

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. СЕНАШОВ
(Красноярск)

1. Рассмотрим уравнения, описывающие медленные нестационарные пластические течения [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}, \quad s_{ij}s_{ij} + 2k_s^2 = 0, \\ 2s_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора скорости; p — гидростатическое давление; s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; λ — неотрицательная функция; k_s — предел текучести при чистом сдвиге; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; ниже индекс после запятой означает дифференцирование по пространственной переменной.

Необходимо отметить, что система уравнений (1.1) широко применяется в инженерных расчетах.

2. Известно, что система уравнений (1.1) после исключения из нее λ и s_{ij} допускает группу непрерывных преобразований [2], порождаемую операторами:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ Z_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ T_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad S = \varphi(t) \frac{\partial}{\partial p}, \\ L_i = g_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i} - x_i g'_i(t) \frac{\partial}{\partial p} \quad (i = 1, 2, 3), \\ M = t \frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad N = t \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Еще четыре оператора Z_2, Z_3 и T_2, T_3 получаются из Z_1, T_1 круговой перестановкой индексов.

Указанная группа бесконечномерная, поскольку $g_i(t), \varphi(t)$ — произвольные функции из класса C^∞ .

3. Рассмотрим инвариантное решение системы (1.1) на подгруппе $N = t \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$. Это решение ищем в виде

$$(3.1) \quad u_1 = atx_1, \quad u_2 = atx_2, \quad p = cx_3 + p(x_1, x_2), \\ u_3 = -2atx_3 + 2\sqrt{6}atf(x_1, x_2).$$

Тогда компоненты тензора напряжений равны

$$(3.2) \quad s_{11} = s_{22} = \kappa \lambda^*, \quad s_{12} = 0, \quad s_{33} = -2\kappa \lambda^*, \\ s_{13} = \kappa \lambda^* f_{,1}, \quad s_{23} = \kappa \lambda^* f_{,2}, \quad \kappa = \operatorname{sgn} a,$$

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{|a|t} = \frac{k_s}{|a|t\sqrt{6}} (1 + (\nabla f)^2)^{-1/2}, \quad \nabla f = f_{,1} + f_{,2}.$$

При этом функция f определяется из уравнения

$$(3.3) \quad 2\sqrt{6}af = k_s \kappa \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla f)^2}} + c,$$

где c — произвольная постоянная, а p можно найти из соотношений

$$(3.4) \quad ax_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{11}}{\partial x_1}, \quad ax_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2}.$$

Из (3.4) с учетом (3.1) получаем

$$(3.5) \quad p = -\kappa\lambda^* + \frac{1}{2}a(x_1^2 + x_2^2) + cx_3.$$

Следовательно, для определения поля скоростей (3.1) необходимо решить (3.3) с соответствующими граничными условиями.

4. Запишем уравнение (3.3) в виде

$$(4.1) \quad \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla f)^2}} - bf = c_0,$$

где $b = (2\sqrt{6}|a|)/k_s$; $c = c_0\kappa k_s$. Используем решение (3.1) для описания пластических течений в цилиндрическом канале, образующие которого параллельны оси x_3 , а направляющая задана уравнением $F(x_1, x_2) = 0$. При этом предполагается, что на стенках канала задано равномерно распределенное касательное напряжение

$$\tau_n = k_s \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2,$$

ему соответствует граничное условие

$$(4.2) \quad \frac{\partial f}{\partial n} (1 + (\nabla f)^2)^{-1/2} = k_s \cos \alpha,$$

где n — внутренняя нормаль к кривой $F(x_1, x_2) = 0$. Задача (4.1), (4.2) возникает при изучении поверхностей равновесия в гидромеханике невесомости [3]. Если при этом l — характерный размер канала, то величина $b^2 l$ называется числом Бонда и определяет соотношение между гравитационными и капиллярными силами.

5. В пространственной задаче трудно в общем случае ожидать, что удастся решить задачу (4.1), (4.2) в аналитическом виде. Ее удастся решить аналитическими приближенными и численными методами [3]. В частности, при $b \gg 1$ решение задачи (4.1), (4.2) можно искать в виде асимптотического разложения

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \phi_i(x_1, x_2) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(h/\varepsilon, \varphi), \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

где φ — параметр, отсчитываемый вдоль направляющей $F = 0$, а h — расстояние от точки до направляющей, отсчитываемое по нормали к $F = 0$. При этом функции ϕ_i получаются из условия формального удовлетворения уравнению (4.1), а функции v_i типа погранслоя компенсируют невязку в граничном условии (4.2).

