ПМТФ, № 5, 1966

О МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОЛЕНОИДЕ С ТОКОМ

И. И. Иванчик, Д. Г. Санников

(Москва)

Получены и проанализированы выражения для механических напряжений и деформаций в многослойном цилиндрическом соленоиде с постоянным током. Результаты справедливы для обычного и сверхпроводящего соленоида, длина которого велика по сравнению с его поперечными размерами.

1. Механические напряжения, возникающие в соленоиде с током, могут привести к его разрушению. Поэтому при конструировании соленоидов, рассчитанных на высокую напряженность магнитного поля, необходимо знать распределение и величину максимальных напряжений в обмотке. Для этого нужно решить систему уравнений равновесия

$$\partial\sigma_{ik} / \partial x_k + f_i = 0 \tag{1.1}$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь σ_{ik} — тензор механических напряжений, а f_i — объемная плотность пондермоторных сил, действующих на вещество в магнитном поле.

В различных работах, посвященных такой задаче (см., например [1]), для упрощения либо пренебрегается отдельными компонентами тензора напряжений, либо не учитываются условия непрерывности вектора смещения (так называемые условия неразрывности Сен-Венана), которые необходимо добавить к системе уравнений (1.1) для того, чтобы ее решения имели физический смысл.

Корректное решение системы уравнений (1.1) в общем случае представляет серьезные математические трудности. В настоящей работе будет получено решение для многослойного цилиндрического соленоида, длина которого велика по сравнению с его поперечными размерами.

Предполагается, что соленоид можно рассматривать как сплошную среду. Для проволочного соленоида это допустимо при условии, что нет сдвиговых деформаций и в поперечных к виткам обмотки направлениях действуют только напряжения сжатия [1]. Среду можно считать однородной, если провод тонкий (по сравнению с любыми размерами соленоида), а обмотка — достаточно плотная. В области малых деформаций (область справедливости закона Гука) модули упругости проволоки одинаковы в продольном и поперечном направлениях. Это позволяет считать среду изотропной. Наконец, так как толщина провода мала по сравнению с линейными размерами соленоида, то оказывается [2], что она мала и по сравнению с расстояниями, на которых заметно меняются магнитное поле и пондермоторная сила. Следовательно, распределение тока по сечению провода несущественно. Это, в частности, позволит применить полученные результаты к случаю сверхпроводящих соленоидов.

---

[1] Либо при условии, что витки обмотки соленоида склеены.

[2] Вклад в магнитное поле от соседних витков пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от остальных витков, магнитное поле которых приблизительно однородно.

2. Определим компоненты пондермоторной силы f_i. Пренебрегаем магнитными свойствами среды, т. е. полагаем везде магнитную проницаемость $\mu = 1$. Тогда объемная плотность сил, действующих на среду в магнитном поле, определяется по формуле [2]

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{R}}{R^3}\,dV, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{J}n^2 \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, направленный из dV в точку наблюдения, n — число витков на единицу длины. Для простоты принимаем ток J во всех витках одинаковым.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) получим для компонент силы $\mathbf{f}$ следующие выражения:

$$\begin{gathered} f_r(r, z) = \frac{j^2}{c^2}\int\limits_{-l-z}^{l-z} d\zeta \int\limits_b^B r'\,dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi\,\frac{r' - r\cos\psi}{(\zeta^2+\rho^2)^{3/2}} \\ f_z(r, z) = \frac{j^2}{c^2}\int\limits_{-l-z}^{l-z} d\zeta \int\limits_b^B r'\,dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi\,\frac{\zeta\cos\psi}{(\zeta^2+\rho^2)^{3/2}} \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\zeta = z' - z, \quad \psi = \varphi' - \varphi, \quad \rho^2 = r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\psi$$

Здесь $2l$ — длина соленоида, B — внешний радиус, b — внутренний радиус. В силу цилиндрической симметрии задачи компоненты f_r и f_z не зависят от координаты φ, а $f_\varphi = 0$.

