}$$

Так как матрица (43) не является симметричной, матрицы T и F, вообще говоря, различны. В [21, 22] приведены примеры построения общего решения систем уравнений с несимметричной матрицей операторов.

Однако в данном случае матрицы T и F совпадают и равны:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12}\,\partial_{33} \\ t_{21} & t_{22}\,(\partial_{11}+\partial_{22}) \end{bmatrix} = F. \tag{48}$$

В (48) коэффициенты t_{ij} имеют вид

$$t_{11} = (A_{11} - A_{44}/2)\alpha_1 + \varkappa\alpha_2, \qquad t_{12} = (A_{33} - A_{44}/2)\gamma_1 - \varkappa\gamma_2,$$
$$t_{21} = \varkappa\alpha_1 + (A_{33} - A_{44}/2)\alpha_2, \qquad t_{22} = -\varkappa\gamma_1 + (A_{11} - A_{44}/2)\gamma_2,$$

где α_1, α_2, γ_1, γ_2 — свободные параметры; определитель матрицы (48) не должен обращаться в нуль:

$$|T| = t_{11}t_{22}\,(\partial_{11}+\partial_{22}) - t_{21}t_{12}\,\partial_{33} \neq 0.$$

Столбцы матрицы (48) являются неортогональными собственными векторами матрицы (43) с собственными операторами D_1, D_3 (13), при этом учитывается выполнение условия (12). С учетом соотношений (46)–(48) общее решение первых двух уравнений системы (41) записывается в виде

$$\varphi_4 = t_{11}\psi_1 + t_{12}\,\partial_{33}\psi_2, \qquad \varphi_6 = t_{21}\psi_1 + t_{22}\,(\partial_{11}+\partial_{22})\psi_2; \tag{49}$$

$$\begin{aligned} [A_{11}\,(\partial_{11}+\partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\psi_1 = g_1, \\ [(A_{44}/2)\,(\partial_{11}+\partial_{22}+\partial_{33}) - \rho c^2\,\partial_{44}]\psi_2 = g_2; \end{aligned} \tag{50}$$

$$t_{11}g_1 + t_{12}\,\partial_{33}g_2 = 0, \qquad t_{21}g_1 + t_{22}\,(\partial_{11}+\partial_{22})g_2 = 0. \tag{51}$$

Потенциалы ψ_1, ψ_2, через которые выражаются функции φ_4, φ_6 (см. (49)), удовлетворяют независимым неоднородным квазиволновым уравнениям (50), а функции g_1, g_2 — однородным уравнениям (51). В общем случае функции g_1, g_2 нельзя считать нулевыми, так как при этом возможна потеря части решений первых двух уравнений системы (41).

Таким образом, в работе рассмотрены три варианта представления общего решения трехмерных динамических уравнений трансверсально-изотропной термоупругой среды. Наиболее простым и эффективным является представление с помощью функций напряжений и смещений, для которых тождественно выполняются уравнения движения сплошной среды. Для упрощения уравнений динамической задачи существенным является выполнение условия Карриера — Гассмана, налагающего ограничение на модули упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 5–14.
2. **Chadwick P., Seet L. T. C.** Wave propagation in transversely isotropic heat-conducting elastic material // Mathematika. 1970. V. 17, N 2. P. 255–274.
3. **Annin B. D., Ostrosablin N. I., Ugryumov R. I.** Representation of general solution of equations of transversely isotropic thermoelastic medium with respect to dynamics // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2041, iss. 1. P. 050003-1–050003-4.
4. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
5. **Остросаблин Н. И.** Диагонализация трехмерной системы уравнений в смещениях линейной теории упругости трансверсально-изотропных сред // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 125–145.
6. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
7. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
8. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Отражение плоских волн от жесткой стенки и свободной поверхности в трансверсально-изотропной среде // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 27–36.
9. **Carrier G. F.** The propagation of waves in orthotropic media // Quart. Appl. Math. 1946. V. 4, N 2. P. 160–165.
10. **Gassmann F.** Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // Pure Appl. Geophys. 1964/II. V. 58. P. 63–113.
11. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
12. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
14. **Остросаблин Н. И.** Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 143–151.
15. **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
16. **Аннин Б. Д., Бельмецев Н. Ф., Чиркунов Ю. А.** Групповой анализ уравнений динамической трансверсально-изотропной упругой модели // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, № 5. С. 735–746.
17. **Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F.** Exact solutions of three-dimensional equations of static transversely isotropic elastic model // Acta Mech. 2017. V. 228, N 1. P. 333–349.
18. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.

19. **Buchwald V. T.** Rayleigh waves in transversely isotropic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 293–318.
20. **Остросаблин Н. И.** Функции напряжений и смещений для уравнений движения сплошной среды // Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 123–138.
21. **Остросаблин Н. И.** Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 87–98.
22. **Остросаблин Н. И.** Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 61–71.

Поступила в редакцию 26/XI 2018 г.,
после доработки — 26/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.