Из обсуждавшихся опытов можно сделать следующие выводы относительно теории наследственности и теории [7]. В случае простого нагружения при возрастающих напряжении или температуре применение теории наследственности и теории [7] приводит к практически одинаковым удовлетворительным результатам, при убывающих напряжении или температуре — к лучшим результатам приводит применение теории [7]. В случае сложного нагружения при неубывающих по величине напряжениях к лучшим результатам приводит применение теории наследственности.

Поступила 5 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О наследственных теориях ползучести. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Leaderman H. Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polymers. The Textile founbations. Washington, 1943.
3. Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С. Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. Инженерный сб., 1953, т. 17.
4. Nishihara T., Taira S., Tanaka K., Ohnami M. Creep of low carbon steel under varying temperatures. Proc. Ist Japan Congr. Test. Mater., 1958.
5. Taira S., Tanaka K., Ohji K., Harumo to J. Creep of mild steel under periodic stresses of rectangular wave. Bull. Japan Soc. Mech. Engrs, 1959, vol. 2, No. 8.
6. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
7. Бугаков И. И., Вакуленко А. А. О теории ползучести металлов. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
8. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. Creep under changing complex stress systems. Engineer. 1958, vol. 206, No. 5350.
9. Наместников В. С. Прямое и обратное кручение в условиях ползучести. ПМТФ, 1960, № 1.
10. Endo K., Omori S. Creep behavior of a mild steel under varying stresses. Mem. Fac. Engng, Hiroshima Univ., 1961, vol. 1, No. 4.

МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В. Д. Клюшников (Москва)

Обычно [1] для решения задач о сложном нагружении по теории течения предлагается пользоваться известным методом шагов. Процесс нагружения разделяется на шаги-этапы, внутри которых дифференциальные соотношения связи заменяются конечно-разностными.

Ниже для решения задач по теории течения [1] при условии, что ни в одной точке тела не происходит разгрузки, предлагается метод, вполне аналогичный методу упругих решений в теории малых упруго-пластических деформаций [2].

Рассмотрим тело из несжимаемого материала, следующего закону

$$2Gd\varepsilon_{ij} = dS_{ij} + dF(T)\,S_{ij} \qquad (dT \geqslant 0) \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам проводится суммирование: G — модуль упругого сдвига, S_{ij} — девиатор напряжения, ε_{ij} — тензор деформаций, T — интенсивность напряжений

$$T = \sqrt{3/2}\,\sqrt{S_{ij}S_{ij}} \tag{2}$$

Функцию $F(T)$ можно определить, например, из опыта на простое растяжение, и, так как она определяется только для положительных T, ее всегда можно представить в виде

$$F(T) = \sum_{\alpha=1} A_{2\alpha}' T^{2\alpha} = \sum_{\alpha=1} A_{2\alpha} (S_{ij}S_{ij})^{\alpha} \tag{3}$$

При простом растяжении получим

$$3G\varepsilon_x = \sigma_x + \sum_{\alpha=1} B_{2\alpha+1}\sigma_x^{2\alpha+1}, \qquad B_{2\alpha+1} = \frac{2\alpha}{2\alpha+1} A_{2\alpha}' = \frac{4\alpha}{3(2\alpha+1)} A_{2\alpha} \tag{4}$$

Пусть поверхностные F_i и массовые V_i силы изменяются с ростом параметра нагружения λ (который может быть временем) так, что ни в одной точке тела не происходит разгрузки ($dT \geqslant 0$) и F_i и V_i можно представить в виде

$$F_i = \sum_{k=1} F_i^{(k)} \lambda^k, \qquad V_i = \sum_{k=1} V_i^{(k)} \lambda^k \tag{5}$$

Здесь $F_i^{(k)}$, $V_i^{(k)}$ — функции только координат; и вообще в дальнейшем все величины с индексом наверху будут функциями только координат.

Поскольку связь между напряжениями и деформациями всюду в теле описывается единым аналитическим соотношением (1), то естественно искать решение задачи для напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1} \sigma_{ij}^{(k)} \lambda^k \tag{6}$$

Гидростатическое давление σ определяется соотношением

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\sum \sigma_{ii}^{(k)} \lambda^k$$

Поэтому девиатор

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \sum_{k=1} S_{ij}^{(k)}\lambda^k \quad (\delta_{ij} \text{ — символ Кроннекера}) \tag{7}$$

$$S_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)}\delta_{ij}, \qquad \sigma^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}^{(k)} \tag{8}$$

при этом

$$S_{ij}S_{ij} = \sum_{k=1} S_{ij}^{(k)}\lambda^k \sum_{n=1} S_{ij}^{(n)}\lambda^n = \sum_{n=2} a_n\lambda^n, \; a_n = \sum_{m=1}^{m=n-1} S_{ij}^{(m)} S_{ij}^{(n-m)} \tag{9}$$

Для $F(T)$ получим ряд

$$F(T) = \sum_{n=2} \frac{1}{n}\chi_n\lambda^n, \qquad \chi_n = n\sum_{\alpha=1} A_{2\alpha} \sum_{k_1+\ldots+k_\alpha=n} a_{k_1}\cdots a_{k_\alpha} \tag{10}$$

Как видно, χ_n определяется через $S_{ij}^{(k)}$ с индексами $k < n$. Внося формулы (7) и (10) в соотношение (1) и интегрируя с учетом нулевых начальных данных, получим

$$2G\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1} S_{ij}^{(k)}\lambda^k + \sum_{m=2}\left[\frac{1}{m+2}\sum_{n=2}^{n=m}\chi_n S_{ij}^{(m-n+1)}\right]\lambda^{m+1} \tag{11}$$

