УДК 533

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ СЕМИМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ ВСЕХ ПЕРЕНОСОВ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: habirov@anrb.ru

На семимерной подалгебре всех переносов включая галилеевы переносы рассмотрено дифференциально инвариантное решение ранга 1 для уравнений газовой динамики. Получены точные решения с равноускоренной плоскостью уровня инвариантных функций. Неизоэнтропическая волна зависит от двух произвольных функций и постоянных. Общее решение изоэнтропической простой волны зависит только от постоянных.

Ключевые слова: газовая динамика, подалгебра переносов, простая волна.

Введение. В газовой динамике простая волна — это частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1, построенное по четырехмерной подалгебре переносов. В этом случае все газодинамические функции зависят от одного параметра. Поверхности уровня представляют собой гиперплоскости и звуковые характеристики [1. § 13]. Невырожденная простая волна задает изоэнтропическое движение. Для любой подалгебры, допускаемой уравнениями газовой динамики, решение в виде простой волны можно получить, если все дифференциальные инварианты базиса зависят от одного параметра. Рассматривается семимерная абелева подалгебра всех переносов включая галилеевы переносы. В этом случае базис дифференциальных инвариантов содержит элементы тензора градиента скорости и координаты вектора ускорения. Решение типа простой волны задается переопределенной системой уравнений, общее решение которой получено. Поверхность уровня термодинамических функций представляет собой плоскость, совершающую движение с постоянным ускорением в направлении нормали. Неизоэнтропическое решение зависит от двух произвольных функций и постоянных, изоэнтропическое решение зависит только от постоянных.

1. Дифференциально инвариантное решение ранга 1+0. Рассмотрим подалгебру 7.14 всех переносов, в том числе галилеевых переносов (см. приложение и табл. 2 в [1]). В декартовой системе координат операторы базиса имеют вид

$$\partial_t, \quad \partial_{x^k}, \quad t\,\partial_{x^k} + \partial_{u^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Продолжив операторы галилеевых переносов до производных второго порядка, получаем дифференциальные инварианты

$$\rho, \quad S, \quad U^i_j, \quad DU^i, \quad U^i_{jk}, \quad DU^i_j, \quad D^2U^i - Du^kU^i_k,$$

где ρ — плотность; S — энтропия; $\{U^i\} = (u^k, \rho, S)$, $i = 1, \ldots, 5$; $U^i_k = U^i_{x^k} = D_kU^i$; $D = D_t + u^kD_k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-00648, 14-01-97027), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (грант № НШ-6706.2012.1) и Правительства РФ согласно Постановлению № 220 (грант № 11.G34.31.0042).

Операторы инвариантного дифференцирования, использование которых приводит к появлению дифференциальных инвариантов старшего порядка, определяются из выражений для инвариантов D_k, D. Эти операторы образуют алгебру Ли над полем инвариантов:

$$[D_k, D_j] = 0, \qquad [D_j, D] = u_j^k D_k. \tag{1.1}$$

Базис дифференциальных инвариантов состоит из 14 выражений

$$\rho, \quad S, \quad u_j^i, \quad a^i = Du^i,$$

где $\nabla \boldsymbol{u}$ — матрица-градиент скорости; $\boldsymbol{a}$ — ускорение.

Уравнения газовой динамики запишем через инварианты

$$D\rho + \rho u_k^k = 0, \qquad \rho a^k + f_\rho D_k \rho + f_S D_k S = 0, \qquad DS = 0, \tag{1.2}$$

где $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния. Из (1.2) следует, что существует 10 независимых инвариантов базиса: ρ, S, u_j^i $(i \neq j)$, u_1^1, u_2^2.

Пусть α — независимый инвариант базиса. Тогда $\alpha_0 = D\alpha$, $\alpha_k = D_k\alpha$ — инварианты старшего порядка.

Применяя для функций α и u^i коммутационные соотношения (1.1), получаем условия совместности

$$\begin{aligned} D_k\alpha_j &= D_j\alpha_k, \qquad D_j\alpha_0 - D\alpha_j = u_j^k\alpha_k, \\ D_k u_j^i &= D_j u_k^i, \qquad D_j a^i - Du_j^i = u_j^k u_k^i, \end{aligned} \tag{1.3}$$

которые связывают только инварианты.

Дифференциально инвариантные подмодели могут быть следующих рангов: $1{+}0$, $1{+}1$, $1+2$, $1+3$; $2+0$, $2+1$ [2]. Решения ранга $1+3$ соответствуют частично инвариантным решениям ранга 1 дефекта 4, которые для неизоэнтропических движений определяются переопределенной системой уравнений

$$D\alpha = 0, \qquad D\boldsymbol{u} + \nabla \int \rho^{-1}\, dp = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

где ρ, p, S — функции переменной α для любого уравнения состояния. В трехмерном случае система не приведена в инволюцию [1. § 9].

