УПРУГИЕ КОНСТАНТЫ АКСИАЛЬНЫХ ТЕКСТУР В ПРИБЛИЖЕНИИ ФОЙГТА — РОЙСА — ХИЛЛА

К. С. Александров, И. П. Талашкевич

(Красноярск)

Для описания изменений в упругих свойствах поликристаллического материала в процессе его пластической деформации, отжига и т. д., приводящих к образованию текстуры, используются различные выражения. Так, для аксиальной текстуры материала, составленного из кубических кристаллитов, ранее были предложены две группы формул [1,2]

$$
\begin{aligned}
&C_{11}^T = C_{22}^T = \overline{C}_{11} + {}^3/_{20}\alpha C, && S_{11}^T = S_{22}^T = \overline{S}_{11} + {}^3/_{20}\,\alpha S\\
&C_{33}^T = \overline{C}_{11} + {}^2/_5\,\alpha C, && S_{33}^T = \overline{S}_{11} + {}^2/_5\,\alpha S\\
&C_{13}^T = C_{23}^T = \overline{C}_{12} - {}^1/_5\,\alpha C, && S_{13}^T = S_{23}^T = \overline{S}_{12} - {}^1/_5\,\alpha S\\
&C_{12}^T = \overline{C}_{12} + {}^1/_{20}\,\alpha C, && S_{12}^T = \overline{S}_{12} + {}^1/_{20}\,\alpha S\\
&C_{44}^T = C_{55}^T = \overline{C}_{44} - {}^1/_5\,\alpha C, && S_{44}^T = S_{55}^T = \overline{S}_{44} - {}^4/_5\,\alpha S\\
&2C_{66}^T = C_{11}^T - C_{12}^T, && S_{66}^T = 2(S_{11}^T - S_{12}^T)\\
&K_V = K_0 && K_R = K_0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь $\alpha = {}^1/_9\,a_4$ характеризует степень упорядочения ориентировок кристаллитов в текстуре, a_4 — амплитуда четвертого члена разложения функции распределения ориентировок по шаровым функциям [1,2]. Величины $\overline{C}_{ij}$ и $\overline{S}_{ij}$ средние упругие характеристики изотропного поликристалла, вычисленные соответственно в приближении Фойгта и Ройса из упругих констант монокристалла (C_{ij} и S_{ij})

$$
\begin{aligned}
&\overline{C}_{11} = C_{11} - {}^2/_5\,C,\ \overline{C}_{12} = C_{12} + {}^1/_5\,C,\ \overline{C}_{44} = C_{44} + {}^1/_5\,C\\
&\overline{S}_{11} = S_{11} - {}^2/_5\,S,\ \overline{S}_{12} = S_{12} + {}^1/_5\,S,\ \overline{S}_{44} = S_{44} + {}^4/_5\,S
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Наконец, величины C и S в (1) и (2) — параметры упругой анизотропии

$$C = C_{11} - C_{12} - 2C_{44},\ S = S_{11} - S_{12} - {}^1/_2\,S_{44}$$

Анализ способов вычисления выражений (1) показывает, что формулы для C_{ij}^T и S_{ij}^T учитывают изменение упругих свойств текстуры лишь приближенно и эквивалентны по существу вычислениям для квазиизотропного поликристалла в приближениях Фойгта и Ройса, соответственно. Это значит, что выражения (1) непригодны для описания свойств материалов из сильно анизотропных кристаллов, поскольку в этом случае $\overline{C}_{ij}$ и $\overline{S}_{ij}$ значительно отличаются от экспериментальных значений констант квазиизотропного материала. Кроме того, формулы (1) не могут быть использованы для вычисления свойств сильных текстур. Для этих случаев необходимо более высокое приближение, и формулы (1) дают необходимую основу для вычисления упругих констант текстур в приближении Фойгта — Ройса — Хилла [3].

