РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2019 № 6

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3:517.958

СТРУКТУРА ТЕНЗОРОВ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С ПАРАДОКСАЛЬНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

Б. Д. Аннин[1,2], Н. И. Остросаблин[1]

[1]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
E-mails: annin@hydro.nsc.ru, abd@hydro.nsc.ru,
просп. Академика Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, 630090, г. Новосибирск, Россия

Исследована структура тензоров модулей упругости и коэффициентов податливости специального линейно-упругого трансверсально-изотропного материала с парадоксальным поведением. Найдены собственные модули и состояния для тензоров упругости этого материала. Определены экстремальные значения модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона. Получены характеристики ближайшего изотропного тензора модулей упругости.

Трансверсальная изотропия, модули упругости, собственные модули и состояния, экстремальные значения модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона, ближайшие тензоры, слоистые горные породы

DOI: 10.15372/FTPRPI20190601

Упругое поведение ряда горных пород можно описать моделью трансверсально-изотропной среды [1]. Общий подход к исследованию тензоров упругости анизотропных материалов дан в [2 – 8]. В геомеханике важную роль играет гидростатическое давление, встречающееся на достаточной глубине в горных породах. На примере специальной трансверсально-изотропной среды показано, что гидростатическое давление может приводить к расширению горной породы в направлении оси симметрии.

В [9] приведен следующий тензор модулей упругости неоднородного анизотропного тела:

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(x_i x_j \delta_{kl} + x_k x_l \delta_{ij}) + \\ + \frac{9}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} x_i x_j x_k x_l, \quad x_i x_i \neq 0. \tag{1}$$

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № III.23.3.1) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00511 А).

Здесь x_i, $i=1, 2, 3$ — декартовы прямоугольные координаты; δ_{ij} — символы Кронекера, единичная матрица; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Выражение (1) похоже на линейное инвариантное разложение [10, 11], но в (1) не выделены два девиатора и нонор. В [9] авторы полагают

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_i x_i = \frac{1}{4} \tag{2}$$

и отмечают, что материал с такими модулями (1) обладает парадоксальными свойствами.

Запишем (1) при значениях (2):

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + 12\left(x_i x_j \delta_{kl} + x_k x_l \delta_{ij}\right) + 9 \cdot 16 x_i x_j x_k x_l. \tag{3}$$

Переходя в (3) к матричным обозначениям [10, 11] и учитывая (2), получим симметричную матрицу шестого порядка модулей упругости

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 17 & & & & & \\ 4 & 2 & & \text{sym} & & \\ 4 & 1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Обозначение sym соответствует элементам матрицы, симметричным относительно ее диагонали. Постоянные A_{ij} можно считать безразмерными, если в обобщенном законе Гука

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i, j = \overline{1,6}, \tag{5}$$

связывающем напряжения σ_i и деформации ε_j, напряжения σ_i и A_{ij} отнесены к некоторому характерному (эталонному) напряжению. В (5) величины a_{ij} — коэффициенты податливости, элементы обратной матрицы $a = A^{-1}$.

При ортогональных преобразованиях координат

$$x_i = \alpha_{ij}\tilde{x}_j, \quad \tilde{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \quad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \tag{6}$$

модули упругости A_{ijkl} преобразуются по формулам

$$A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\tilde{A}_{pqrs}, \quad \tilde{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}A_{ijkl}. \tag{7}$$

С учетом (6) имеем $x_i x_i = \alpha_{ij}\tilde{x}_j \alpha_{ik}\tilde{x}_k = \delta_{jk}\tilde{x}_j\tilde{x}_k = \tilde{x}_j\tilde{x}_j$.

Подставим в (7) выражения (1):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{pqrs} &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\left[\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{3}{\tilde{x}_m\tilde{x}_m}(x_i x_j \delta_{kl} + x_k x_l \delta_{ij}) + \frac{9}{(\tilde{x}_m\tilde{x}_m)^2} x_i x_j x_k x_l\right] = \\ &= \delta_{pq}\delta_{rs} + \frac{1}{2}(\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr}) + \frac{3}{\tilde{x}_m\tilde{x}_m}(\tilde{x}_p\tilde{x}_q\delta_{rs} + \tilde{x}_r\tilde{x}_s\delta_{pq}) + \frac{9}{(\tilde{x}_m\tilde{x}_m)^2}\tilde{x}_p\tilde{x}_q\tilde{x}_r\tilde{x}_s, \end{aligned} \tag{8}$$

т. е. вид тензора $\tilde{A}_{pqrs}$ (8) совпадает с видом тензора A_{ijkl} (1).

