

18. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, № 8, вып. 2.
19. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., Наука, 1976.
20. Pearson H., Holliday J. B., Smith S. F. A theory of the cylindrical ejector supersonic propelling nozzles. — J. Royal Aeronaut. Soc., 1958, vol. 62, N 574.
21. Славянов Н. Н., Тагиров Р. К. Экспериментальное исследование влияния отношения теплоемкостей на донное давление за кольцевым уступом. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 4.
22. Sinley H. L. G., Ferriman V. N. Jet separation in conical nozzles. — J. Royal Aeronaut. Soc., 1964, vol. 68, N 648.

УДК 624.131+532.529

ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТОЯННОЙ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

А. Г. Ляхов, Г. М. Ляхов, В. Н. Охитин

(Москва)

Решение волновых задач проводилось на основе модели многокомпонентной среды без вязкости [1—3] и с постоянным коэффициентом объемной вязкости η [4—7].

Ниже дано решение задачи о распространении плоской одномерной волны, создаваемой ударной и непрерывно нарастающей нагрузкой в многокомпонентной среде при $\eta = 0$ (среда без вязкости), $\eta = \eta_0$ (постоянная вязкость), $\eta = \eta(\varepsilon)$ (вязкость, меняющаяся в процессе деформации среды). Сопоставление полученных решений позволяет определить влияние изменения η на закономерности распространения волн.

К жидкостям с пузырьками газа, а также к водонасыщенному грунту (среда — твердые частицы, жидкость, газ), где газ защемлен в виде отдельных пузырьков, при рассмотрении волновых процессов применяется модель многокомпонентной среды с объемной вязкостью [6]. Поведение среды определяется уравнением

$$(1) \quad \frac{\dot{V}}{V_0} = \Phi(p) \dot{p} - \frac{\alpha_1}{\eta} \Psi(p, V),$$

где p — давление в среде; V и V_0 — удельный объем при давлении p и атмосферном давлении p_0 ; $\Phi(p) = (dV_D/dp)/V_0$; $V_D(p)$ — диаграмма динамического сжатия среды при $\dot{p} \rightarrow \infty$, $\dot{V} \rightarrow \infty$. Функция $\Psi(p, V) = 0$ соответствует диаграмме статического сжатия среды (равновесной диаграмме) при $\dot{p} \rightarrow 0$, $\dot{V} \rightarrow 0$, η — коэффициент объемной вязкости.

При этом

$$(2) \quad \frac{\bar{V}_D}{V_0} = \alpha_1 + \sum_{i=2}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (p - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_i}};$$

$$(3) \quad \Psi(p, V) = p - p_0 \alpha_1^{\gamma_1} \left\{ \frac{\dot{V}}{V_0} - \sum_{i=2}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (p - p_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right\}^{\gamma_1},$$

где i — номер компонента, первый — газ, второй — жидкость, третий — твердые частицы; α_i — содержание компонентов по объему; $V_{i0} = 1/\rho_{i0}$ —

их удельный объем; c_{i0} — скорость звука в них при $p = p_0$. В среде жидкость — газ $\alpha_3 = 0$.

В модели принято, что в свободном состоянии все компоненты сжимаются по уравнению

$$(4) \quad p - p_0 = \frac{\rho_{i0} c_{i0}^2}{\gamma_i} \left[\left(\frac{V_{i0}}{V_i} \right)^{\gamma_i} - 1 \right].$$

Это уравнение соответствует адиабате Пуассона для газа и уравнению Тета для воды и материала твердого компонента. Принимается, что в среде жидкий и твердый компоненты сжимаются при нагрузке мгновенно по тем же уравнениям, а газ постепенно по мере заполнения остальными компонентами объема пузырьков. При этом

$$p - p_0 = \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left(\frac{V_{10}}{V_1} \right)^{\gamma_1} - 1 \right] - \eta \frac{\dot{V}_1}{V_{10}}.$$

Уравнение (1) переходит при $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$ в уравнения сжимаемости среды без вязкости с диаграммами сжатия, совпадающими с диаграммами статического и динамического сжатия вязкой среды.

