ПМТФ, № 6, 1966

О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА, НАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

О. Б. Иевлева

(Воронеж)

В работе [1] рассмотрена задача о колебаниях физического маятника, имеющего сферическую полость, целиком заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. В настоящей работе изучается более общая задача о движении вокруг неподвижной точки осесимметрического твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Предполагается, что центр полости и неподвижная точка лежат на оси симметрии тела.

§ 1. Основные уравнения. 1°. Относительное движение жидкости в полости тела описывается уравнением Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + 2(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) =$$
$$= -\frac{1}{\gamma}\operatorname{grad} p - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\ \mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

На границе полости

$$\mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость жидкой частицы относительно тела, Ω — вектор угловой скорости тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы относительно неподвижной точки, γ — плотность жидкости, ν — вязкость, p — давление.

Уравнения движения тела можно получить, используя теорему о кинетическом моменте системы тело — жидкость относительно неподвижной точки:

$$d\mathbf{L}_0/dt = \mathbf{M}_0 \tag{1.4}$$

Кинетический момент системы

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{01} + L_{02}$$

где $\mathbf{L}_{01}$ — момент количества движения тела с затвердевшей жидкостью и $\mathbf{L}_{02}$ — момент количества относительного движения жидкости; $\mathbf{M}_0$ — главный момент относительно неподвижной точки внешних сил, действующих на систему.

Пусть ось симметрии тела совершает малые колебания. Предполагается, что движения жидкости в полости тела также малы.

2°. Движение жидкости в полости тела отнесем к системе xyz, жестко связанной с твердым телом. За начало этой системы примем центр полости O. Ось z направим по оси симметрии тела.

Линеаризация уравнения (1.1) приводит в проекциях на оси подвижной системы координат к системе уравнений

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\Omega_z u_y + \frac{d\Omega_y}{dt}z - \frac{d\Omega_z}{dt}y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta u_x$$
$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + 2\Omega_z u_x - \frac{d\Omega_x}{dt}z + \frac{d\Omega_z}{dt}x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\Delta u_y$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+\frac{d\Omega_x}{dt}y-\frac{d\Omega_y}{dt}x=-\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\triangle u_z \tag{1.5}$$

$$P=\frac{1}{\gamma}p+\left(\frac{d\Omega_y}{dt}x-\frac{d\Omega_x}{dt}y\right)b-\frac{1}{2}\Omega_z{}^2(x^2+y^2)+\Omega_z(\Omega_x x+\Omega_y y)(z+b)$$

где b — расстояние от неподвижной точки до центра полости.

Для определения положения тела установим две прямоугольные координатные системы с началом в неподвижной точке O: неподвижную систему xyz с вертикальной осью z и полуподвижную систему $\xi\eta\zeta$, участвующую в прецессионном и нутационном движениях тела, но не участвующую во вращении вокруг собственной оси. Ось ζ полуподвижной системы направим по оси симметрии тела.

Тогда положение тела можно определить углом δ_1 — между осями η и y, углом δ_2— между осями ξ и x и углом поворота δ_3 вокруг оси ζ.

Рассмотрим движение системы под действием силы тяжести.

Проектируем уравнение (1.4) на оси полуподвижной системы и, линеаризуя полученные уравнения, приходим к системе

$$-A\delta_1''+C\Omega_z\delta_2'+\gamma\frac{d}{dt}\int\limits_\tau[(xu_z-zu_x)\sin\delta_3+(yu_z-zu_y)\cos\delta_3]\,d\tau-$$

$$-\gamma b\frac{d}{dt}\int\limits_\tau(u_y\cos\delta_3+u_x\sin\delta_3)\,d\tau=Qa\delta_1$$

$$A\delta_2''+C\Omega_z\delta_1'+\gamma\frac{d}{dt}\int\limits_\tau[-(xu_z-zu_x)\cos\delta_3+(yu_z-zu_y)\sin\delta_3]\,d\tau+$$

$$+\gamma b\frac{d}{dt}\int\limits_\tau(u_x\cos\delta_3-u_y\sin\delta_3)\,d\tau=-Qa\delta_2 \tag{1.6}$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt}+\frac{\gamma}{C}\frac{d}{dt}\int\limits_\tau(xu_y-yu_x)\,d\tau=0$$

$$(A=A_1+I+\gamma\tau b^2,\quad C=C_1+I,\quad \Omega_z=\Omega_\zeta)$$

Здесь A_1 и C_1 — моменты инерции тела относительно осей ξ (η) и ζ, I — момент инерции массы жидкости относительно диаметра полости, τ — объем полости, Q — вес системы, a — расстояние от неподвижной точки до центра масс системы, расположенного ниже неподвижной точки.