Если обозначить

$$n_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x_k}}, \quad n_i n_i = 1,$$

то тензор (1) запишется следующим образом:

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 3(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) + 9 n_i n_j n_k n_l. \tag{9}$$

В (9), очевидно, n_j — произвольный единичный вектор. Но (9) — это частный случай записи тензора модулей упругости трансверсально-изотропного материала, причем в [9] приняты значения (2), т. е. $n_i = (1, 0, 0)$ и ось вращения x_1.

Полная запись для A_{ijkl} имеет вид [10, 11]:

$$A_{ijkl} = c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}c_2(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}) + c_3(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) +$$
$$+ \frac{1}{2}c_4(n_i n_k \delta_{lj} + n_l n_j \delta_{ik} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il}) + c_5 n_i n_j n_k n_l, \tag{10}$$

где c_i, $i = \overline{1, 5}$ — постоянные.

Сравнивая (9) и (10), получим

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 9. \tag{11}$$

При $n_i = (0, 0, 1)$ имеем соотношения [10]:

$$c_1 = A_{21}, \quad c_2 = A_{11} - A_{21}, \quad c_3 = A_{31} - A_{21},$$
$$c_4 = A_{44} - (A_{11} - A_{21}), \quad c_5 = A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44}). \tag{12}$$

Вид соотношений (9), (10) не меняется при ортогональных преобразованиях (6) координат.

Из (11), (12) получаем $A_{21} = 1$, $A_{11} - A_{21} = 1$, $A_{31} - A_{21} = 3$, $A_{44} - (A_{11} - A_{21}) = 0$, $A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44}) = 9$, далее находим $A_{11} = 2$, $A_{21} = 1$, $A_{31} = 4$, $A_{33} = 17$, $A_{44} = 1$, т. е. матрица A_{ij} (4) принимает канонический вид (ось симметрии x_3):

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & \text{sym} & & \\ 4 & 4 & 17 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

полученный перестановкой соответствующих элементов матрицы (4).

Для матрицы (13) собственные модули λ_i, $i = \overline{1, 6}$, найденные по формулам из [10], равны

$$\lambda_1 = 19, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1, \tag{14}$$

а шестимерную ортогональную матрицу $T = [t_{ip}]$ собственных состояний [2, 3, 10] можно взять в виде

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/(3\sqrt{2}) & -2/3 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/(3\sqrt{2}) & -2/3 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 4/(3\sqrt{2}) & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Каждый столбец в (15) соответствует симметричному тензору второго ранга. Собственные модули (14) положительны, т. е. матрица (13) положительно определенная и отвечает некоторому реальному трансверсально-изотропному материалу. Но, как следует из [4, 12], симметричные матрицы $A_{ij} = A_{ji}$ модулей упругости в общем случае не обязательно должны быть положительно определенными.

Матрица (13) имеет два различных собственных модуля (14) λ_1 и λ_2, причем второй модуль λ_2 пятикратный и по классификации [5, 6] соответствует материалу типа {1, 5}, при этом

$$A_{ij} = (\lambda_1 - \lambda_2)t_{i1}t_{j1} + \lambda_2\delta_{ij} = 18t_{i1}t_{j1} + \delta_{ij}. \tag{16}$$

К такому же типу {1, 5} относится и традиционный изотропный материал [2, 6]. Вектор t_{i1} можно найти из (13), (16), откуда последовательно получаем $2 = 18t_{11}^2 + 1$, $t_{11} = 1/(3\sqrt{2})$, $1 = 18t_{21}t_{11}$, $t_{21} = 1/(3\sqrt{2})$, $4 = 18t_{31}t_{11}$, $t_{31} = 4/(3\sqrt{2})$, $t_{41} = 0$, $t_{51} = 0$, $t_{61} = 0$, т. е. собственный вектор (15). Остальные собственные состояния (векторы), соответствующие пятикратному собственному модулю λ_2 (14), ортогональны к t_{i1}: $t_{i1}t_{ip} = 1/(3\sqrt{2})(t_{1p} + t_{2p} + 4t_{3p}) = 0$, $p = \overline{2, 6}$.

Запишем обратную матрицу a_{ij} для (13), (16):

$$a_{ij} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)t_{i1}t_{j1} + \frac{1}{\lambda_2}\delta_{ij} = -\frac{18}{19}t_{i1}t_{j1} + \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 18/19 & & & \text{sym} & & \\ -1/19 & 18/19 & & & & \\ -4/19 & -4/19 & 3/19 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

С учетом (17) находим объемный модуль $1/K = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2(a_{32} + a_{31} + a_{21}) = 21/19$, модули Юнга $1/E_1 = 1/E_2 = a_{11} = 18/19$, $1/E_3 = a_{33} = 3/19$, коэффициенты Пуассона

$$\nu_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{18}, \quad \nu_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{9}, \quad \nu_{32} = \nu_{31},$$
$$\nu_{12} = \nu_{21}, \quad \nu_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{33}} = \frac{4}{3}, \quad \nu_{23} = \nu_{13}. \tag{18}$$

Собственные значения матрицы (17) являются обратными к собственным значениям (модулям) λ_i (14):

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{19}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \frac{1}{\lambda_2} = 1,$$

а собственные векторы (состояния) совпадают со столбцами матрицы (15).