Величина η определяется экспериментально. Приближенное значение η можно найти из некоторых предположений о характере деформирования пузырьков газа. Все пузырьки принимаются сферическими, одного радиуса.

Изменение объема пузырька V_{Π} , если давление p_{Π} внутри него мгновенно выравнивается,

$$\dot{V} = -4\pi r^2 u_{\Pi}, \quad V_{\Pi 0} = 4\pi r_0^3/3, \quad \frac{\dot{V}_1}{V_{10}} = \frac{\dot{V}_{\Pi}}{V_{\Pi 0}} = -\frac{3u_{\Pi}}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2,$$

где u_{Π} — скорость смещения поверхности пузырька к центру; r_0 — его начальный радиус; r — текущий радиус.

В каждый момент времени в соответствии с (1)–(3)

$$(5) \quad \frac{\dot{V}}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\dot{V}_i}{V_{i0}}, \quad \frac{\dot{V}}{V_0} = -\frac{3\alpha_1 u_{\Pi}}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \sum_{i=2}^3 \alpha_i \frac{\dot{V}_i}{V_{i0}} =$$

$$= -\frac{3\alpha_1 u_{\Pi}}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \Phi(p) \dot{p},$$

$$u_{\Pi} = \frac{\Psi(p, V) r_0}{3\eta} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2.$$

Давление внутри пузырька меняется по адиабате Пуассона. Отсюда

$$(6) \quad p_{\Pi} = p_0 \left(\frac{V_{10}}{V_1} \right)^{\gamma_1} = p_0^{\gamma_1} \left(\frac{V}{V_0} - \sum_{i=2}^3 \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}} \right)^{-\gamma_1} = p - \Psi(p, V),$$

$$u_{\Pi} = \frac{(p - p_{\Pi}) r_0}{3\eta} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2.$$

Начальную скорость истечения $u_{\Pi 0} = (p - p_{\Pi}) r_0 / 3\eta$ можно рассчитать на основе теории произвольного разрыва, как в плоском одномерном случае. По среде, окружающей пузырьки, где давление p , распространяется волна разрежения, по воздуху, где давление $p_0 < p$, — ударная волна. Течение в волне разрежения описывается римановским решением основных уравнений движения. При этом

$$u_{\Pi 0} = \pm \int \sqrt{-\frac{dV}{dp}} dp + \text{const},$$

$V(p)$ — закон сжимаемости среды. Постоянная определяется из условий на фронте волны разрежения.

В воздухе давление такое же, как на фронте волны, где выполняются соотношения на скачке

$$u_{п0} = \sqrt{(p - p_0)(V - V_0)},$$

$V(p)$ — адиабата Гюгонио.

Из условия сопряжения волны разрежения и ударной определяются $p_{п}$ и $u_{п0}$.

При линеаризации уравнения сжимаемости среды, окружающей пузырьки, и адиабаты Гюгонио найдем

$$(7) \quad u_{п0} = \frac{p - p_{п}}{A_2}, \quad \frac{p_{п}}{p_0} = \frac{A_1 p + A_2 p_0}{p_0 (A_1 + A_2)}.$$

Для среды жидкость — воздух $A_1 = \rho_{10} c_{10}$, $A_2 = \rho_{20} c_{20}$. Величина $p_{п}$ близка к p_0 . Например, при $p/p_0 = 100$ для среды вода — воздух получим $p_{п} = 1,02 p_0$, что и оправдывает линеаризацию адиабаты Гюгонио. Сжимаемость жидкости близка к линейной.

Из (6), (7) найдем начальное значение коэффициента вязкости

$$\eta_0 = A_2 r_0 / 3.$$

Для трехкомпонентной среды акустическое сопротивление A определяется с учетом содержания жидкого и твердого компонентов и их сжимаемости.