Анализ выражений (2.2) показывает, что компонента силы f_z, сжимающая соленоид по оси z, равна нулю в среднем сечении соленоида ($z = 0$), затем монотонно возрастает с увеличением z сначала медленно, а затем, вблизи к торцам соленоида, очень быстро, достигая максимального значения на торцах ($z = \pm l$). Компонента силы f_r, направленная всюду по радиусу, максимальна в среднем сечении соленоида и с возрастанием z монотонно уменьшается сначала медленно, а затем с приближением к торцам быстро. Так как $f_z \sim H_r$ и $f_r \sim H_z$, то при $j = \mathrm{const}$, точно такой же характер зависимости от z имеют соответствующие компоненты магнитного поля в цилиндрическом соленоиде.

Для длинного соленоида ($B \ll l$) в подынтегральных выражениях (2.2) можно провести разложения в ряд по параметрам $\rho / (l \pm z)$, считая $\rho \ll l \pm z$, и выполнить интегрирования. В результате получим

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{j^2}{c^2}\int\limits_b^B r'\,dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi\,\frac{1}{\rho^2}(r' - r\cos\psi)\left[\frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2+\rho^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2+\rho^2}}\right] \approx \\ &\approx 4\pi\frac{j^2}{c^2}(B - r) - \frac{\pi}{3}\frac{j^2}{c^2}(B^3 - b^3)\left[(l-z)^{-2} + (l+z)^{-2}\right] + \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} f_z &= -\frac{j^2}{c^2}\int\limits_b^B r'\,dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi\cos\psi\left[\frac{1}{\sqrt{(l-z)^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+z)^2+\rho^2}}\right] \approx \\ &\approx -\frac{\pi}{3}\frac{j^2}{c^2}(B^3 - b^3)\,r\left[(l-z)^{-3} - (l+z)^{-3}\right] +)\ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Эти выражения справедливы, таким образом, вдали от торцов при $|z| \ll l - B$. В нулевом приближении, т. е. в пределе для бесконечно длинного соленоида, имеем

$$f_r = 4\pi\frac{j^2}{c^2}(B - r), \qquad f_z = 0 \tag{2.5}$$

3. Сформулируем теперь задачу об упругом равновесии соленоида под действием пондермоторных сил. Используя закон Гука для изотропного тела [3]

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{jj}\delta_{ik}\right) \qquad (3.1)$$

(E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона) и соотношение, связывающее [1] тензор деформации u_{ik} с вектором смещения u_i

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (3.2)$$

можно представить уравнение равновесия (1.1) в виде [3]

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{2(1-\sigma)}{E}\mathbf{f} \qquad (3.3)$$

В силу цилиндрической симметрии задачи, $\mathbf{u}$ не зависит от координаты φ и $u_\varphi \equiv 0$. Поэтому уравнения (3.3) удобно записать в цилиндрической системе координат

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u_r + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} u_z = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)E} f_r$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right] u_z + \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z} u_r = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)E} f_z \qquad (3.4)$$

На торцах и боковых поверхностях соленоида должны выполняться следующие граничные условия.

На свободных торцах соленоида

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } z = \pm l \qquad (3.5)$$

На свободных боковых поверхностях соленоида

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } r = b \quad \text{или} \quad r = B \qquad (3.6)$$

На зажатых боковых поверхностях

$$u_r = 0 \quad \text{при } r = b \quad \text{или} \quad r = B \qquad (3.7)$$

4. Для того чтобы найти решение, справедливое вдали от торцов, длинного соленоида, воспользуемся принципом Сен-Венана [2], согласно которому распределение деформаций и напряжений вдали от места приложения сил не зависит от распределения сил, а только от полной силы и полного момента сил [4]. Поэтому поступим следующим образом. Выделим в соленоиде возможно большую область, в которой справедливы выражения для объемных сил (2.3) и (2.4). Подставим эти выражения в правые части уравнений (3.4), а силы, действующие вне выделенной области, заменим на суммарные силы, приложенные к границам области. Решение сформулированной таким образом задачи будет, согласно принципу Сен-Венана, близко к решению исходной задачи вдали от границ области, т. е. в среднем сечении соленоида.

---

[1] При этом условие неразрывности Сен-Венана оказывается автоматически выполненным.

[2] Не следует путать принцип Сен-Венана с условием неразрывности Сен-Венана.