В случае постоянного гидростатического нагружения напряжения равны $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} \to \sigma_j = \sigma\delta_j$. Тогда из (5), (17) получаем деформации:

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma\delta_j = (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})\sigma,$$
$$\varepsilon_1 = (a_{11} + a_{12} + a_{13})\sigma = \frac{13}{19}\sigma, \quad \varepsilon_2 = (a_{21} + a_{22} + a_{23})\sigma = \frac{13}{19}\sigma, \tag{19}$$
$$\varepsilon_3 = (a_{31} + a_{32} + a_{33})\sigma = -\frac{5}{19}\sigma, \quad \varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon_5 = 0, \quad \varepsilon_6 = 0.$$

При одноосных нагружениях с учетом (5), (17) получаем деформации $\sigma_j = (\sigma_1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_1 = 18/19 \cdot \sigma_1$, $\varepsilon_2 = -1/19 \cdot \sigma_1$, $\varepsilon_3 = -4/19 \cdot \sigma_1$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_5 = 0$, $\varepsilon_6 = 0$; $\sigma_j = (0, \sigma_2, 0, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_1 = -1/19 \cdot \sigma_2$, $\varepsilon_2 = 18/19 \cdot \sigma_2$, $\varepsilon_3 = -4/19 \cdot \sigma_2$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_5 = 0$, $\varepsilon_6 = 0$; $\sigma_j = (0, 0, \sigma_3, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_1 = -4/19 \cdot \sigma_3$, $\varepsilon_2 = -4/19 \cdot \sigma_3$, $\varepsilon_3 = 3/19 \cdot \sigma_3$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_5 = 0$, $\varepsilon_6 = 0$.

Парадоксальность материала в том, что в (19) в $\varepsilon_3 = -5/19 \cdot \sigma$ коэффициент со знаком минус, т. е. если $\sigma > 0$, то $\varepsilon_3 < 0$, и если $\sigma < 0$, то $\varepsilon_3 > 0$. В случае одноосных растяжений никакой парадоксальности нет, коэффициенты Пуассона (18) положительны, причем $\nu_{13} > 1$. Отрицательные коэффициенты Пуассона в случае трансверсально-изотропных материалов (гексагональных кристаллов) рассматривались, например, в [7]. Наличие отрицательного коэффициента в (19) не подтверждает утверждение из [13], что частичные объемные модули $1/K_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ всегда положительны.

Найдем постоянные Ламе ближайшего изотропного материала [10, 11] для матрицы модулей упругости (13). По формулам из [10] с учетом (13) имеем $\lambda = (A_{11} + 5A_{21} + 8A_{31} + A_{33} - 2A_{44})/15 = 18/5$, $2\mu = (7A_{11} - 5A_{21} - 4A_{31} + 2A_{33} + 6A_{44})/15 = 11/5$, при этом матрица модулей упругости ближайшего по евклидовой норме изотропного материала будет следующая:

$$A_{ij}^{(is)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 29 & & & & & \\ 18 & 29 & & \text{sym} & & \\ 18 & 18 & 29 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 11 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Собственные значения (модули) матрицы (20) равны

$$\lambda_1 = 3\lambda + 2\mu = 13, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu = \frac{11}{5}, \qquad (21)$$

а собственные векторы (состояния) можно взять в виде [2]:

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Матрица (20), имеющая два различных собственных модуля (21), причем второй из них пятикратный, соответствует материалу класса $\{1, 5\}$ [5, 6]:

$$A_{ij}^{(is)} = (\lambda_1 - \lambda_2)t_{i1}t_{j1} + \lambda_2\delta_{ij} = \frac{1}{5}(54t_{i1}t_{j1} + 11\delta_{ij}), \qquad (23)$$

где t_{i1} — первый столбец в матрице (22), единичный шаровой тензор. Обратная матрица для (20), (23) имеет вид

$$a_{ij}^{(is)} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) t_{i1} t_{j1} + \frac{1}{\lambda_2}\delta_{ij} = \frac{1}{11}\left(-\frac{54}{13} t_{i1} t_{j1} + 5\delta_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 47/13 & & & & & \\ -18/13 & 47/13 & & \text{sym} & & \\ -18/13 & -18/13 & 47/13 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

С учетом (24) находим объемный модуль $1/K = 3(a_{11} + 2a_{21}) = 3/13$, а частичные объемные модули $1/K_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = a_{11} + 2a_{21} = 1/13$ оказываются одинаковыми и больше нуля, как и должно быть. Если исходная матрица A_{ij} (13) положительно определенная, то и матрица $A_{ij}^{(is)}$ (20) — положительно определенная. Коэффициент Пуассона для случая матрицы (24) равен $\nu = -a_{21} / a_{11} = 18/47$. Таким образом, матрицы (20), (24) ближайшего для (13) по евклидовой норме изотропного материала соответствуют матрицам модулей упругости и коэффициентов податливости традиционного изотропного материала класса {1, 5} [5, 6].