При сжатии среды радиус пузырьков может стать меньше радиуса r^* , соответствующего равенству внешнего p и внутреннего $p_{п}$ давлений. Равновесие достигается после нескольких колебаний. Амплитуда колебаний давления, обусловленных пульсацией пузырьков на один — два порядка меньше амплитуды волны [8, 9]. Влиянием пульсаций можно поэтому пренебречь, приняв, что происходит монотонное уменьшение радиуса от r_0 до r^* , а разности $p - p_{п}$ и скорости $u_{п}$ от максимальных значений до нуля. Примем приближенно, что при этом связь $p - p_{п}$ и $u_{п}$ остается линейной $p - p_{п} = A_2 u_{п}$. Тогда в соответствии с (6) найдем

$$(8) \quad \eta = (A_2 r_0 / 3) (r_0 / r)^2.$$

Коэффициент вязкости сначала возрастает, а после достижения равновесного состояния убывает до начального значения.

Опыты по распространению волн сжатия в глицерине с пузырьками газа [8, 9] подтверждают применимость этой модели.

Ниже сопоставляются решения при нулевом, конечном (постоянном) и переменном η .

Воспользуемся переменными Лагранжа x , t . Основные уравнения движения сплошной среды

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Эта система замыкается уравнением (1). Волна создается нагрузкой в сечении $x = 0$. Рассмотрим два варианта нагрузки: ударная

$$(9) \quad \begin{cases} p = p_0 + p_m \exp(-t/\theta) & \text{при } t \geq 0, \\ p = p_0 & \text{при } t \leq 0; \end{cases}$$

непрерывно меняющаяся

$$(10) \quad \begin{cases} p = p_0 + p_m \sin(\pi t / \theta) & \text{при } 0 \leq t \leq \theta, \\ p = p_0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > \theta. \end{cases}$$

Граничное условие на фронте волны, где вязкость не проявляется:

$$p - p_0 = \rho_0 u D, (\rho - \rho_0) D = \rho u.$$

Система уравнений гиперболическая. Характеристические соотношения имеют вид

$$dp \pm (-V_0 \varphi(p))^{-1/2} du = \Phi(p, V) dt \text{ при } \pm (-V_0/\varphi(p))^{1/2} = \dot{x},$$

$$dp + (V_0 \varphi(p))^{-1} dV = \Phi(p, V) dt \text{ при } 0 = \dot{x},$$

где $\Phi(p, V) = \alpha_1 \psi(p, V)/\eta(p, V)\varphi(p)$.

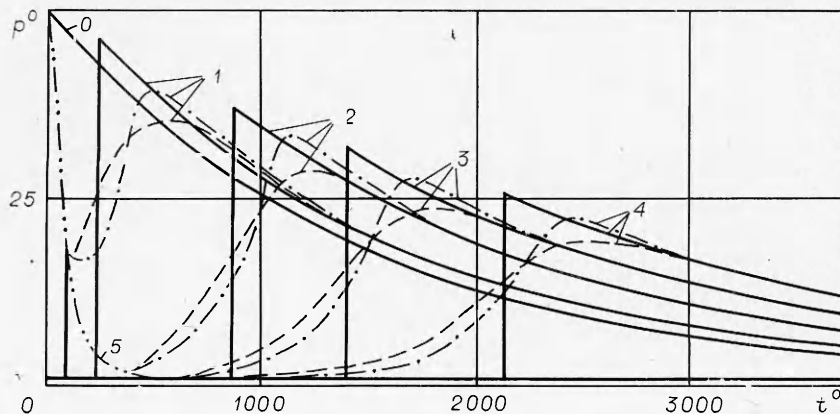
Решение проведено при помощи ЭВМ методом характеристик для среды вода — воздух при содержании воздуха $\alpha_1 = 0,01$ и $0,1$. В расчетах принято: $\rho_{10} = 1,29$, $\rho_{20} = 10^3$ кг/м³, $c_{10} = 330$, $c_{20} = 1500$ м/с, $\gamma_1 = 1,4$, $\gamma_2 = 7$. Применены безразмерные переменные $x^0 = x/r_0$, $t^0 = tc_{20}/r_0$, $p^0 = p/p_0$, $V^0 = V/V_0$, $\theta^0 = \theta c_{20}/r_0$.

Рассмотрим результаты расчета параметров волны, создаваемой ударной нагрузкой в виде (9) при $p^0 = 50$, $\theta^0 = 1400$ и $\alpha_1 = 0,01$. На фиг. 1 показано изменение давления во времени в сечениях среды x^0 , равных 0; 100; 350; 550 и 800 (кривые 0—4 соответственно, кривая 5 — давление на предвестнике). Здесь и далее штриховые линии определяют давление в среде с переменным η , штрихпунктирные — с постоянным $\eta = \eta_0$, сплошные — в среде без вязкости.