Так как центр масс жидкости находится в начале подвижной системы координат, то проекции количества относительного движения жидкости на оси этой системы равны нулю, т. е.

$$\gamma\int\limits_\tau u_x\,d\tau=0,\qquad \gamma\int\limits_\tau u_y\,d\tau=0 \tag{1.7}$$

§ 2. Решение в обобщенных сферических функциях. 1°. Решение задачи будем искать в виде ряда по обобщенным сферическим функциям [2]. С этой целью в уравнениях (1.2), (1.5), (1.6) перейдем к сферическим координатам ρ, θ, φ и введем комплексные комбинации скоростей

$$u_+=-{}^1/_2\sqrt{2}\,(u_\varphi+iu_\theta),\qquad u_0=u_\rho,\qquad u_-={}^1/_2\sqrt{2}\,(u_\varphi-iu_\theta)$$

Тогда, учитывая (1.7), приходим к системе уравнений, описывающих движение жидкости

$$\frac{\partial u_0}{\partial\rho}+\frac{2u_0}{\rho}+\frac{i}{\rho\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u_+}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_+}{\partial\varphi}+u_+\operatorname{ctg}\theta\right)+$$

$$+\frac{i}{\rho\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u_-}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_-}{\partial\varphi}+u_-\operatorname{ctg}\theta\right)=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \sqrt{2}\Omega_z u_- \sin\theta + \sqrt{2}\Omega_z u_+ \sin\theta = -\frac{\partial P}{\partial\rho} + \nu\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial\rho} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - \frac{2u_0}{\rho^2} -$$
$$\left. - \frac{i\sqrt{2}}{\rho_2}\left(\frac{\partial u_+}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_+}{\partial\varphi} + u_+\operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{i\sqrt{2}}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_-}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_-}{\partial\varphi} + u_-\operatorname{ctg}\theta\right)\right]$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} - \sqrt{2}\Omega_z u_0 \sin\theta - 2i\Omega_z u_+ \cos\theta + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{d\Omega_x}{dt}(\cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi) +$$
$$+ \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{d\Omega_y}{dt}(\cos\theta\sin\varphi - i\cos\varphi) - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{i}{\rho\sqrt{2}}\left(\frac{\partial P}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+ \nu\left[\frac{\partial^2 u_+}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u_+}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_+}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_+}{\partial\varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u_+}{\partial\theta} - \frac{u_+}{\rho^2\sin^2\theta} - \right.$$
$$\left. - \frac{2i\cos\theta}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_+}{\partial\varphi} - \frac{i\sqrt{2}}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial t} + \sqrt{2}\Omega_z u_0 \sin\theta + 2i\Omega_z u_- \cos\theta + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{d\Omega_x}{dt}(-\cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi) -$$
$$- \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{d\Omega_y}{dt}(\cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi) + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{i}{\rho\sqrt{2}}\left(\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+ \nu\left[\frac{\partial^2 u_-}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u_-}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_-}{\partial\varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u_-}{\partial\theta} - \frac{u_-}{\rho^2\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{2i\cos\theta}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_-}{\partial\varphi} - \frac{i\sqrt{2}}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$\alpha = \Omega_y - i\Omega_x$$

Если ввести комплексную величину $\beta = \delta_2 + i\delta_1$, то уравнения движения тела примут вид

$$A\beta'' - iC\Omega_z\beta' + Q\alpha\beta + i\gamma\frac{d}{dt}\left\{e^{i\delta_3}\int_\tau e^{i\varphi}\left[\frac{u_+}{\sqrt{2}}(1-\cos\theta) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{u_-}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)\right]\right\}\rho\, d\tau = 0 \tag{2.3}$$
$$\frac{d\Omega_z}{dt} + \frac{\gamma}{C}\frac{d}{dt}\int_\tau \frac{u_- - u_+}{\sqrt{2}} p\sin\theta\, d\tau = 0 \tag{2.4}$$

2°. Решение гидродинамической задачи ищем в виде

$$u_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} f_{0n}^{i}(\rho, t)\, T_{0n}^{l}(^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0)$$
$$u_\pm = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} f_{\pm 1n}^{i}(\rho, t)\, T_{\pm 1n}^{l}(^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0) \tag{2.5}$$
$$P = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l} F_n^{i}(\rho, t)\, T_{0n}^{i}(^1/_2\pi - \varphi, \theta, 0)$$

Здесь f_{0n}^l, $f_{\pm 1n}^l$, F_n^l — неизвестные функции ρ и t; а T_{0n}^l, $T_{\pm 1n}^l$ — обобщенные сферические функции [2].