В случае квазиизотропного поликристалла усреднения по Фойгту и Ройсу (2) дают соответственно верхнюю и нижнюю границы для истинных значений констант материала. В качестве дополнительного уточнения Хиллом [3] было предложено использовать среднее арифметическое или среднее геометрическое значение констант, вычисленных по Фойгту и Ройсу. Многочисленные эксперименты показали, что среднее арифметическое хорошо согласуется с опытными данными и мало отличается от теоретических значений констант поликристалла, полученных наиболее точными методами [4]. Задача настоящей работы заключается в том, чтобы, используя (1), вычислить в этом приближении упругие свойства аксиальной текстуры. Конечные выражения оказываются более простыми, если использовать для вычисления средние геометрические, полученные из (1).

В дальнейшем будем обозначать упругие константы текстуры в искомом приближении через C_{ij}^* и S_{ij}^*, а упругие константы квазиизотропного поликристалла в том же приближении через C_{ij}^0 и S_{ij}^0.

Проще всего поддаются вычислению сдвиговые модули упругости $C_{44}^* = (S_{44}^*)^{-1}$ и $C_{66}^* = (S_{66}^*)^{-1}$ текстуры. Действительно,

$$
\begin{gathered}
C_{44}^* = \left(\frac{C_{44}}{S_{44}}\right)^{1/2} = C_{44}^0\left(1 - \frac{\alpha}{5}\,f(a)\right) \quad C_{44}^0 = \left(\frac{\overline{C}_{44}}{\overline{S}_{44}}\right)^{1/2}\\
a = \frac{C_{11} - C_{12}}{2C_{44}} = \frac{S_{44}}{2(S_{11} - S_{12})},\quad f(a) = \frac{25(a^2 - 1)}{(3 + 2a)(2 + 3a)}
\end{gathered}
\qquad (3)
$$

Аналогично для C_{66}^* имеем

$$C_{66}^* = (C_{66} \,/\, S_{66})^{1/2} = C_{44}^0 \,[1 + {}^1/_{20}\,\alpha f\,(a)] \tag{4}$$

Вычисление остальных констант текстуры более сложно: величины C_{11} и S_{11}, C_{12} и S_{12} и т. д. не обратны одна другой, и прямое вычисление средних геометрических невозможно. Выражения (1) определяют компоненты матриц $\| C_{ij} \|$ и $\| S_{ij} \|$ соответственно в приближениях Фойгта и Ройса. Рассмотрим компоненты взаимно обратных матриц

$$\| C_{ij}^* \| \; \| S_{ij}^* \| = I \quad (I \text{ — единичная матрица})$$

Обычными методами [5] можно найти порознь собственные значения λ_k матрицы $\| C_{ij} \|$ и Λ_k — матрицы $\| S_{ij} \|$.

Для среды гексагональной симметрии только четыре из шести собственных значений оказываются различными. Собственные значения λ_k^* матрицы $\| C_{ij}^* \|$ можно вычислить по правилу среднего геометрического, т. е.

$$\lambda_k^* = (\lambda_k \,/\, \Lambda_k)^{1/2} = (\Lambda_k^*)^{-1} \quad (k = 1, \ldots, 4) \tag{5}$$

где Λ_k^* — собственное значение матрицы $\| S_{ij}^* \|$.

Таким образом, имеем четыре соотношения, в которые входят пять искомых упругих констант текстуры C_{ij}^* или S_{ij}^*. Два из этих соотношений уже использованы в (3) и (4). Недостающее для обратного перехода от λ_k^* к C_{ij}^* соотношение может быть получено из условия

$$K_V^* = K_V = K_R = K_R^* = K_0 \tag{6}$$

которое выражает независимость модуля объемного сжатия текстуры из кубических кристаллов как от способа усреднения, так и от степени упорядоченности ориентировок кристаллов. Используя равенства (5) и (6), можно найти упругие постоянные аксиальной текстуры