В вязких средах вблизи начального сечения волна включает скачок, за которым следует уменьшение давления, затем его новое постепенное нарастание до второго максимума и новое уменьшение. Наличие двух максимумов прослеживается еще на расстоянии $x^0 = 100$ (кривые 1). На больших расстояниях за скачком следует непрерывное нарастание давления и затем его уменьшение — волна имеет один максимум. На еще больших расстояниях скачок иссякает и нарастание и спад давления происходят непрерывным образом. Величина давления на скачке одинакова при постоянном и переменном η . Однако максимальное давление при переменном η имеет меньшее значение, интенсивность угасания волны увеличивается. Учет изменения η приводит также к увеличению времени между приходом начала возмущения (скачка) и его максимума, т. е. к более быстрому размыванию волны.

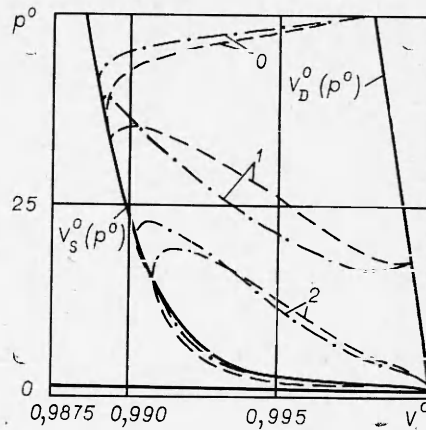
В среде без вязкости волна на всех расстояниях ударная. Максимальное давление выше, чем в вязких средах. Различия давления в трех сравниваемых случаях невелики, порядка одной десятой p .

На фиг. 2 приведены кривые сжатия и разгрузки $p(V)$, реализуемые в разных сечениях среды при прохождении волны. Кривые 0—2 относятся к расстояниям $x^0 = 0$; 100 и 800 соответственно, $V_D^0(p^0)$ и $V_S^0(p^0)$ —



Ф и г. 1

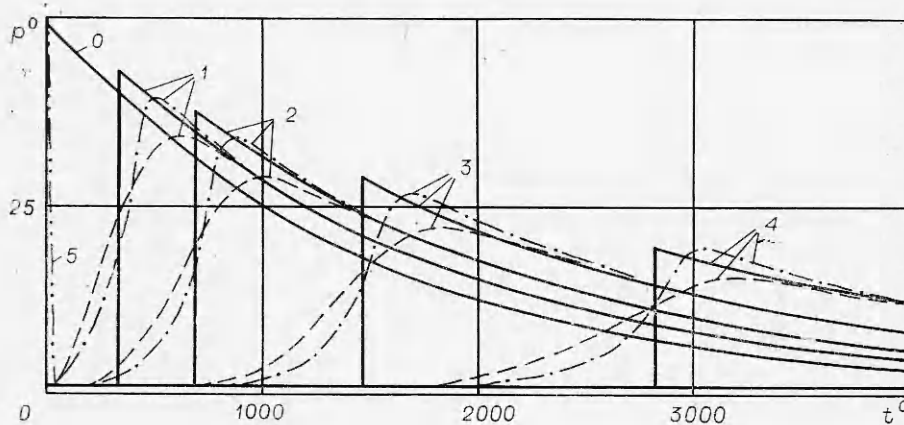
диаграммы динамического и статического сжатия среды. При отсутствии вязкости состояние из начальной точки скачком попадает на диаграмму $V_S^u(p^0)$ и по мере уменьшения давления возвращается по этой кривой в начальную точку. В вязких средах при постоянном и переменном η состояние попадает из начальной точки на диаграмму $V_D^u(p^0)$, что соответствует скачку на предвестнике. Затем оно переходит на статическую диаграмму и далее за нее. Когда скачок иссякает, состояние переходит прямо на статическую диаграмму. По мере падения давления состояние приближается к начальной точке, оставаясь за кривой $V_S^u(p^0)$. Различия кривых $p(V)$ при постоянном и переменном η невелики. Если принять радиус пузырька $r_0 = 0,1$ см, а $\theta^0 = 1400$, то размерное время действия нагрузки в начальном сечении $\theta = 0,93 \cdot 10^{-3}$ с. Таким образом, при длительности нагрузки порядка 10^{-3} с и максимальном давлении $p = 50 \cdot 10^5$ Н/м² состояние среды успевает перейти на статическую диаграмму.