Подставим ряды (2.5) в уравнения (2.1)—(2.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых сферических функциях. После некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial f_{0n}{}^{l}}{\partial \rho}+\frac{2}{\rho} f_{0n}{}^{l} \frac{1}{\rho}+\left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)=0 \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{0n}{}^{l}}{\partial t}+i \sqrt{2} \Omega_{z} i A(l)\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)+\sqrt{2} \frac{\Omega_{z} i n}{\sqrt{l(l+1)}}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)- \\ -\sqrt{2} \Omega_{z} i B(l)\left(\frac{l+2}{l}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l+1}-f_{-1n}{}^{l+1}\right)=\frac{\partial F_{n}{}^{l}}{\partial \rho}+ \\ +\nu\left[\frac{\partial^{2} f_{0n}{}^{l}}{\partial \rho^{2}}+\frac{2}{\rho} \frac{\partial f_{0n}{}^{l}}{\partial \rho}-\frac{2+l(l+1)}{\rho^{2}} f_{0n}{}^{l}-\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{\rho^{2}}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)\right]\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)+2 \sqrt{2} \frac{\Omega_{z} i n}{\sqrt{l(l+1)}} f_{0n}{}^{l}-2 \Omega_{z} \frac{i n}{l(l+1)}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)- \\ -2 \Omega_{z} i A(l)\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l-1}-f_{-1n}{}^{l-1}\right)-2 \Omega_{z} i B(l)\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l+1}-f_{-1n}{}^{l+1}\right)= \\ =\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{\rho} F_{n}{}^{l}+\nu\left[\frac{\partial^{2}}{\partial \rho^{2}}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)+\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)-\right. \\ \left.-\frac{l(l+1)}{\rho^{2}}\left(f_{1n}{}^{l}+f_{-1n}{}^{l}\right)-\frac{2}{\rho} \sqrt{2l(l+1)} f_{0n}{}^{l}\right]\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)-2 \Omega_{z} i \frac{n}{l(l+1)}\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)-2 \sqrt{2} \Omega_{z} i A(l) f_{0n}^{l-1}- \\ -2 \Omega_{z} i A(l)\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l-1}-f_{-1n}{}^{l-1}\right)+2 \sqrt{2} \Omega_{z} i B(l) f_{0n}^{l+n}- \\ -2 \Omega_{z} i B(l)\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^{1/2}\left(f_{1n}{}^{l+1}+f_{-1n}{}^{l+1}\right)-\delta_{0}{}^{l-1} i 2 \rho \frac{d \Omega_{z}}{d t}+ \\ +\delta_{-1n}{}^{-l} \frac{\rho}{\sqrt{2}} \frac{d \alpha}{d t}+\delta_{1n}{}^{l} \frac{\rho}{\sqrt{2}} \frac{d \bar{\alpha}}{d t}=\nu\left[\frac{\partial^{2}}{\partial \rho^{2}}\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)+\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)-\right. \\ \left.-\frac{2}{\rho^{2}}\left(f_{1n}{}^{l}-f_{-1n}{}^{l}\right)\right], \quad A(l)=\left(\frac{\left(l^{2}-n^{2}\right)(l-1)}{(2l-1)^{2} l}\right)^{1/2}, \quad B(l)=\left(\frac{\left[(l+1)^{2}-n^{2}\right] l}{(2l+3)^{2}(l+1)}\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$A \beta''-i C \Omega_{z} \beta'+Q a \beta-\gamma \frac{8 \sqrt{2}}{3} \pi \frac{d}{d t} \int_{0}^{R} e^{i \delta_{s}}\left(f_{1-1}{}^{1}-f_{-1-1}{}^{1}\right) \rho^{3} d \rho=0 \tag{2.10}$$