Замечание. Согласно [3], для решения задачи (4.1), (4.2) можно использовать и вариационные методы, в частности метод локальных вариаций.

6. В осесимметричном случае, если рассмотреть течение в круглом цилиндре радиуса r_0 , можно воспользоваться методом, описанным в п. 5 при $b \gg 1$. Вторым случаем, который легко поддается исследованию, $\forall f \ll 1$. Если это условие выполнено, то (4.1) после линеаризации превращается в

$$(6.1) \quad rf'' + f' - brf = rc.$$

Решение уравнения (6.1), ограниченное при $r = 0$, имеет вид

$$f = c_0 I_0(r\sqrt{b}) - c/b,$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента. Произвольная постоянная c_0 определяется из граничного условия (4.2), которое после линеаризации запишется следующим образом:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=r_0} = k_s \cos \alpha.$$

Постоянная c определится из условия сохранения объема. В рассмотренном случае поле скоростей

$$(6.2) \quad u_r = atr, \quad u_\theta = 0, \\ u_z = -2atz + 2\sqrt{6}at(c_0 I_0(r\sqrt{b}) - c/b).$$

Компоненты тензора скоростей деформации и тензора напряжений равны

$$e_r = at, \quad e_\theta = at, \quad e_z = -2at,$$

$$2e_{rz} = \sqrt{6}atf'_r, \quad e_{r\theta} = e_{\theta z} = 0,$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p + \frac{k_s}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_z = -p - \frac{2k_s}{\sqrt{3}},$$

$$\tau_{rz} = \sqrt{2}k_s f'_r, \quad p = (1/2)ar^2 + cx_3 + c(t), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0.$$

Заметим, что условие $Vf \ll 1$ реализуется, в частности, при $|\alpha - \pi/2| \ll 1$, т. е. при малом трении на стенках канала.

Замечание. Решение (6.2) можно использовать и для описания пластического течения в сжимаемой цилиндрической втулке.

7. Наиболее просто поддается анализу плоская задача. В этом случае (4.1) решается квадратурой и построенное решение можно использовать для описания пластического течения между жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением. В плоском случае (4.1) запишем в виде

$$(7.1) \quad \frac{d}{dx_1} \left(\frac{f_{,1}}{\sqrt{1+f_{,1}^2}} \right) - bf = c_0.$$

Сделаем в уравнении (7.1) замену по формуле $f_{,1} = z(f)$, тогда

$$(7.2) \quad \frac{z'z}{(1+z^2)^{3/2}} = bf + c_0.$$

Из (7.2) имеем

$$(7.3) \quad f_{,1} = \sqrt{(b/2f^2 + c_0f + c_1)^{-2} - 1}.$$

Интегрируя последнее при $\left| c_1 - \frac{c_0}{2b} \right| < 1$, получим

$$x_1(f) - x_1(0) = \frac{1}{\sqrt{b}} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k) \right] + \left(\frac{\sqrt{2}c_0}{4b} - \frac{A^2}{\sqrt{2}} \right) [K(k) - F(\varphi, k)],$$

где $A^2 = 1 + c_1 - \frac{c_0^2}{2b}$; $B^2 = 1 - c_1 + \frac{c_0^2}{2b}$; $\varphi = \arccos fB^{-1}$; $B = \sqrt{2}k$.

Если же $c_1 - c_0^2/2b < -1$, то из уравнения (7.3) получим

$$x_1(f) - x_1(B) = \frac{B\sqrt{2}}{b} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k) \right) - \frac{\sqrt{2}}{Bb} [K(k) - F(\varphi, k)],$$

где $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{B^2 - f^2}{B^2 - A^2}}$; $k = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{B}$; $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода; $K(k) = F(\pi/2, k)$.

Следовательно, в плоском случае поле скоростей

$$u_1 = atx_1, \quad u_2 = atx_2, \quad u_3 = -2atx_3 + 2\sqrt{6}atf(x_1),$$

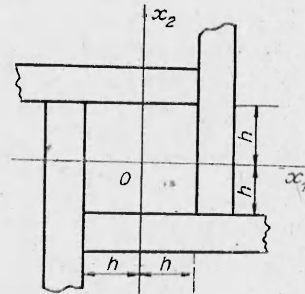
а компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = (1/2)a(x_1^2 + x_2^2) + cx_3,$$

$$\sigma_{33} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k_s}{a} \left| \frac{b}{2} f^2 + c_0 f + c_1 \right| + \sigma_{11},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0,$$

$$\sigma_{13} = \frac{k_s}{a\sqrt{6}} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2} f^2 + c_0 f + c_1 \right)^2}.$$