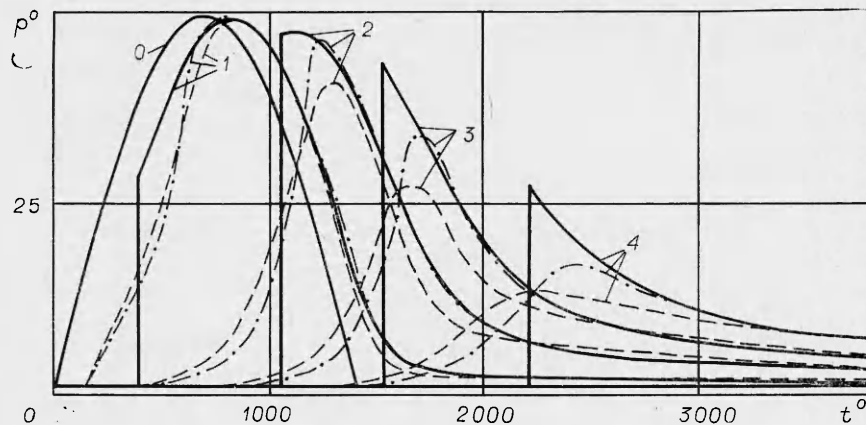
Ф и г. 2

На фиг. 3 показано изменение давления во времени при прохождении волны в сечениях x^0 , равных 0; 50; 100; 200 и 350 (кривые 0—4 соответственно) в случае ударной нагрузки (9) при $p^0 = 50$, $\theta^0 = 1400$, но при большем, чем в предыдущем случае, содержании воздуха $\alpha_1 = 0,1$ (кривая 5 — давление на предвестнике). Различия максимальных давлений при постоянном, переменном η и при отсутствии вязкости здесь также не превышают 15—25%. Наибольшее угасание максимального давления с расстоянием наблюдается при переменном η , наименьшее — при отсутствии вязкости. Возрастание содержания воздуха приводит к возрастанию угасания волны, как это отмечалось ранее [1,6].

Рассмотрим распространение волны, создаваемой непрерывно меняющейся нагрузкой, заданной в виде (10) (полупериод синусоиды) при $p^0 = 50$, $\theta^0 = 1400$. Содержание воздуха в воде $\alpha_1 = 0,01$. Результаты расчета представлены на фиг. 4. Кривые 0—4 определяют зависимость $p(t)$ при прохождении волны в сечениях среды x^0 , равных 0; 100; 350; 550 и 800 соответственно. Как и ранее, сплошные линии относятся к среде без



Ф и г. 3



Ф и г. 4

вязкости, штрихпунктирные с постоянным, а штриховые с переменным η .

В среде без вязкости около начального сечения возникает волна, имеющая скачок на фронте, величина скачка в первый момент бесконечно мала. За скачком происходит непрерывное возрастание давления до максимального значения. По мере распространения волны величина скачка на фронте увеличивается, а величина последующего непрерывного нарастания давления уменьшается. На некотором расстоянии волна превращается в чисто ударную — максимальное давление достигается на скачке, за ним следует убывание давления. При дальнейшем распространении максимальное давление убывает, а длительность волны возрастает. Процесс превращения непрерывной волны в чисто ударную заканчивается довольно быстро. За время превращения максимальное давление успевает уменьшиться менее чем на 10%.

Диаграмма сжимаемости воды с пузырьками газа без учета вязкости соответствует $V_S^0(p^0)$ на фиг. 2, а диаграмма сжимаемости чистой воды совпадает с $V_D^0(p^0)$. В обеих средах эти кривые выпуклы к началу координат, поэтому непрерывные волны превращаются в ударные. Однако кривизна диаграммы $V(p)$ в воде с пузырьками существенно выше, чем в чистой воде, поэтому эффекты, связанные с кривизной, проявляются ярче.