$$\frac{d \Omega_{z}}{d t}+i \frac{4}{3} \frac{\gamma}{C} \frac{d}{d t} \int_{0}^{R}\left(f_{10}{}^{1}-f_{-10}{}^{1}\right) \rho^{3} d \rho=0 \tag{2.11}$$

$$(l=1,2,3, \ldots, \infty ; \; n=-l,-l+1, \ldots, 0,1,2, \ldots, l)$$

Уравнения (2.8)—(2.9) получены путем сложения и вычитания уравнений, соответствующих второму и третьему уравнениям системы (2.2). Здесь R — радиус полости; $\delta_{mn}{}^{l}$ равны 1, если все три индекса равны, в прочих случаях $\delta_{mn}{}^{l}=0$. Условие (1.3) будет удовлетворено, если

$$f_{0n}{}^{l}(R, t)=f_{\pm 1n}{}^{l}(R, t)=0 \tag{2.12}$$

Уравнения (2.10), (2.11) показывают, что на движение тела влияют лишь те движения жидкости, которые описываются членами рядов (2.5) с индексом $l=1$ и $n=-1$, 0.

§ 3. **Случай медленного собственного вращения.** Рассмотрим задачу о движении тела с малой угловой скоростью собственного вращения Ω_z.

При этом предположении членами уравнений (2.6)—(2.9), содержащими произведения $\Omega_z f_{mn}{}^{l}$, можно пренебречь. Тогда все эти уравнения, кроме уравнения (2.9) с $l=1$, будут такими же, как соответствующие уравнения о колебаниях жидкости в неподвижном сосуде [3].

Решения уравнения (2.9) с $l = 1$, как и в работе [1], можно искать в виде рядов по собственным функциям этой задачи, т. е. в виде

$$f_{1n}{}^1 - f_{-1n}{}^1 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(s_j)\, C_{1n}{}^j(t), \qquad \Phi_j(s_j) = \frac{J_{3/2}(s_j\rho / R)}{\sqrt{s_j\rho / R}} \tag{3.1}$$

Функции (3.1) удовлетворяют граничному условию (2.12); $C_{1n}{}^j$ — неизвестные функции времени; s_j — корни функции Бесселя $J_{3/2}(s)$.

Для определения Ω_z решаем уравнение (2.11) и уравнение (2.9) с $l = 1$ и $n = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_{10}{}^1 - f_{-10}{}^1) - i2\rho\frac{d\Omega_z}{dt} = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(f_{10}{}^1 - f_{-10}{}^1) + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(f_{10}{}^1 - f_{-10}{}^1) - \frac{2}{\rho^2}(f_{10}{}^1 - f_{-10}{}^1)\right] \tag{3.2}$$

Подставляя в (2.11) и (3.2) решение (3.1), заменяя в (3.2) ρ разложением в ряд

$$\rho = -\sqrt{2\pi}R\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+s_j^2}}{s_j}\Phi_j(s_j)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых Φ_j, получаем систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dC_{10}{}^j}{dt} + \nu\left(\frac{s_j}{R}\right)^2 C_{10}{}^j + iR\sqrt{2\pi}\,\frac{\sqrt{1+s_j^2}}{s_j}\frac{d\Omega_z}{dt} = 0$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} - i\frac{\gamma}{C}\frac{8\sqrt{2\pi}}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j\sqrt{1+s_j^2}}\frac{dC_{10}{}^j}{dt} = 0 \tag{3.3}$$

Ищем решения этой системы, пропорциональные $e^{\varkappa t}$, и приходим к характеристическому уравнению

$$0.1\frac{C-I}{I}\varkappa = -\varkappa\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j^2 + R^2\nu^{-1}\varkappa} \tag{3.4}$$

Из графика обеих частей этого уравнения легко видеть, что оно имеет один нулевой корень и счетное множество действительных отрицательных корней. Поэтому, если Ω_z было малым в начальный момент времени, то оно остается таким и в остальные моменты времени.