По формулам вида (7) преобразуются и компоненты a_{ijkl} тензора коэффициентов податливости [14]:

$$\hat{a}_{pqrs} = n_{ijpq} a_{ijkl} n_{klrs} = \frac{1}{2}(n_{ip} n_{jq} + n_{iq} n_{jp}) a_{ijkl} \frac{1}{2}(n_{kr} n_{ls} + n_{ks} n_{lr}), \quad n_{ip} n_{iq} = \delta_{pq}. \quad (25)$$

В сокращенных матричных обозначениях [2, 10, 11, 14] формула (25) запишется как

$$\hat{a}_{pq} = \tilde{n}_{ip} a_{ij} \tilde{n}_{jq}, \quad (26)$$

где $\tilde{n}_{ip}$, ортогональная шестимерная матрица, соответствует тензору $n_{ijpq} = (n_{ip} n_{jq} + n_{iq} n_{jp})/2$ и выражается через компоненты ортогональной трехмерной матрицы n_{ip} [2]. В случае трансверсально-изотропного материала с осью симметрии x_3 и с учетом (17) из (26) получаем:

$$\hat{a}_{pq} = a_{11}\tilde{n}_{1p}\tilde{n}_{1q} + a_{21}(\tilde{n}_{2p}\tilde{n}_{1q} + \tilde{n}_{1p}\tilde{n}_{2q}) + a_{31}(\tilde{n}_{3p}\tilde{n}_{1q} + \tilde{n}_{1p}\tilde{n}_{3q}) + a_{11}\tilde{n}_{2p}\tilde{n}_{2q} +$$
$$+ a_{31}(\tilde{n}_{3p}\tilde{n}_{2q} + \tilde{n}_{2p}\tilde{n}_{3q}) + a_{33}\tilde{n}_{3p}\tilde{n}_{3q} + a_{44}(\tilde{n}_{4p}\tilde{n}_{4q} + \tilde{n}_{5p}\tilde{n}_{5q}) + (a_{11} - a_{21})\tilde{n}_{6p}\tilde{n}_{6q} =$$
$$= \left(-\frac{18}{19} t_{i1} t_{j1} + \delta_{ij}\right)\tilde{n}_{ip}\tilde{n}_{jq} = -\frac{18}{19} t_{i1}\tilde{n}_{ip} t_{j1}\tilde{n}_{jq} + \delta_{pq} = -\frac{18}{19}\hat{t}_{p1}\hat{t}_{q1} + \delta_{pq}. \quad (27)$$

Из (27) следует, что необходимо найти компоненты вектора t_{i1} (15) в новых координатах

$$\hat{t}_{p1} = t_{i1}\tilde{n}_{ip} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{1p} + \tilde{n}_{2p} + 4\tilde{n}_{3p}):$$

$$\hat{t}_{11} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{11} + \tilde{n}_{21} + 4\tilde{n}_{31}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(n_{11}^2 + n_{21}^2 + 4n_{31}^2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 3n_{31}^2),$$
$$\hat{t}_{21} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{12} + \tilde{n}_{22} + 4\tilde{n}_{32}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(n_{12}^2 + n_{22}^2 + 4n_{32}^2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 3n_{32}^2),$$
$$\hat{t}_{31} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{13} + \tilde{n}_{23} + 4\tilde{n}_{33}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(n_{13}^2 + n_{23}^2 + 4n_{33}^2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 3n_{33}^2), \quad (28)$$

$$\hat{t}_{41}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{14}+\tilde{n}_{24}+4\tilde{n}_{34})=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}n_{12}n_{13}+\sqrt{2}n_{22}n_{23}+4\sqrt{2}n_{32}n_{33})=n_{32}n_{33},$$
$$\hat{t}_{51}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{15}+\tilde{n}_{25}+4\tilde{n}_{35})=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}n_{11}n_{13}+\sqrt{2}n_{21}n_{23}+4\sqrt{2}n_{31}n_{33})=n_{31}n_{33},$$
$$\hat{t}_{61}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\tilde{n}_{16}+\tilde{n}_{26}+4\tilde{n}_{36})=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}n_{11}n_{12}+\sqrt{2}n_{21}n_{22}+4\sqrt{2}n_{31}n_{32})=n_{31}n_{32},$$

где n_{ip} — элементы трехмерной ортогональной матрицы, $n_{ip}n_{iq}=\delta_{pq}$.