Определим суммарную силу, действующую по оси z на участке соленоида от сечения z до l. Для этого проинтегрируем выражение (2.2) для f_z по z в пределах от z до l, используя, как и при интегрировании (2.3) и (2.4), разложение подынтегрального выражения в ряд по параметрам $\rho / (l \pm z)$

$$F_z(r, z) = \int_z^l f_z\,dz = -\frac{j^2}{c^2}\int_b^B r'\,dr' \int_0^{2\pi} d\psi \cos\psi \left(\operatorname{arc\,sh}\frac{l-z}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,sh}\frac{l+z}{\rho} - \operatorname{arc\,sh}\frac{2l}{\rho}\right) \approx -\frac{\pi}{3}\frac{j^2}{c^2}\left(-2r^2 + 3Br - \frac{b^3}{r}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}(B^3 - b^3)\,r\,[(l-z)^{-2} + (l+z)^{-2} - (2l)^{-2}] + \ldots \tag{4.1}$$

Интегрируя теперь F_z по сечению соленоида, получим суммарную силу Φ_z

$$\Phi_z(z) = \int_b^B r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, F_z = -\frac{\pi^2}{3}\frac{j^2}{c^2}(B-b)^2(B^2 + 2Bb + 3b^2) +$$

$$+ \frac{\pi^2}{9}\frac{j^2}{c^2}(B^3 - b^3)^2\,[(l-z)^{-2} + (l+z)^{-2} - (2l)^{-2}] + \ldots \tag{4.2}$$

Суммарная сила от f_r равна нулю.

Граничное условие (3.5) для σ_{zz} нужно заменить на условие

$$\int_b^B r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sigma_{zz}\big|_{z=z^*} = \Phi_z(z^*) \tag{4.3}$$

где $z = z^*$ — сечение, ограничивающее выделенную область. При этом должны выполняться неравенства $B \ll z^* \ll l - B$, что возможно для длинного соленоида ($B \ll l$). Первое неравенство необходимо для того, чтобы существовала область, в которой можно было применять принцип Сен-Венана, а второе — для справедливости выражений (2.3), (2.4) и (4.2).

5. Найдем решение в нулевом приближении, т. е. справедливое для бесконечно длинного соленоида. В правые части уравнений (3.4) нужно подставить выражения (2.5), а в граничное условие (4.3) — первый член ряда (4.2). Тогда решение, обладающее достаточной общностью для того, чтобы удовлетворить всем граничным условиям (4.3), (3.5), (3.6) или (3.7), будет иметь вид

$$u_r = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^3}{(1-\sigma)E}\left\{(1+\sigma)(1-2\sigma)(3t^3 - 8t^2) + \right.$$

$$\left. + [(1-\sigma)\alpha - \sigma\gamma]\,t + (1+\sigma)\,\beta\,\frac{x^2}{t}\right\} \tag{5.1}$$

$$u_z = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2 z}{(1-\sigma)E}(-2\sigma\alpha + \gamma)$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения безразмерных величин

$$t = r / B, \qquad x = b / B \tag{5.2}$$

Первые два слагаемых u_r в (5.1) — частное решение неоднородного уравнения. Определяемые из граничных условий постоянные α, β, γ выбраны так, чтобы компоненты σ_{ik}, представляющие наибольший интерес, были записаны в простом виде.

Для компонент тензора деформаций u_{ik} из (5.1) получим в цилиндрических координатах выражения

$$u_{rr} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)E}\Big\{(1+\sigma)(1-2\sigma)(9t^2-16t) + (1-\sigma)\alpha - \sigma\gamma - (1+\sigma)\beta\frac{x^2}{t^2}\Big\} \qquad (5.3)$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)E}\Big\{(1+\sigma)(1-2\sigma)(3t^2-8t) + (1-\sigma)\alpha - \sigma\gamma + (1+\sigma)\beta\frac{x^2}{t^2}\Big\}$$

$$u_{zz} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)E}(-2\sigma\alpha + \gamma), \qquad u_{r\varphi} = u_{rz} = u_{\varphi z} = 0$$