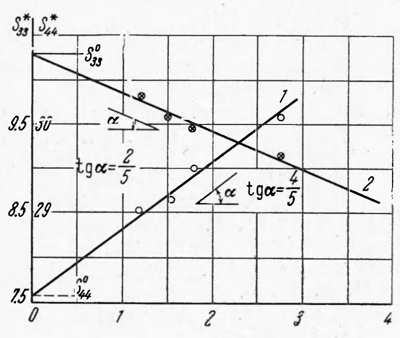
$$\begin{aligned}
S_{11}^* &= S_{11}^0 - {}^3/_{40}\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{11}^* &= C_{11}^0 + {}^3/_{40}\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)\\
S_{33}^* &= S_{11}^0 - {}^1/_5\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{12}^* &= C_{11}^0 + {}^1/_{40}\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)\\
S_{13}^* &= S_{12}^0 + {}^1/_{10}\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{33}^* &= C_{11}^0 + {}^1/_5\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)\\
S_{12}^* &= S_{12}^0 - {}^1/_{40}\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{13}^* &= C_{12}^0 - {}^1/_{10}\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)\\
S_{44}^* &= S_{44}^0 - {}^2/_5\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{44}^* &= C_{44}^0 - {}^1/_{10}\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)\\
S_{66}^* &= S_{44}^0 - {}^1/_{10}\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0), & C_{66}^* &= C_{44}^0 + {}^1/_{40}\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)
\end{aligned} \tag{7}$$

Из этих выражений находим параметры анизотропии текстуры

$$\begin{aligned}
S^* &= S_{33}^* - S_{13}^* - {}^1/_2\,S_{44}^* = -{}^1/_2\,\alpha f\,(a)\,(S_{11}^0 - S_{12}^0)\\
C^* &= C_{33}^* - C_{13}^* - 2C_{44}^* = {}^1/_2\,\alpha f\,(a)\,(C_{11}^0 - C_{12}^0)
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставив в выражения (7) вместо α его значения из (8), приходим к формулам, аналогичным полученным авторами ранее при использовании усреднения по Ройсу [2]

$$\begin{aligned}
S_{11}^* &= S_{11}^0 + {}^3/_{20}\,S^*, & C_{11}^* &= C_{11}^0 + {}^3/_{20}\,C^*\\
S_{33}^* &= S_{11}^0 + {}^2/_5\,S^*, & C_{33}^* &= C_{11}^0 + {}^2/_5\,C^*\\
S_{13}^* &= S_{12}^0 - {}^1/_5\,S^* & C_{13}^* &= C_{12}^0 - {}^1/_5\,C^*\\
S_{12}^* &= S_{12}^0 + {}^1/_{20}\,S^*, & C_{12}^* &= C_{12}^0 + {}^1/_{20}\,C^*\\
S_{44}^0 &= S_{44}^0 - {}^4/_5\,S^*, & C_{44}^* &= C_{44}^0 - {}^1/_5\,C^*\\
S_{66}^* &= S_{44}^0 + {}^1/_5\,S^*, & C_{66}^* &= C_{44}^0 + {}^1/_{20}\,C^*
\end{aligned} \tag{9}$$



Прямые *1* и *2* дают соответственно изменение S_{44}^* и S_{33}^* от параметра анизотропии текстуры S^T. Для сравнения приведен теоретический наклон прямых из соотношений (9)

Отметим, что выражения (9) по форме тождественны (1), но в них величины S_{ij}^0 и C_{ij}^0, S_{ij}^* и C_{ij}^* — компоненты взаимно обратных матриц квазиизотропного агрегата и текстуры. Поскольку выражения (1) и (9), определяющие свойства текстуры в разных приближениях, по форме одинаковы, можно полагать, что и в более высоких приближениях эти выражения не изменят своего вида. Это значит, что из измерений на текстурованном материале величин S_{33}^*, S_{13}^*, S_{44}^* можно найти точные значения величин S_{11}^0 и S_{44}^0 для квазиизотропного агрегата. Измерить величины S_{33}^*, S_{13}^* и S_{44}^* можно при помощи резонансного динамического метода [2, 8].