Далее с учетом (28) из (27) находим компоненты $\hat{a}_{pq}$:

$$\hat{a}_{11}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{11}^{2}+1=-\frac{1}{19}(1+3n_{31}^{2})^{2}+1,$$
$$\hat{a}_{21}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{21}\hat{t}_{11}=-\frac{1}{19}(1+3n_{32}^{2})(1+3n_{31}^{2}),\quad \hat{a}_{22}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{21}^{2}+1=-\frac{1}{19}(1+3n_{32}^{2})^{2}+1,$$
$$\hat{a}_{31}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{31}\hat{t}_{11}=-\frac{1}{19}(1+3n_{33}^{2})(1+3n_{31}^{2}),\quad \hat{a}_{32}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{31}\hat{t}_{21}=-\frac{1}{19}(1+3n_{33}^{2})(1+3n_{32}^{2}),$$
$$\hat{a}_{41}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{41}\hat{t}_{11}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{32}n_{33}(1+3n_{31}^{2}),\quad \hat{a}_{42}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{41}\hat{t}_{21}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{32}n_{33}(1+3n_{32}^{2}),$$
$$\hat{a}_{51}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{51}\hat{t}_{11}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{33}(1+3n_{31}^{2}),\quad \hat{a}_{52}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{51}\hat{t}_{21}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{33}(1+3n_{32}^{2}),$$
$$\hat{a}_{61}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}\hat{t}_{11}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{32}(1+3n_{31}^{2}),\quad \hat{a}_{62}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}\hat{t}_{21}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{32}(1+3n_{32}^{2}),$$
$$\hat{a}_{33}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{31}^{2}+1=-\frac{1}{19}(1+3n_{33}^{2})^{2}+1,\tag{29}$$
$$\hat{a}_{43}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{41}\hat{t}_{31}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{32}n_{33}(1+3n_{33}^{2}),\quad \hat{a}_{44}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{41}^{2}+1=-\frac{18}{19}(n_{32}n_{33})^{2}+1,$$
$$\hat{a}_{53}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{51}\hat{t}_{31}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{33}(1+3n_{33}^{2}),\quad \hat{a}_{54}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{51}\hat{t}_{41}=-\frac{18}{19}n_{31}n_{32}n_{33}^{2},$$
$$\hat{a}_{63}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}\hat{t}_{31}=-\frac{6}{19\sqrt{2}}n_{31}n_{32}(1+3n_{33}^{2}),\quad \hat{a}_{64}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}\hat{t}_{41}=-\frac{18}{19}n_{31}n_{32}^{2}n_{33},$$
$$\hat{a}_{55}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{51}^{2}+1=-\frac{18}{19}(n_{31}n_{33})^{2}+1,$$
$$\hat{a}_{65}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}\hat{t}_{51}=-\frac{18}{19}n_{31}^{2}n_{32}n_{33},\qquad \hat{a}_{66}=-\frac{18}{19}\hat{t}_{61}^{2}+1=-\frac{18}{19}(n_{31}n_{32})^{2}+1.$$

Из [14] следует, что экстремальные значения компоненты $\hat{a}_{11},\hat{a}_{22},\hat{a}_{33}$, принимают для тех направлений n_{ip}, для которых выполняются равенства

$$\hat{a}_{51}=0,\quad \hat{a}_{62}=0,\quad \hat{a}_{43}=0\tag{30}$$

или

$$\hat{a}_{61}=0,\quad \hat{a}_{42}=0,\quad \hat{a}_{53}=0.\tag{31}$$

Уравнения (30), (31) с учетом формул (29) сводятся к системе

$$n_{31}n_{32} = 0, \quad n_{32}n_{33} = 0, \quad n_{31}n_{33} = 0. \tag{32}$$

Система (32) допускает двенадцать вариантов решения, часть из которых совпадает между собой, и остаются три варианта:

$$\begin{aligned} &1)\ n_{31}^2 = 1, \quad n_{32} = 0, \quad n_{33} = 0, \\ &2)\ n_{31} = 0, \quad n_{32}^2 = 1, \quad n_{33} = 0, \\ &3)\ n_{31} = 0, \quad n_{32} = 0, \quad n_{33}^2 = 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Для решения (33), 1) из (29) получаем

$$\hat{a}_{pq} = \begin{bmatrix} 3/19 & & & & & \\ -4/19 & 18/19 & & \text{sym} & & \\ -4/19 & -1/19 & 18/19 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

для решения (33), 2) из (29) находим

$$\hat{a}_{pq} = \begin{bmatrix} 18/19 & & & & & \\ -4/19 & 3/19 & & \text{sym} & & \\ -1/19 & -4/19 & 18/19 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Для решения (33), 3) матрица $\hat{a}_{pq}$ совпадает с матрицей (17). Матрицы (17), (34), (35) получаются друг из друга при перестановке осей 1, 2, 3, т. е. других экстремальных значений $a_{11} = 1/E_1$, $a_{22} = 1/E_2$, $a_{33} = 1/E_3$ по сравнению с (17) не получилось.