Используя формулы (3.1) и (5.3), находим компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)}\Big\{(9-6\sigma)t^2 - (16-8\sigma)t + \alpha - \beta\frac{x^2}{t^2}\Big\}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)}\Big\{(3+6\sigma)t^2 - (8+8\sigma)t + \alpha + \beta\frac{x^2}{t^2}\Big\} \qquad (5.4)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\pi}{6}\frac{j^2}{c^2}\frac{B^2}{(1-\sigma)}\{12\sigma t^2 - 24\sigma t + \gamma\}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0$$

Из граничного условия (4.3) определяем

$$\gamma = (1+x)^{-1}\,[(-2+12\sigma)(1+x+x^2) + (6-12\sigma)x^3] \qquad (5.5)$$

Из граничных условий (3.6), (3.7) находим следующие значения коэффициентов α и β.

Для случая свободной внешней и свободной внутренней поверхностей соленоида

$$\alpha = 7-2\sigma + \beta x^2, \qquad \beta = (1+x)^{-1}\,[(7-2\sigma) - (9-6\sigma)x] \qquad (5.6)$$

Для случая свободной внешней и зажатой внутренней поверхностей соленоида

$$\alpha = 7-2\sigma + \beta x^2$$

$$\beta = (1+x)^{-1}\,[(1+\sigma) + (1-\sigma)x^2]^{-1}\,[(-7+7\sigma+10\sigma^2) + (1-\sigma-6\sigma^2)x + (1-\sigma)(5-2\sigma)x^2 - (1-\sigma)(3-6\sigma)x^3] \qquad (5.7)$$

Для случая зажатой внешней и свободной внутренней поверхностей соленоида

$$\alpha = (16-8\sigma)x - (9-6\sigma)x^2 + \beta$$

$$\beta = (1+x)^{-1}\,[(1-\sigma) + (1+\sigma)x^2]^{-1}\,[(1-\sigma)(5-2\sigma) - (1-\sigma)(11-6\sigma)x - (7-7\sigma-10\sigma^2)x^2 + (9-9\sigma-6\sigma^2)x^3] \qquad (5.8)$$

Для случая зажатой внешней и зажатой внутренней поверхностей соленоида

$$\alpha = (1+x)^{-1}\,[(5-2\sigma)(1+x+x^2) - (3-6\sigma)x^3]$$

$$\beta = (1+x)^{-1}(1-2\sigma)(-5+3x) \qquad (5.9)$$

6. Для того чтобы найти решение в следующем (первом) приближении и тем самым определить степень точности полученного решения (5.1)—(5.9), нужно в уравнения (3.4) подставить выражения (2.3), (2.4), а в граничное условие (4.3) — выражение (4.2). Тогда к решению в нулевом приближении для u_i (5.1) добавятся члены первого приближения

$$-\frac{\pi}{9}\frac{j^2}{c^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)E}B^3(1-x^3)t^2\left[\frac{B^3}{(l-z)^2}+\frac{B^2}{(l+z)^2}\right] \quad \text{для} \quad u_r \qquad (6.1)$$

$$-\frac{\pi}{9}\frac{j^2}{c^2}\frac{(1+\sigma)}{E}B^3(1-x^3)t^3\left[\frac{B^3}{(l-z)^3}-\frac{B^3}{(l+z)^3}\right] \quad \text{для} \quad u_z \qquad (6.2)$$

Соответствующие члены добавятся и к решениям (5.3), (5.4). Но теперь граничным условиям на боковых поверхностях соленоида (3.6), (3.7) можно удовлетворить только при $z = 0$, иными словами, найденное решение (6.1), (6.2) будет верным лишь в среднем сечении соленоида. Однако область при $z = 0$ наиболее существенна, так как здесь напряжения принимают экстремальные значения. Не определяя коэффициентов α, β, γ, отметим, что поправки к нулевому решению имеют порядок B^2 / l^2 и будут уменьшать абсолютные значения напряжений. Таким образом, полученные решения (5.1)—(5.9) являются верхним пределом для соленоидов конечной длины.