Для нахождения β подставим функции (3.1) в уравнения (2.10) и (2.9), полагая в последнем $l = 1$, $n = -1$. Те же вычисления, что и при определении Ω_z, приводят к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A\beta'' + Qa\beta + \gamma\frac{16\sqrt{\pi}}{3}R^4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j\sqrt{1+s_j^2}}\frac{d}{dt}[e^{i\delta_z}C_{1-1}{}^j] = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{dC_{1-1}{}^j}{dt} + \frac{\nu}{R^2}s_j^2C_{1-1}{}^j = \sqrt{\pi}R\frac{\sqrt{1+s_j^2}}{s_j}\frac{d\alpha}{dt} \tag{3.6}$$

Рассмотрим решения системы (3.5)—(3.6), пропорциональные $e^{\lambda t}$, в случае, когда $\Omega_z = \text{const}$ (тогда $\delta_z \approx \Omega_z t$).

Характеристическим уравнением будет

$$(A-I)\lambda^2 + Qa + 10I\lambda^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j^2 + R^2\nu^{-1}(\lambda - i\Omega_z)} = 0 \tag{3.7}$$

§ 4. **Случай произвольного вращения.** Рассматриваемая задача становится значительно сложнее, если отказаться от ограничения на величину Ω_z. Действительно входящая в уравнения (2.10), (2.11) функция $f_{1n}{}^1 - f_{-1n}{}^1$ будет одной из неизвестных бесконечной системы связанных между собой уравнений (2.9) с нечетными l и (2.6)—(2.8) — с четными l. Всякое конечное число уравнений этой системы содержит неизвестных больше числа уравнений. Нам удалось найти частное решение этих систем.

Попробуем найти решение системы (2.6)—(2.11), полагая $f_{0n}^2 = 0$. Из (2.6) при $l = 2$ находим, что

$$f_{1n}^2 + f_{-1n}^2 = 0$$

Из структуры системы (2.6)—(2.9) можно увидеть, что функции f_{mn}^l с $l > 1$ определяются. Однако для определения Ω_z и β эти функции определять не надо.

Для определения Ω_z, как и в первой задаче, решаем уравнения (2.11) и (2.9) с $l = 1$, $n = 0$. Если в (2.9) положить $f_{0n}^2 = f_{1n}^2 + f_{-1n}^2 = 0$, получается уравнение (3.2), и, таким образом, Ω_z находится так же, как в предыдущей задаче.

Найдем β в случае, когда Ω_z — постоянное. В этом случае $\delta_3 \approx \Omega_z t$ (предполагается, что начальный угол поворота тела вокруг оси ζ равен нулю).

Для нахождения β подставим (3.1) в уравнения (2.10) и (2.9), полагая в последнем $l = 1$, $n = -1$, $f_{0n}^2 = f_{1n}^2 + f_{-1n}^2 = 0$ и $\delta_3 = \Omega_z t$.

Разделение переменных, как и в предыдущей задаче, приводит к системе обыкновенных уравнений

$$A\beta'' - iC\Omega_z\beta' + Qa\beta - \gamma\frac{16\sqrt{\pi}}{3} R^4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j^2\sqrt{1+s_j^2}} \frac{d}{dt}(e^{i\delta_3} C_{1-1}^{j}) = 0 \qquad (4.1)$$

$$\frac{dC_{1-1}^{j}}{dt} + \left(\frac{\nu}{R^2}s_j^2 + i\Omega_z\right)C_{1-1}^{j} - \sqrt{\pi}R\,\frac{\sqrt{1+s_j^2}}{s_j}\frac{d\alpha}{dt} \qquad (4.2)$$

Уравнение частот системы (4.1), (4.2) имеет вид

$$(A-J)\lambda^2 - i(C-J)\Omega_z\lambda + Qa + \lambda(\lambda - i\Omega_z)\,10J\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j^2 + R^2\nu^{-1}\lambda} = 0 \qquad (4.3)$$

§ 5. Приближенные уравнения частот для больших и малых вязкостей. Введем безразмерный параметр ε и выведем приближенные уравнения частот задач в случаях, когда малы ε и ε^{-1}.