Дифференциально инвариантная подмодель ранга $1+0$ представляет собой простую волну для подалгебры 7.14. Решение имеет вид

$$\rho(\alpha), \quad S(\alpha), \quad u_{xj}^i = u_j^i(\alpha), \quad Du^i = a^i(\alpha),$$

где $\alpha(t, \boldsymbol{x})$ — функция общего вида.

Уравнения (1.2) определяют связь между инвариантами

$$\rho'\alpha_0 + \rho u_k^k = 0, \quad \rho a^k + \alpha_k p' = 0, \quad S'\alpha_0 = 0, \quad p(\alpha) = f(\rho(\alpha), S(\alpha)). \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) замыкают подмодель

$$\begin{aligned} \alpha_j'\alpha_k &= \alpha_k'\alpha_j, \qquad \alpha_0'\alpha_j - \alpha_j'\alpha_0 = u_j^k\alpha_k, \\ u_j^{i\prime}\alpha_k &= u_k^{j\prime}\alpha_j, \qquad a^{i\prime}\alpha_j - u_j^{i\prime}\alpha_0 = u_j^k u_k^i. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подмодель (1.4), (1.5) включает 25 уравнений и связывает 18 инвариантов: a^i, u_j^i, ρ, S, α_0, α_k. Проинтегрировав уравнения для α_k $(k = 1, 2, 3)$, получаем $\alpha_k = c_k m(\alpha)$, где $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — единичный постоянный вектор. Не ограничивая общности, будем полагать $m = 1$. Тогда

$$\nabla\alpha = \boldsymbol{c}, \qquad \alpha = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} + \sigma(t), \qquad \boldsymbol{c}^2 = 1. \tag{1.6}$$

Проинтегрировав уравнения для u^i_j в (1.5), получаем

$$u^i_j = c_k b^i(\alpha) + C^i_k \quad \text{или} \quad \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{b} + C, \tag{1.7}$$

где $C = B + E\langle \boldsymbol{r} \rangle$ — постоянная матрица, представленная в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц. Систему координат можно выбрать таким образом, чтобы симметричная матрица стала диагональной: $B = \operatorname{diag}(e_1, e_2, e_3)$, $\boldsymbol{r} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Уравнения для параметров α_0, $\boldsymbol{a}$ в (1.5) представим в виде

$$\begin{gathered} \alpha_0' = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c}, \qquad C\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c}), \\ \boldsymbol{c} \otimes ((\boldsymbol{a} - \alpha_0 \boldsymbol{b})' + (\boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}C) = C\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{b} + C^2. \end{gathered} \tag{1.8}$$

В результате скалярного умножения на $\boldsymbol{c}$ последнего равенства в (1.8) имеем

$$(\boldsymbol{a} - \alpha_0 \boldsymbol{b})' = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}C)C, \qquad (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} - I)C^2 = 0, \tag{1.9}$$

где I — единичная матрица. Поскольку определитель матрицы $\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} - I$ равен нулю, матрица C^2 может быть ненулевой.

Уравнения (1.4), (1.6)–(1.9) представляют собой подмодель простых волн для подалгебры всех переносов.

2. Решение алгебраических уравнений. Подмодель простых волн включает алгебраические соотношения для констант. Поскольку ранг матрицы $\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} - I$ равен двум, алгебраическое матричное уравнение (1.9) имеет решение $C^2 = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор. Отсюда следует равенство нулю определителя $|C^2| = |C|^2 = 0$. Из (1.8) находим $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c})^2 = \operatorname{tr} C^2$. Из формулы Гамильтона — Кэли

$$C^3 = C^2 \operatorname{tr} C - 2^{-1}((\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr} C^2)C + |C| I$$

и из равенства $C^4 = (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{k})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{c})C^2$ получаем

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{c})C^2 = C^3 \operatorname{tr} C - 2^{-1}((\operatorname{tr} C)^2 - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{k})C^2, \\ (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{k} - (\operatorname{tr} C)^2)(C^2 - C \operatorname{tr} C) = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Следовательно, $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{k} = (\operatorname{tr} C)^2$, $C^3 = C^2 \operatorname{tr} C$. Из равенства (2.1) получаем $C\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \operatorname{tr} C$ или $\boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c} = \operatorname{tr} C$.