7. Полученные результаты применимы и для сверхпроводящих соленоидов. Действительно, материалы, из которых изготовляются такие соленоиды, являются сверхпроводниками второго рода. Для них характерно наличие двух критических полей H_{c_1} и H_{c_2}. Поля $H < H_{c_1}$ в сверхпроводник не проникают. Поля $H > H_{c_2}$ разрушают сверхпроводимость. Магнитная проницаемость μ сверхпроводника зависит, таким образом, от величины магнитного поля: $\mu = 0$ для $H < H_{c_1}$; при увеличении поля выше значения H_{c_1} магнитная проницаемость резко возрастает, быстро приближаясь к единице и затем $\mu \approx 1$ вплоть до $H = H_{c_2}$ [5].

В длинном соленоиде поле H_z меняется приблизительно линейно по радиусу (см. (2.3)), обращаясь в нуль на внешнем радиусе. Следовательно, μ в некоторой области, близкой к внешней границе соленоида, будет отлично от единицы. Формулы (2.1) здесь не применимы, и проведенный расчет, строго говоря, неверен. Однако обычно $H_{c_1} \ll H_{c_2}$. Поэтому рассматриваемая область узка, ее линейные размеры по радиусу $\Delta \sim BH_{c_1} / H_{c_2} \ll B$. Кроме того, объемная сила f (2.3) в этой области также мала $f_r \sim 4\pi\Delta j^2 / c^2$. Следовательно, учет обращения μ в нуль и наличия градиента μ в рассматриваемой области не скажется существенно на окончательных результатах, и для распределения напряжений в сверхпроводящем длинном соленоиде можно пользоваться формулами (5.1)—(5.9).

8. При исследовании полученных решений основной интерес представляют экстремальные значения компонент тензора напряжений и их локализация. Сравнение значений σ_{ik} в различных соленоидах целесообразно проводить при одной и той же величине напряженности магнитного поля H_0 на оси соленоида. Как следует из формул (2.1) и (2.5)

$$H_0 = 4\pi\frac{j}{c}B(1-x) \qquad (8.1)$$

Коэффициент перед фигурными скобками в выражениях (5.4) для σ_{ik} можно теперь представить в виде $H_0^2\,[96\pi(1-\sigma)(1-x)^2]^{-1}$. Значение коэффициента Пуассона σ определяется материалом, из которого изготовлена обмотка соленоида. Для большинства материалов σ близко к $^1/_3$; поэтому в дальнейшем значение $\sigma = {}^1/_3$ будет часто использоваться. При заданных H_0 и σ выражения (5.4) зависят от параметра x (5.2) и выбора граничных условий.

Анализ выражений (5.4)—(5.8) показывает, что условие зажатой внешней поверхности соленоида (случаи (5.8), (5.9)) более выгодно [1], чем условие свободной внешней поверхности (случаи (5.6), (5.7)). Действительно, компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ имеет наибольшие положительные значения [2] при всех t и x в случае (5.6), а компонента σ_{rr} — аналогично в случае (5.7). Эти компоненты [3] принимают свои максимальные значения на

[1] Более выгодными считаются условия, при которых максимальные напряжения минимальны.

[2] Растягивающие напряжения положительны, сжимающие — отрицательны.

[3] Значения σ_{ik} всюду в дальнейшем приводятся в единицах $H_0^2 / 96\pi$.

внутренней поверхности соленоида, при $t = x$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\,(1-\sigma)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,[(7-2\sigma) + (2-4\sigma)x + (3-6\sigma)x^2] \tag{8.2}$$
$$\sigma_{rr} = 2\,[(1+\sigma) + (1-\sigma)x^2]^{-1}\,[7+6\sigma + 2x + 3x^2] \tag{8.3}$$

Значения этих максимумов минимальны для $x = 0$ и равны $\sigma_{\varphi\varphi} = (14-4\sigma)\,/\,(1-\sigma)$ или 19 (для $\sigma = 1/3$) и $\sigma_{rr} = (14+12\sigma)\,/\,(1+\sigma)$ или 13.5 ($\sigma = 1/3$). С ростом x значения (8.2), (8.3) возрастают и в пределе $\Delta \ll 1$ для $x = 1 - \Delta$ имеем $\sigma_{\varphi\varphi} = 12\,/\,\Delta$, $\sigma_{rr} = 12+6\sigma$ или 14 ($\sigma = 1/3$).