Это решение можно использовать для описания пластического течения бруса в форме параллелепипеда с поперечными размерами $2h$ на $2h$ и длиной $2l$, сжатого четырьмя жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением. Поперечное сечение канала, образованного плитами, изображено на рисунке. Плиты, параллельные плоскости Ox_1x_3 , сближаются вдоль оси x_2 (гладкие), плиты, параллельные плоскости Ox_2x_3 , сближаются вдоль оси x_1 (шероховатые). Если положить $a = \omega/h$, то ω — ускорение, с которым плиты сближаются вдоль осей x_1 и x_2 . Постоянные c_0 и c_1 определяются из условия несжимаемости материала и условия на свободном конце

$x_3 = 1$. Это условие, как и в решении Прандтля [4], выполняется в смысле Сен-Венана. Пластическое течение бруса, сжатого четырьмя плитами, сближающимися с заданными скоростями, рассмотрено в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д. Современные модели пластических тел. — Новосибирск: НГУ, 1975.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. Гидромеханика невесомости/Под ред. А. Д. Мышкиса. — М.: Наука, 1976.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. — М.: Наука, 1966.

Поступила 27/II 1985 г.

УДК 539.376 + 539.4

КИНЕТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

А. Л. АРШАКУНИ
(Москва)

Наиболее обоснована при описании процесса ползучести металлов гипотеза кинетических уравнений со структурными параметрами Ю. Н. Работникова [1]. При отсутствии эффекта упрочнения самым простым является случай подобия диаграмм ползучести при различных напряжениях, когда $p(t) = \Phi(\sigma)M(t/t_p)$, где p — деформация ползучести; t — текущий момент времени; σ — напряжение; t_p — время до разрушения. Для описания такого процесса ползучести (второй и третьей стадии) можно ограничиться одним структурным параметром. Существует три достаточно апробированных феноменологических соотношения [2, 3], [4–6], [7, 8]:

$$(1) \quad \dot{p} = C\sigma^m \exp(\alpha p), \quad p(0) = 0.$$

Здесь C , m , α — постоянные материала; точка обозначает дифференцирование по времени; температура предполагается фиксированной;

$$(2) \quad \dot{A} = C\sigma^m/(A_* - A)^\alpha, \quad A(0) = 0,$$

где $A(t) = \int_0^t \sigma dp$ — удельная энергия рассеяния при ползучести; A_* — постоянная материала;

$$(3) \quad \dot{p} = C\sigma^m p^\alpha, \quad p(0) = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Основанием для уравнения (3) служит степенной закон ускоряющейся ползучести А. Грехема ($p \sim t^k$, $k > 1$), который наблюдается у никелевых сплавов (ЭИ 437Б (см. формулу (22)), ЭИ 617, ЭИ 867, Нимоник и др. [7, 8]) при высоком уровне напряжения (до перелома в кривых длительной прочности).

В общем случае кривые ползучести имеют стадию упрочнения. В [9, 10] в соответствии с гипотезой Андраде [1] общая деформация ползучести p_Σ представлялась в виде суммы рассматриваемой составляющей и деформации первой стадии p_I : $p_\Sigma = p_I + p$. При постоянных напряжениях в процессе ползучести чистых металлов и некоторых сплавов (Нимоник 80А, хромоникелевые аустенитные стали и др.) наблюдаются обе составляющие деформации, причем вторая удовлетворяет показательному закону разупрочнения П. В. Дэвиса

$$(4) \quad p = K \exp(\lambda t),$$

где K , λ — величины, не зависящие от времени. Каждое из соотношений (1)–(4) применимо только внутри достаточно узкой области температурно-силовых воздействий. Важен вопрос о возможности взаимного пересечения областей «применимости», так как не ясно, какая из моделей предпочтительнее. Кроме того (показано ниже), модели (1)–(4) не позволяют перекрыть температурно-силовой диапазон, в котором работают современные конструкции. Цель данной работы — создание соответствующей обобщенной модели. Предложенная однопараметрическая модель содержит (1)–(4) в качестве частных случаев и имеет более широкую по сравнению с (1)–(4) область применения; из модели следует, что области применимости (1)–(4) не пересекаются.

В исходные уравнения в качестве структурного параметра должны входить не механические параметры (p , A), а физические величины, характеризующие состояние