Равенства $|C| = 0$, $\operatorname{tr} C^2 = (\operatorname{tr} C)^2$ эквивалентны соотношениям

$$|B| + \boldsymbol{r} \cdot B\boldsymbol{r} = 0, \qquad (\operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr} B^2 + 2\boldsymbol{r}^2 = 0 \tag{2.2}$$

или

$$e_1 e_2 e_3 + e_1 \omega_1^2 + e_2 \omega_2^2 + e_3 \omega_3^2 = 0, \quad e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0.$$

3. Неизоэнтропическая простая волна. Пусть $\alpha_0 = 0$, тогда в силу соотношений (2.2) уравнения подмодели (1.4), (1.9), (1.8) принимают вид

$$\boldsymbol{a} = -\rho^{-1} p' \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = -\operatorname{tr} C, \quad (\rho^{-1} p')' \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}C)C = 0. \tag{3.1}$$

Из последнего равенства (3.1) получаем $p' = N\rho$, где N — постоянная, и два уравнения для величины $\boldsymbol{b}$, которую целесообразно представить в виде $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{b}_1$. Имеем

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0, \qquad B\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{r} = 0, \qquad B\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0.$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{b}_1$ ортогонален векторам $\boldsymbol{c}$ и $B\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}_1 = \mu'(\alpha) \boldsymbol{c} \times B\boldsymbol{r}$.

В силу (1.6) из уравнения $\alpha_0 = D\alpha = 0$ следует

$$\sigma' + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c} = 0. \tag{3.2}$$

Подставив в равенство (1.7) найденный вектор $\boldsymbol{b}$ и проинтегрировав его, получаем

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{c}C(\alpha - \sigma) + \boldsymbol{x}C + \mu(\alpha)\boldsymbol{c} \times B\boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}(t). \tag{3.3}$$

Первое уравнение (3.1) и уравнение (3.2) становятся уравнениями для $\boldsymbol{d}$ и σ:

$$\boldsymbol{a} = D\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d}' + \sigma'\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{d}C = -N\boldsymbol{c}, \qquad \sigma' + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

В результате скалярного умножения на $\boldsymbol{c}$ с точностью до переноса по t получаем

$$\begin{gathered} \sigma'' = N, \qquad \sigma = 2^{-1}Nt^2, \\ \boldsymbol{d}' + \boldsymbol{d}C = -N\boldsymbol{c}(tC + I), \qquad \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = -Nt. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Последнее уравнение в (3.4) представляет собой интеграл первого векторного уравнения. Умножив векторное уравнение (3.4) на матрицу C и проинтегрировав его, получаем $\boldsymbol{d}C = -Nt\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{l}$ — постоянный вектор. После этого первое уравнение (3.4) интегрируем с точностью до галилеевых переносов: $\boldsymbol{d} = -t(\boldsymbol{l} + N\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{c} = 0$.

Таким образом, решение для неизоэнтропической простой волны имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} + 2^{-1}Nt^2, \qquad \boldsymbol{c}^2 = 1, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}C - \alpha\boldsymbol{c}C + \mu(\alpha)\boldsymbol{c} \times B\boldsymbol{r} + 2^{-1}Nt^2\boldsymbol{c}C - t(\boldsymbol{l} + N\boldsymbol{c}), \quad \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{c} = 0, \\ p' = N\rho, \qquad p = f(\rho, S), \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\mu(\alpha)$, $\rho(\alpha)$ — произвольные функции; N — постоянная; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{l}$ — постоянные векторы; $C = B + E\langle\boldsymbol{r}\rangle$ — постоянная матрица; $|C| = 0$, $\operatorname{tr} C^2 = (\operatorname{tr} C)^2$, $\boldsymbol{c} \cdot C\boldsymbol{c} = \operatorname{tr} C$.

4. Изоэнтропическая простая волна. Пусть $\alpha_0 \neq 0$, тогда $S = S_0$ — постоянная, $p = f(\rho)$ — уравнение состояния. В силу соотношений (2.2) уравнения подмодели (1.4), (1.8), (1.9) принимают вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a} = -\rho^{-1}p'\boldsymbol{c}, \qquad \alpha_0' = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \operatorname{tr} C, \\ (\rho^{-1}p')'\boldsymbol{c} + (\alpha_0\boldsymbol{b})' + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}C)C = 0; \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\rho'\alpha_0 + \rho(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \operatorname{tr} C) = 0, \qquad \rho\alpha_0 = L, \tag{4.2}$$

где L — постоянная в интеграле.

Скалярное умножение на $\boldsymbol{c}$ последнего уравнения в (4.1) дает уравнение, проинтегрировав которое два раза получаем интеграл типа интеграла Бернулли

$$\int \rho^{-1}\,dp + \frac{1}{2}\,\alpha_0^2 = Nt + M \tag{4.3}$$

(N, M — постоянные). Из (4.2), (4.3) определяются функции $\rho(\alpha)$, $\alpha_0(\alpha)$. Уравнения (4.1) определяют вектор $\boldsymbol{b}$, который удобно искать в виде $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{b}_1$:

$$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{c} = \alpha_0', \qquad (\alpha_0(\alpha_0'\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}C))' = \boldsymbol{b}_1C. \tag{4.4}$$