Из результатов работы [14] следует, что экстремальные значения компоненты $\hat{a}_{32}$, $\hat{a}_{31}$, $\hat{a}_{21}$ принимают для тех направлений n_{ip}, для которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} &1)\ \hat{a}_{43} = \hat{a}_{42}, \quad \hat{a}_{52} = 0, \quad \hat{a}_{63} = 0, \\ &2)\ \hat{a}_{41} = 0, \quad \hat{a}_{53} = \hat{a}_{51}, \ \hat{a}_{63} = 0, \\ &3)\ \hat{a}_{41} = 0, \quad \hat{a}_{52} = 0, \quad \hat{a}_{62} = \hat{a}_{61}. \end{aligned} \tag{36}$$

Записывая (36) с учетом формул (29) и опуская ненулевые коэффициенты, получим три системы уравнений для n_{ip}:

$$\begin{aligned} &1)\ n_{32}n_{33}(1+3n_{33}^2) = n_{32}n_{33}(1+3n_{32}^2), \quad n_{31}n_{33}(1+3n_{32}^2) = 0, \quad n_{31}n_{32}(1+3n_{33}^2) = 0, \\ &2)\ n_{32}n_{33}(1+3n_{31}^2) = 0, \quad n_{31}n_{33}(1+3n_{33}^2) = n_{31}n_{33}(1+3n_{31}^2), \quad n_{31}n_{32}(1+3n_{33}^2) = 0, \\ &3)\ n_{32}n_{33}(1+3n_{31}^2) = 0, \quad n_{31}n_{33}(1+3n_{32}^2) = 0, \quad n_{31}n_{32}(1+3n_{32}^2) = n_{31}n_{32}(1+3n_{31}^2). \end{aligned} \tag{37}$$

Без учета множителей в скобках системы (37) совпадают с системой уравнений (32), решение которой есть формулы (33), а матрицы $\hat{a}_{pq}$ будут вида (17), (34), (35).

Еще одно решение системы (37), 1) следующее:

$$n_{31}=0,\quad n_{33}^2=n_{32}^2=1/2, \tag{38}$$

при этом из (29) находим

$$\hat{a}_{pq}=\begin{bmatrix} 18/19 & & & & & \\ -5/38 & 51/76 & & \text{sym} & & \\ -5/38 & -25/76 & 51/76 & & & \\ \mp 3/(19\sqrt{2}) & \mp 15/(38\sqrt{2}) & \mp 15/(38\sqrt{2}) & 29/38 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Аналогичные решения имеют и системы (37), 2) и (37), 3).

Однако экстремальные значения $\hat{a}_{pq}$ (29) можно находить непосредственно из выражений (29), а не по общей теории [14], решая уравнения вида (30), (31), (36). Например, $\hat{a}_{11}=-(1/19)(1+3n_{31}^2)^2+1$ будет иметь экстремальные значения при $n_{31}^2=0$ и $n_{31}^2=1$, т. е. $\hat{a}_{11}=18/19$ или $\hat{a}_{11}=3/19$. Эти значения уже получены в матрицах (17), (34), (35). Аналогичные максимальное и минимальное значения получаются для $\hat{a}_{22}$, $\hat{a}_{33}$ из (29). Также можно из (29) определить экстремальные значения $\hat{a}_{32}$, $\hat{a}_{31}$, $\hat{a}_{21}$, $\hat{a}_{44}$, $\hat{a}_{55}$, $\hat{a}_{66}$ и других компонент.

Компоненты $\hat{a}_{44}=1/(2G_{23})$, $\hat{a}_{55}=1/(2G_{13})$, $\hat{a}_{66}=1/(2G_{12})$, определяющие модули сдвига G_{23}, G_{13}, G_{12}, [2, 4], будут иметь экстремальные значения для тех направлений n_{ip}, для которых выполняются равенства [14]:

$$\begin{aligned} &\hat{a}_{43}=\hat{a}_{42},\quad \hat{a}_{54}=0,\quad \hat{a}_{64}=0,\\ &\hat{a}_{53}=\hat{a}_{51},\quad \hat{a}_{54}=0,\quad \hat{a}_{65}=0,\\ &\hat{a}_{62}=\hat{a}_{61},\quad \hat{a}_{64}=0,\quad \hat{a}_{65}=0. \end{aligned} \tag{40}$$