Уравнение (3.7) можно привести к виду

$$\left(1 - \frac{J}{A}\right)\mu^2 + 1 = -10\frac{J}{A}\mu^2 S^* \qquad \left(S^* = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}\right)$$

$$\lambda = \mu\left(\frac{Qa}{A}\right)^{1/2}, \qquad \Omega_z = \omega\left(\frac{Qa}{A}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon = \frac{R^2}{\nu}\left(\frac{Qa}{A}\right)^{1/2} \qquad (5.1)$$

Пусть ε мало. Если из суммы, стоящей в правой части уравнения (3.7), вычесть бесконечный ряд $(s_1^{-2} + s_2^{-2} + s_3^{-2} + \ldots)$, а затем добавить то же число, а также вычесть и добавить

$$-\varepsilon(\mu - i\omega)\sum_{j=1}^{\infty} s_j^{-4}, \qquad \varepsilon^2(\mu - i\omega)^2\sum_{j=1}^{\infty} s_j^{-6}, \qquad -\varepsilon^3(\mu - i\omega)^3\sum_{j=1}^{\infty} s_j^{-8}$$

и т. д., то уравнение (5.1) можно преобразовать к виду

$$\mu^2 + 1 = 10\frac{J}{A}\mu^2\left[\varepsilon(\mu - i\omega)S_4 - \varepsilon^2(\mu - i\omega)^2 S_6 + \varepsilon^3(\mu - i\omega)^3 S_8 - \ldots\right]$$

$$\left(S_{2N} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j^{-2N}\right) \qquad (5.2)$$

Числа s_j^2 на отрезке $[0, 1]$ будут собственными для интегрального оператора с ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3y - 1.8xy + \frac{1}{2}xy^3 + x & (x \leqslant y) \\ \frac{1}{2}x^3y - 1.8xy + \frac{1}{2}xy^3 + y & (x \geqslant y) \end{cases}$$

Используя известные теоремы из теории интегральных уравнений, можно подсчитать, что

$$S_2 = 0.1, \qquad S_4 = \frac{1}{350}, \qquad S_6 = \frac{1}{3^2 5^3 7}, \qquad S_8 = 0.6089\cdot 10^{-5} \text{ и т. д.}$$

Уравнение (5.2) принимает вид

$$\mu^2 + 1 = JA^{-1}\,[\varepsilon(\mu - i\omega)\,0.02857 - \varepsilon^2(\mu - i\omega)^2,\ 0.127\cdot 10^{-2} + {} + \varepsilon^3(\mu - i\omega)\,0.6089\cdot 10^{-4} + \ldots] \qquad (5.3)$$

Ищем μ в виде

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \ldots \tag{5.4}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (5.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем соотношения для определения μ. Определяя μ_k, находим

$$\mu = \pm i - \varepsilon\, 0.01429 \frac{J}{A}(1 \mp \omega) + \varepsilon^2 i\left[0.5.102\left(\frac{J}{A}\right)^2(\mp 1 + 1.6\,\omega \mp 0.6\,\omega^2) + \right.$$
$$\left. + 0.6349(\pm 1 - 2\omega \pm \omega^2)\right]10^{-3} + \varepsilon^3\left[2.332\left(\frac{J}{A}\right)^3(1 + 2\,\omega^2 \mp 1.312\,\omega \mp 0.6875\,\omega^3) - \right.$$
$$\left. - 5.442\left(\frac{J}{A}\right)^2(1 \mp 0.1667\ \ \omega - 2.333\,\omega^2 \mp 0.1667\ \ \omega^3) + 3.044\frac{J}{A}(1 \mp \omega)^3\right\}10^{-5} + \ldots$$

Пусть ε мало. Найдем приближенное значение суммы S^*, определенной (5.1), заменяя корень бесселевой функции $J_{3/2}(s)$ первым членом разложения в ряд (см. [4]).

Имеем $s_j = a_j - \alpha_j$, где $a_j = {}^1/_2\pi\,(1+2j)$

$$\alpha_j = \frac{1}{a_j} + \frac{2}{3a_j^3} + \frac{13}{15a_j^5} + \cdots \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{s_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]}\left[1 - \frac{2a_j\alpha_j + \alpha_j^2}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}\right]^{-1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)} + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_j\alpha_j + \alpha_j^2}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^2} + \frac{(2a_j\alpha_j + \alpha_j^2)^2}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(2a_j\alpha_j + \alpha_j^2)^2}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^4} + \cdots\right\} \tag{5.6}$$

Далее главный член первой суммы справа можно выделить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Delta a_j}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)} \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{da}{a^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(\mu - i\omega)}} \qquad (\Delta a_j = a_j - a_{j-1} = \pi) \tag{5.7}$$

Главный член второй суммы справа можно выделить точно так же. Учитывая (5.5), имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2a_j\alpha_j}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1 + {}^2/_3\,a_j^{-2} + {}^{13}/_{15}\,a_j^{-4} + \ldots}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^2} \approx$$
$$\approx \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Delta a_j}{[a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^2} \approx \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{da}{[a^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)]^2} = \frac{1}{2[\varepsilon(\mu - i\omega)]^{3/2}}$$