Это можно представить в форме

$$2G\varepsilon_{ij} = S_{ij}^{(1)}\lambda + S_{ij}^{(2)}\lambda^2 + \sum_{k=3}(S_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)})\lambda^k \tag{12}$$

Здесь

$$R_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{n=k-1}\chi_n S_{ij}^{(k-n)}, \qquad R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(2)} = 0 \tag{13}$$

Введем новые тензоры

$$\sigma_{ij}^{(k)*} = \sigma_{ij}^{(k)} + N_{ij}^{(k)}. \qquad 2G\varepsilon_{ij}^{(k)*} = S_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)} \tag{14}$$

$$N_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{n=k-1}\chi_n\sigma_{ij}^{(k-n)}, \qquad N_{ij}^{(1)} = N_{ij}^{(2)} = 0 \tag{15}$$

Так как $R_{ij}^{(k)} = N_{ij}^{(k)} - (1/3)N_{ii}^{(k)}\delta_{ij}$, то

$$2G\varepsilon_{ij}^{(k)*} = S_{ij}^{(k)*} = \sigma_{ij}^{(k)*} - \frac{1}{3}\sigma^{(k)}\sigma_{ij}^{*} \tag{16}$$

т. е. тензоры $\varepsilon_{ij}^{(k)*}$ и $\sigma_{ij}^{(k)*}$ связаны законом Гука для несжимаемого материала.

Формула (12) в новых обозначениях примет вид

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}\varepsilon_{ij}^{(k)*}\lambda^k \tag{17}$$

В силу того что уравнения совместности должны выполняться при любом значении λ, они должны выполняться для каждого $\varepsilon_{ij}^{(k)*}$. Аналогично этому уравнения равновесия должны выполняться для любого $\sigma_{ij}^{(k)}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} + V_i^{(k)} = 0 \tag{18}$$

Внося сюда $\sigma_{ij}^{(k)*}$, по формуле (14) получим

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)*}}{\partial x_j} + V_i^{(k)} = \frac{\partial N_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} \tag{19}$$

На поверхности тела имеем

$$\sigma_{ij}^{(k)} l_j = F_i^{(k)} \tag{20}$$

где l_j — направляющие косинусы внешней нормали. Внося сюда (14), получим

$$\sigma_{ij}^{(k)*} l_j = F_i^{(k)} + N_{ij}^{(k)} l_j \tag{21}$$

Как видно, для тензоров $\sigma_{ij}^{(k)*}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)*}$ нужно решить задачу упругости при поверхностных и массовых силах

$$F_i^{(k)*} = F_i^{(k)} + N_{ij}^{(k)} l_j, \quad V_i^{(k)*} = V_i^{(k)} - \frac{\partial N_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} \tag{22}$$

соответственно. Отметим, что, в силу выполнимости уравнений (18) и (20), для любых $\sigma_{ij}^{(m)}$

$$\frac{\partial N_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{n=k-1} \left(\sigma_{ij}^{(k-n)} \frac{\partial \chi_n}{\partial x_j} - \chi_n V_i^{(k-n)} \right) \tag{23}$$

$$N_{ij}^{(k)} l_j = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{n=k-1} \chi_n F_i^{(k-n)}$$

Как нетрудно видеть, тензоры $N_{ij}^{(k)}$ определяются через решения с индексом, меньшим k, таким образом, метод последовательного определения $\sigma_{ij}^{(k)*}$ и $\varepsilon_{ij}^{(k)*}$, а следовательно и $\sigma_{ij}^{(k)}$, возможен. В силу того что $N_{ij}^{(1)} = N_{ij}^{(2)} = 0$, для $\sigma_{ij}^{(1)*} = \sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2*)} = \sigma_{ij}^{(2)}$ имеем задачу упругости при $F_i^{(k)*} = F_i^{(k)}$, $V_i^{(k)*} = V_i^{(k)}$. Затем находим $N_{ij}^{(3)} = {}^1/_3\, \chi_2 \sigma_{ij}^{(1)}$ и определяем $\sigma_{ij}^{(3)*}$, $\varepsilon_{ij}^{(3)*}$, решая задачу упругости при внешних силах, задаваемых формулами (22). Теперь по формуле (14)

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(3)*} - N_{ij}^{(3)}$$

а зная $\sigma_{ij}^{(3)}$, определяем

$$N_{ij}^{(4)} = \frac{1}{4} \left(\chi_2 \sigma_{ij}^{(2)} + \chi_3 \sigma_{ij}^{(1)} \right) \quad \text{и т. д.}$$

Как видно, $N_{ij}^{(m)}$ выражается через упругое решение с индексом $m - 2$ и ниже.

Таким образом, задача о сложном нагружении по теории течения сводится к последовательному решению задач упругости с некоторыми фиктивными внешними силами. Как обычно, вычисления проводятся до тех пор, пока разность внутренних полей для двух последовательных упругих задач не будет достаточно малой. Как видно, в противоположность методу шагов, здесь для уточнения решения не требуется проводить заново весь расчет.

При конкретных расчетах, учитывая разброс экспериментальных данных по определению функции $F(T)$, можно ограничиться в ряде (3) одним-двумя членами. Сохранение одного только члена дает аппроксимацию кривой простого растяжения в виде кубической параболы. При этом, как нетрудно видеть, $X_n = na_n$, и вычисления значительно упрощаются.

Поступила 28 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.