Для проверки полученных выражений (9) был проведен эксперимент на текстурованных цилиндрических образцах латуни марки Л-62. Технология изготовления их была следующей: заготовка из латуни отжигалась при 600 °С в течение 1 *часа*, а затем подвергалась пластической деформации волочением. В результате такой обработки были получены аксиальные текстуры различной интенсивности. Результаты измерения изображены графически на фигуре. Здесь же приведен теоретический наклон прямых, полученных из уравнений (9). Как видно из фигуры, наклон теоретических прямых совпадает с наклоном экспериментальных, а точки их пересечения с осью ординат дают значения модуля сдвига $(1 / S_{44}^0)$ и модуля Юнга $(1 / S_{33}^0)$ квазиизотропного агрегата.

Таким образом, для определения упругих постоянных квазиизотропного материала на текстурированных образцах оказывается достаточным провести измерения на одном образце. В частности, например, модули Юнга и сдвига квазиизотропного материала могут быть определены из выражений

$$E^0 = \frac{E^*}{1 - {}^2/_5\,(\sigma_\alpha - \sigma_i)}, \quad G^0 = G^* \left(1 + \frac{2}{5}\,\frac{\sigma_\alpha - \sigma_i}{1 + \sigma_i}\right)^{-1} \tag{10}$$

$$\left(\sigma_\alpha = \frac{S_{13}^*}{S_{33}^*}, \quad \sigma_i = \frac{E^*}{2G^*} - 1\right)$$

Здесь E^* и G^*—модули Юнга и сдвига текстурированного образца, а σ_α и σ_i — дисперсионный и изотропный коэффициенты Пуассона соответственно.

Наконец, выражения (7) позволяют определить анизотропию монокристалла и рассчитать его упругие постоянные. Это особенно важно для материалов, которые в настоящее время еще не получены в виде монокристаллов. Для определения этих величин необходимо найти, помимо средних значений упругих постоянных квазиизотропного материала и упругих постоянных текстуры, текстурный множитель α. Это можно сделать, используя связь между α и так называемым текстурным коэффициентом C_4, введенным Бунге [9]

$$C_4 = -4\pi\, n_4 \alpha$$

где $n_4 = -0.64636$ — фактор нормировки шаровой функции для кубической симметрии. C_4 можно также рассчитать из экспериментальной кривой интегральной интенсивности рентгеновского рассеивания, снятой с исследуемого текстурированного образца [10,11].

Поступила 14 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Pursey H., Cox. The Correction to Elasticity Measurement of slightly anisotropic Materials. Philos. Mag., 1954, vol. 45, p. 245.
2. Талашкевич И. П., Костин Н. Ф., Александров К. С. Упругие свойства волокнистых текстур кубических металлов. ФММ, 1964, т. 17, № 2.
3. Hill R. The Elastic Behaviour of a Crystaline Aggregate. Proc. Phys. Soc., A., 1952, vol. 65, No. 5.
4. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des vielkristals aus den Konstanten des Einkristalls. Z. Phys., 1958, B. 151, H. 4.
5. Александров К. С., Айзенберг Л. А. Способ вычисления физических констант поликристаллических материалов. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5.
6. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. Изд-во «Наука», 1965.
7. Талашкевич И. П., Александров К. С. Определение коэффициента Пуассона одноосных текстур. ФММ, 1964, т. 18, № 1.
8. Kneer G. Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur. Phys. Stat. Solidi., 1965, vol. 9, No. 3.
9. Bunge H. J. Zur Berechnung einiger physikalischer Eigenschaften von Materialen mit Fasertextur. Mber. Dt. Akad. Wiss., 1960, B. 2, H. 8.
10. Bunge H. J. Zur Darstellung von Fasertexturen. Mber. Dt. Akad. Wiss., 1959, B. 1, H. 2.
11. Bunge H. J. Zur Darstellung von Fasertexturen. Mber. Dt. Akad. Wiss., 1959, Bd. 1, H.7-10.