Записывая (40) с учетом формул (29) и опуская ненулевые коэффициенты, получим три системы уравнений для n_{ip}:

$$\begin{aligned} &1)\ n_{32}n_{33}(1+3n_{33}^2)=n_{32}n_{33}(1+3n_{32}^2),\quad n_{31}n_{32}n_{33}^2=0,\quad n_{31}n_{32}^2n_{33}=0,\\ &2)\ n_{31}n_{33}(1+3n_{33}^2)=n_{31}n_{33}(1+3n_{31}^2),\quad n_{31}n_{32}n_{33}^2=0,\quad n_{31}^2n_{32}n_{33}=0,\\ &3)\ n_{31}n_{32}(1+3n_{32}^2)=n_{31}n_{32}(1+3n_{31}^2),\quad n_{31}n_{32}^2n_{33}=0,\quad n_{31}^2n_{32}n_{33}=0. \end{aligned} \tag{41}$$

Системы (41) включают в себя систему (32), решение которой дается формулами (33), а матрицы $\hat{a}_{pq}$ будут вида (17), (34), (35). Система (41), 1) имеет еще одно решение (38), а системы (41), 2) и (41), 3) — аналогичные решения:

$$n_{32}=0,\quad n_{31}^2=n_{33}^2=1/2 \tag{42}$$

и

$$n_{31}^2=n_{32}^2=1/2,\quad n_{33}=0. \tag{43}$$

Для решения (38) компонента $\hat{a}_{44} = 1/(2G_{23})$ принимает минимальное значение $\hat{a}_{44} = 29/38$ (см. (39)), а максимальное значение $\hat{a}_{44} = 1$ (см. (17), (34), (35)). Для решений (42), (43) получаются такие же минимальные и максимальные значения $\hat{a}_{55} = 1/(2G_{13})$, $\hat{a}_{66} = 1/(2G_{12})$.

Таким образом, экстремальные значения $\hat{a}_{32}$, $\hat{a}_{31}$, $\hat{a}_{21}$ есть $-1/19$ или $-25/76$; экстремальные значения $\hat{a}_{11}$, $\hat{a}_{22}$, $\hat{a}_{33}$, есть $18/19$ или $3/19$, а для $\hat{a}_{44}$, $\hat{a}_{55}$, $\hat{a}_{66}$ экстремальные значения есть 1 или $29/38$. Из формул (29) видно, что традиционные коэффициенты Пуассона всегда положительны, так как $\hat{a}_{32} < 0$, $\hat{a}_{31} < 0$, $\hat{a}_{21} < 0$, и не могут быть отрицательными и обратиться в нуль.

Запишем еще уравнения движения в смещениях для трансверсально-изотропной упругой среды с матрицей модулей упругости (13) [10]:

$$\begin{gathered}[2\partial_{11} + (1/2)\partial_{22} + (1/2)\partial_{33} - \rho c^2\partial_{44}]u_1 + (3/2)\partial_{12}u_2 + (9/2)\partial_{13}u_3 + F_1 = 0, \\ (3/2)\partial_{21}u_1 + [(1/2)\partial_{11} + 2\partial_{22} + (1/2)\partial_{33} - \rho c^2\partial_{44}]u_2 + (9/2)\partial_{23}u_3 + F_2 = 0, \\ \partial_{13}u_1 + (9/2)\partial_{32}u_2 + [(1/2)(\partial_{11} + \partial_{22}) + 17\partial_{33} - \rho c^2\partial_{44}]u_3 + F_1 = 0.\end{gathered} \tag{44}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора смещения; $x_4 = ct$; t — время; c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости; ρ — постоянная плотность среды; $\partial_{kl} = \partial_k\partial_l$ — вторые производные по координатам x_k, x_l; F_i — компоненты вектора объемных сил. Постоянная c вводится для того, чтобы все коэффициенты в уравнениях, так же как и переменные x_i, $i = \overline{1, 4}$, имели одинаковую размерность. Диагонализация и общие представления решения системы вида (44) приведены в [10].