Если

$$\int_0^{\infty}\frac{da}{a^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}$$

представлять как площадь фигуры, ограниченной кривой

$$y = \frac{1}{a^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}, \qquad \text{а]} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Delta a_j}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}$$

как площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основаниями Δa_j и высотами

$$y_i = \frac{1}{a_j^2 + \varepsilon(\mu - i\omega)}$$

то главный член их разности можно рассматривать как сумму ряда, составленного из площадей прямоугольных треугольников с катетами Δa_j и $y_{j-1} - y_j$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^2+\varepsilon(\mu - i\omega)} - \sum_{j=1}^\infty \frac{\Delta a_j}{a_j^2+\varepsilon(\mu-i\omega)} \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^\infty \Delta a_j \left(\frac{1}{a_{j-1}^2+\varepsilon(\mu-i\omega)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a_j^2+\varepsilon(\mu-i\omega)}\right) \approx \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{2a\,da}{a^2+\varepsilon(\mu-i\omega)} - \frac{\pi}{2\varepsilon(\mu-i\omega)}. \tag{5.8}$$

Из (5.7), (5.8), с точностью до членов $O(\varepsilon^{-3/2})$,

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{s_j^2+\varepsilon(\mu-i\omega)} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mu-i\omega)}} - \frac{1}{\varepsilon(\mu-i\omega)}\right] \tag{5.9}$$

Подставляя выражение (5.9) в уравнение (5.1) и возвращаясь к переменным λ и Ω_z, получаем приближенное уравнение

$$(A-I)\lambda^2 + \frac{5I\lambda^2}{\sqrt{R^2/\nu\,(\lambda - i\Omega_z)}} - \frac{5I\lambda^2}{R^2/\nu\,(\lambda-i\Omega_z)} + Qa = 0 \tag{5.10}$$

Так же можно получить приближенные уравнения частот, соответствующие уравнению (4.3).

Уравнение (4.3) можно преобразовать к виду

$$\mu^2 - i\frac{C}{A}\omega\mu + 1 = 10\,\frac{I}{A}(\mu - i\omega)\left[\varepsilon\mu^2 S_4 - \varepsilon^2\mu^3 S_6 - \varepsilon^3\mu^4 S_8 - \ldots\right] \tag{5.11}$$

Для малых ε величину μ можно искать в виде ряда (5.4). Подставляя этот ряд в уравнение (5.11), нетрудно получить соотношение для определения μ_k.

При малом ε^{-1} находим следующее приближенное уравнение частот:

$$(A-J)\lambda^2 + 5\frac{\sqrt{\nu}}{R}J\lambda^{3/2} - \left[i\Omega_z(C-J) + \frac{5\nu}{R^2}J\right]\lambda -$$

$$- i\frac{(C-I)\sqrt{\nu}}{R}\Omega_z\lambda^{1/2} + Qa + i\,\frac{5\nu}{R^2}\Omega_z J = 0$$

В последние годы появились работы, в которых задача о движении тела, наполненного вязкой жидкостью, изучалась асимптотическими методами при больших и малых числах Рейнольдса.

Отметим, что уравнение (5.10) при $\Omega_z = 0$ переходит в уточненное уравнение, полученное в работе П. С. Краснощекова [5] и содержащее первые три члена разложения.

Случай малых чисел Рейнольдса исследовался в работе Ф. Л. Черноусько [6]. Если применить разработанную им методику к случаю сферической полости, то для угловой скорости собственного вращения получается уравнение, совпадающее с (3.4) с точностью до членов порядка ν^{-2}.

Для случая медленного вращения уравнение частот (3.7) также совпадает с уравнением, получаемым методом [6] с точностью до членов порядка Ω_z^2 и ν^{-2}. Несколько неожиданным является такое же совпадение уравнений частот в случае быстрого вращения, полученного в нашей работе для частного решения, а в [6] — в общем случае.

Поступила 3 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Иевлева О. Б. Малые колебания маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 23. вып. 6.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
3. Литвинков С. С. Об одной граничной задаче для линеаризованных уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 5.
4. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.
5. Краснощеков П. С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1963, т. 27. вып. 2.
6. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.