Умножив на матрицу C векторное уравнение (4.4), получаем уравнение для величины $\boldsymbol{b}_1C$ и интегрируем его: $\boldsymbol{b}_1C = \alpha_0'\boldsymbol{c}C - \alpha_0^{-1}\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ — постоянный вектор). После этого уравнения (4.4) также интегрируем:

$$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}C + \alpha_0'\boldsymbol{c} + \frac{1}{\alpha_0}\Big(\boldsymbol{m}C\int \alpha_0^{-1}\,d\alpha - \boldsymbol{m}\Big), \qquad \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

Уравнения подмодели решены. Из уравнений (1.7), (1.6), (4.1) определим скорость $\boldsymbol{u}$ и параметр α:

$$\alpha_0 = D\alpha = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u} + \sigma', \qquad \boldsymbol{a} = D\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}(\alpha_0\alpha_0' - N) = \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}. \tag{4.5}$$

В результате скалярного умножения на $\boldsymbol{c}$ первого уравнения (4.5) с точностью до переноса по t получаем $\sigma'' = N$, $\sigma = Nt^2/2$. Таким образом, уравнения (4.5) принимают вид

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u} = \alpha_0 - Nt, \quad \boldsymbol{u}_t = -\boldsymbol{u}C - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}(\alpha_0\alpha_0' - N), \quad \nabla\boldsymbol{u} = C + \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}. \tag{4.6}$$

Запишем уравнения для вектора $\boldsymbol{u}C$:

$$\begin{gathered}\nabla(\boldsymbol{u}C) = \boldsymbol{c}\otimes(\alpha_0'\boldsymbol{c}C - \alpha_0^{-1}\boldsymbol{m}C),\\ (\boldsymbol{u}C)_t = N(t\alpha_0' - 1)\boldsymbol{c}C + (1 - Nt\alpha_0^{-1})\boldsymbol{m}C.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Решение уравнений (4.6) ищем в виде $\boldsymbol{u}C = \boldsymbol{F}(t,\alpha)$. Из (4.7) следует

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}_\alpha = \alpha_0'\boldsymbol{c}C - \alpha_0^{-1}\boldsymbol{m}C,\\ \boldsymbol{F} = \alpha_0\boldsymbol{c}C - \int\frac{d\alpha}{\alpha_0}\,\boldsymbol{m}C + \boldsymbol{G}(t),\\ \boldsymbol{G} = -Nt\boldsymbol{c}C + t\boldsymbol{m}C + \boldsymbol{l}.\end{gathered}$$

Решение уравнений (4.6) будем искать в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}C + \boldsymbol{u}_1$. В результате получаем

$$\begin{gathered}\nabla\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{u}_{1t} = (Nt - \alpha_0)(\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{b}) + \Big(\int\frac{d\alpha}{\alpha_0} - t\Big)\boldsymbol{m}C + \boldsymbol{c}(\alpha_0\alpha_0' - N) - \boldsymbol{l}.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Решение уравнений (4.8) находим в виде $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{U}(t,\alpha)$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}_\alpha = -\boldsymbol{c}C + \alpha_0'\boldsymbol{c} + \frac{1}{\alpha_0}\Big(\boldsymbol{m}C\int\frac{d\alpha}{\alpha_0} - \boldsymbol{m}\Big),\\ \boldsymbol{U} = \alpha_0\boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{c}C + \boldsymbol{m}C\int\frac{1}{\alpha_0}\Big(\int\frac{d\alpha}{\alpha_0}\Big)\,d\alpha - \boldsymbol{m}\int\frac{1}{\alpha_0} + \boldsymbol{G}(t),\\ \boldsymbol{G}' = t(N\boldsymbol{c}C - \boldsymbol{m}C) + \boldsymbol{m} - N\boldsymbol{c} - \boldsymbol{l}.\end{gathered}$$

Отсюда с точностью до галилеева переноса определяем вектор $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}C + \frac{L}{\rho}\,\boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{c}C - \frac{1}{L^2}\,\boldsymbol{m}C\int\rho\Big(\int\rho\,d\alpha\Big)\,d\alpha -\\ -\frac{1}{L}\,\boldsymbol{m}\int\rho\,d\alpha + \frac{1}{2}\,t^2(N\boldsymbol{c} - \boldsymbol{m})C + t(\boldsymbol{m} - N\boldsymbol{c} - \boldsymbol{l}), \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{l} = 0, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} = 0,\\ \alpha = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\,Nt^2, \qquad \int\frac{dp}{\rho} + \frac{L^2}{2\rho^2} = N\alpha + M.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь L, N, M — постоянные; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ — постоянные векторы; C — постоянная матрица с условиями из п. **2**.

Таким образом, простая волна на семимерной подалгебре всех переносов может быть двух типов: неизоэнтропическая (3.5) и изоэнтропическая (4.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
2. **Хабиров С. В.** Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.

Поступила в редакцию 11/XII 2013 г.