Проанализируем подробнее более выгодные случаи (5.8) и (5.9). Компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ в случае (5.8) с ростом t монотонно уменьшается, принимая, таким образом, экстремальные значения на внутренней и внешней поверхностях соленоида. На внутренней поверхности при $t = x$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\,(1-\sigma)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,[(1-\sigma) + (1+\sigma)x^2]^{-1}\,[(1-\sigma)\,(5-2\sigma) - (1-\sigma)\,(2+4\sigma)x - (8-2\sigma-16\sigma^2)x^2 + (1+\sigma)\,(2-4\sigma)x^3 + (1+\sigma)\,(3-6\sigma)x^4] \tag{8.4}$$

Для $x = 0$ это значение максимально и равно $(10-4\,\sigma)\,/\,(1-\sigma)$ или 13 ($\sigma = 1/3$). С ростом x выражение (8.4) уменьшается, переходя через нуль при некотором $x = x_0$. Для $\sigma = 1/3$ имеем $x_0 \approx 0.59$.

На внешней поверхности соленоида при $t = 1$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -4\sigma\,(1-\sigma)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,[(1-\sigma) + (1+\sigma)x^2]^{-1}\,[(1-\sigma) + (2-2\sigma)x + (6-5\sigma)x^2 + 2\sigma x^3 - 3x^4] \tag{8.5}$$

Для $x = 0$ это значение равно $-4\sigma\,/\,(1-\sigma)$ или -2 ($\sigma = 1/3$) и с ростом x становится все более отрицательным. В пределе $\Delta \ll 1$ для $x = 1 - \Delta$ имеем $\sigma_{\varphi\varphi} = -6\sigma\,/\,\Delta$.

В случае (5.9) компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ имеет положительный максимум, локализованный вблизи к внутренней поверхности соленоида. Для $x = 0$ его значение $(5-2\sigma)\,/\,(1-\sigma)$ или 6.5 ($\sigma = 1/3$). С ростом x максимум понижается и исчезает при некотором $x = x_0$. Для $\sigma = 1/3$ имеем $x_0 \approx 0.28$. На внутренней поверхности соленоида при $t = x$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 4\sigma\,(1-\sigma)^{-1}(1-x^2)^{-1}\,(2-2x-3x^2) \tag{8.6}$$

Для $x = 0$ это значение равно $8\sigma\,/\,(1-\sigma)$ или 4 ($\sigma = 1/3$). С ростом x выражение (8.6) уменьшается, проходя через нуль при $x = x_0 = 1/3\,(\sqrt{7}-1) \approx 0.55$.

На внешней поверхности соленоида при $t = 1$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -4\sigma\,(1-\sigma)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,(1+2x) \tag{8.7}$$

Для $x = 0$ это значение равно $-4\sigma\,/\,(1-\sigma)$ или -2 ($\sigma = 1/3$). С ростом x выражение (8.7) уменьшается и в пределе $\Delta \ll 1$ для $x = 1 - \Delta$ имеем $\sigma_{\varphi\varphi} = -6\sigma\,/\,(1-\sigma)\,\Delta$ или $-3\,/\,\Delta$ ($\sigma = 1/3$).

Компонента σ_{rr} в случае (5.8) обращается в нуль при $t = x$ и имеет внутри области $x < t < 1$ два экстремума. Первый является положительным максимумом. При $x = 0$ он локализован вблизи к внутренней поверхности и равен $(5-2\sigma)\,/\,(1-\sigma)$ или 6.5 ($\sigma = 1/3$); с ростом x максимум сдвигается в сторону бо́льших t и уменьшается, исчезая при некотором $x = x_0$. Для $\sigma = 1/3$ $x_0 \approx 0.26$. Второй экстремум является отрицательным минимумом. Он локализован вблизи к внешней поверхности соленоида, и значения его практически не отличаются от значений σ_{rr} на самой поверхности при $t = 1$

$$\sigma_{rr} = -\,[(1-\sigma) + (1+\sigma)x^2]^{-1}\,[2+4x + (18+12\sigma)x^2] \tag{8.8}$$

С изменением x от 0 до 1 это значение изменяется для $\sigma = 1/3$ от -3 до -14.