Обобщенный закон Гука (5) с использованием собственных модулей (14) и собственных состояний (15) можно записать в виде [2, 4]

$$T'\sigma = \Lambda T'\varepsilon. \tag{45}$$

Здесь штрих означает транспонирование матрицы, а $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ — диагональная матрица. Матричное равенство (45) состоит из шести независимых инвариантных равенств:

$$\begin{gathered} t_{i1}\sigma_i = \lambda_1 t_{j1}\varepsilon_j, \quad t_{i2}\sigma_i = \lambda_2 t_{j2}\varepsilon_j, \quad t_{i3}\sigma_i = \lambda_3 t_{j3}\varepsilon_j, \\ t_{i4}\sigma_i = \lambda_4 t_{j4}\varepsilon_j, \quad t_{i5}\sigma_i = \lambda_5 t_{j5}\varepsilon_j, \quad t_{i6}\sigma_i = \lambda_6 t_{j6}\varepsilon_j\ . \end{gathered} \tag{46}$$

С учетом (14), (15) равенства (46) принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{3\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2 + 4\sigma_3) = 19\frac{1}{3\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 4\varepsilon_3), \quad \frac{1}{3}(-2\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(-2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \sigma_4 = \varepsilon_4, \quad \sigma_5 = \varepsilon_5, \quad \sigma_6 = \varepsilon_6. \end{gathered}$$

Выражение для удельной энергии деформации записывается как [2, 4]

$$2\Phi = \sigma_i\varepsilon_i = \frac{1}{\lambda_1}(t_{i1}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_2}(t_{i2}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_3}(t_{i3}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_4}(t_{i4}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_5}(t_{i5}\sigma_i)^2 + \frac{1}{\lambda_6}(t_{i6}\sigma_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{19}\frac{1}{18}(\sigma_1+\sigma_2+4\sigma_3)^2 + \frac{1}{9}(-2\sigma_1-2\sigma_2+\sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2$$

или

$$2\Phi = \lambda_1(t_{j1}\varepsilon_j)^2 + \lambda_2(t_{j2}\varepsilon_j)^2 + \lambda_3(t_{j3}\varepsilon_j)^2 + \lambda_4(t_{j4}\varepsilon_j)^2 + \lambda_5(t_{j5}\varepsilon_j)^2 + \lambda_6(t_{j6}\varepsilon_j)^2 =$$

$$= 19\frac{1}{18}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+4\varepsilon_3)^2 + \frac{1}{9}(-2\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2.$$

Собственные модули и состояния, определенные для упругих сред [2, 4], могут быть обобщены на наследственную теорию упругости или материалы с памятью формы [8, 15].

ВЫВОДЫ

Установлена структура тензоров упругости трансверсально-изотропного материала с парадоксальным поведением. Трансверсально-изотропные среды могут моделировать поведение слоистых горных пород. При гидростатическом давлении упругое тело из рассмотренного материала расширяется в направлении оси симметрии. Определены собственные модули и состояния для тензоров упругости данного материала. Найдены экстремальные значения технических постоянных: модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона. Определены постоянные упругости ближайшего изотропного тензора упругости. Даны инвариантная запись соотношений связи напряжений и деформаций и выражение удельной энергии деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аннин Б. Д.** Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. — 2009. — Т. 12. — № 3. — С. 5 – 14.
2. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. — 2008. — Т. 49. — № 6. — С. 131 – 151.
3. **Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.** Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математическое моделирование. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 108 – 119.
4. **Остросаблин Н. И.** Классы симметрии тензоров анизотропии квазиупругих материалов и обобщение подхода Кельвина // ПМТФ. — 2017. — Т. 58. — № 3. — С. 108 – 129.
5. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. — 1985. — Вып. 71. — С. 82 – 96.
6. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1986. — № 4. — С. 127 – 135.
7. **Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.** Изменчивость упругих свойств гексагональных ауксетиков // ДАН. — 2011. — Т. 441. — № 4. — С. 468 – 471.
8. **Аннин Б. Д.** Об одном классе определяющих соотношений линейной анизотропной наследственной теории упругости // Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю. Н. Работнова: тр. конф. (Москва, 24 – 26 февр. 2014 г.). — М.: Изд-во ИМАШ РАН. — 2014. — С. 18 – 22.

9. **Nečas J. and Štipl M.** A paradox in the theory of linear elasticity, Applications of Mathematics, 1976, Vol. 21, No. 6. — P. 431 – 433.
10. **Остросаблин Н. И.** Диагонализация трехмерной системы уравнений в смещениях линейной теории упругости трансверсально-изотропных сред // ПМТФ. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 125 – 145.
11. **Остросаблин Н. И.** Трансверсально-изотропный тензор, ближайший по евклидовой норме к заданному анизотропному тензору модулей упругости // ПМТФ. — 2019. — Т. 60. — № 1. — С. 124 – 141.
12. **Трусдел К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
13. **Григолюк Э. И., Король Е. З.** Некоторые неравенства для коэффициентов Пуассона в линейной термоупругости // ДАН. — 1996. — Т. 346. — № 1. — С. 43 – 45.
14. **Остросаблин Н. И.** Условия экстремальности постоянных упругости и главные оси анизотропии // ПМТФ. — 2016. — Т. 57. — № 4. — С. 192 – 210.
15. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 11/XI 2019
После доработки 21/XI 2019
Принята к публикации 27/XI 2019