В случае (5.9) компонента σ_{rr} ведет себя подобно $\sigma_{\varphi\varphi}$ для случая (5.8). На внутренней поверхности соленоида, при $t = x$

$$\sigma_{rr} = 2\,(1-\sigma)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,[5-6\sigma-2x-3x^2] \tag{8.9}$$

Для $x = 0$ это значение максимально и равно $(10-12\sigma)\,/\,(1-\sigma)$ или 9 ($\sigma = 1/3$). С ростом x выражение (8.9) уменьшается, переходя через нуль при $x = x_0 = 1/3\,(\sqrt{16-18\sigma} - 1)$ или $x_0 \approx 0.72$ ($\sigma = 1/3$).

На внешней поверхности соленоида при $t = 1$

$$\sigma_{rr} = -2\,(1 - \sigma)^{-1}(1 - x^2)^{-1}\,[1 + 2x - (3 - 6\sigma)\,x^2] \tag{8.10}$$

Для $x = 0$ это значение равно $-2\,/\,(1 - \sigma)$ или -3 ($\sigma = {}^1/_3$). В пределе $\Delta \ll 1$ для $x = 1 - \Delta$ имеем $\sigma_{rr} = -6\sigma\,/\,(1 - \sigma)\,\Delta$ или $-3\,/\,\Delta$ ($\sigma = {}^1/_3$).

Компонента σ_{zz} не зависит от выбора граничных условий (см. (5.5)). Экстремальные значения σ_{zz} принимает на внутренней поверхности соленоида при $t = x$

$$\sigma_{zz} = 2\,(1 - \sigma)^{-1}(1 - x^2)^{-1}[-1 + 6\sigma - 2x - 3x^2] \tag{8.11}$$

и на внешней поверхности при $t = 1$

$$\sigma_{zz} = -2\,(1 - \sigma)^{-1}(1 - x^2)^{-1}\,[1 + 2x - (3 - 6\sigma)\,x^2] \tag{8.12}$$

Значение (8.11) максимально при $x = 0$ и равно $(-2 + 12\sigma)\,/\,(1 + \sigma)$ или 3 ($\sigma = {}^1/_3$). С ростом x оно уменьшается, проходя через нуль при $x = x_0 = {}^1/_3\,(\sqrt{-2 + 18\sigma} - 1)$ или $x_0 = {}^1/_3$ ($\sigma = {}^1/_3$). Значение (8.12) при $x = 0$ равно $-2\,/\,(1 - \sigma)$ или -3 ($\sigma = {}^1/_3$). С ростом x оно уменьшается и в пределе для $x = 1 - \Delta$ ($\Delta \ll 1$) равно $-6\,/\,\Delta$.

Таким образом, для соленоида с зажатой внешней поверхностью максимальные растягивающие напряжения локализованы вблизи к внутренней поверхности соленоида. С ростом x они уменьшаются и исчезают при некотором $x = x_0$. Максимальные сжимающие напряжения локализованы вблизи к внешней поверхности и с ростом x увеличиваются по абсолютной величине. Случаи свободной (5.8) и зажатой (5.9) внутренней поверхности соленоида оказываются конкурирующими, и преимущество их друг перед другом определяется выбором оптимальных значений x. А этот выбор, в свою очередь, зависит от различия в действии сжимающих и растягивающих напряжений.

Необходимо еще отметить, что компоненты σ_{rr} и σ_{zz} вблизи к внутренней поверхности соленоида в определенном интервале значений x от 0 до некоторого x_0 являются положительными, т. е. растягивающими. Для проволочного соленоида витки обмотки будут здесь отделяться друг от друга (если они не склеены). Соленоид нельзя тогда рассматривать как сплошную среду, и полученные решения, строго говоря, не применимы. Постановка задачи должна быть изменена.

Поступила 9 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. Изд-во «Наука» 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во «Наука», 1966.
5. Линтон Э. Сверхпроводимость. Изд. «Мир», 1964.