В средах с вязкостью (см. фиг. 4) наблюдается размывание непрерывной волны, время между приходом начала возмущения и его максимума по мере распространения волны увеличивается. Одновременно с размыванием на некоторых участках ($x^0 = 100-350$) происходит возрастание крутизны профиля $p(t)$ (в области увеличения давления), волна постепенно приближается к ударной. На больших расстояниях начинается обратный процесс — крутизна уменьшается ($x^0 = 550-800$) и профиль становится более пологим. Размывание волны и возрастание крутизны профиля происходят при постоянном и переменном η .

Размывание волны связано с вязкими свойствами среды, возрастание крутизны — с нелинейностью диаграммы статического сжатия. Когда эта диаграмма линейна, возрастание крутизны профиля не имеет места [7]. Размывание непрерывной волны, создаваемой синусоидальной нагрузкой в глицерине с пузырьками воздуха, при одновременном возрастании на некотором участке крутизны профиля получено экспериментально в работах [8, 9].

Различия максимальных давлений в волне, создаваемой непрерывно меняющейся нагрузкой при учете и без учета вязкости, достигают 50%, а при постоянном и переменном η — 20%. Кривые $p(V)$ в разных сечениях среды, реализуемые при прохождении волны, при постоянном и перемен-

ном η отличаются, как и в случае ударной нагрузки (см. фиг. 2), незначительно.

Таким образом, учет объемной вязкости в модели среды приводит к изменению характера волны — размыванию профиля, возникновению двух максимумов, запаздыванию развития деформаций относительно давления, а также к изменению интенсивности угасания с расстоянием. На некоторых участках крутизна профиля волны может возрасти.

Введение переменного коэффициента вязкости вместо постоянного, не меняя общего характера волны, приводит к увеличению интенсивности угасания и размывания волны с расстоянием. Увеличение давления от 10^5 до $50 \cdot 10^5$ Н/м² сопровождается уменьшением равновесного радиуса пузырька в 2,53 раза, объема газообразного компонента в 16,33 раза, коэффициента вязкости η в 6,44 раза. При таком изменении η интенсивность угасания и размывания волны возрастает лишь на 10—20%. Это показывает, что при решении волновых задач в рассмотренных случаях можно пользоваться приближенными значениями коэффициента объемной вязкости.

Поступила 28 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М., Охитин В. Н. Сферические взрывные волны в многокомпонентных средах. — ПМТФ, 1974, № 2.
2. Паркин Б. Р., Гильмор Ф. Р., Броуд Г. Л. Ударные волны в воде с пузырьками газа. — В кн.: Подводные и подземные взрывы. М., Мир, 1974.
3. Плаксий В. А. Цилиндрические взрывные волны в многокомпонентных средах. — ПМТФ, 1978, № 3.
4. Ляхов Г. М., Охитин В. Н. Плоские нестационарные волны в средах с объемной вязкостью. — ПМТФ, 1977, № 5.
5. Ляхов Г. М., Охитин В. Н. Сферические взрывные волны в средах с объемной вязкостью. — ПМТФ, 1977, № 6.
6. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., Недра, 1974.
7. Ляхов Г. М., Султанов К. С. Продольные волны в линейных вязкоупругих средах. — Изв. АН СССР. Физика земли, 1978, № 8.
8. Гребенкина Л. Г., Дружинин Г. А., Токман А. С. Искажение формы импульсов сжатия при распространении в пористой жидкости. — В кн.: Материалы IX Всесоюз. акустической конф. М., 1977.
9. Дружинин Г. А., Остроумов Г. А., Токман А. С. Нелинейное отражение ударных волн и ударные кривые жидкостей с пузырьками газа. — В кн.: Материалы симпозиума «Нелинейные волны деформации». Таллин, 1978.

УДК 620.171.3

НАПРЯЖЕНИЯ СДВИГА И ОТКОЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ (ОБЗОР)

С. А. Новиков

(Москва)

Исследования механических свойств материалов при ударном сжатии необходимы для прогнозирования работоспособности многих современных конструкций и для разработки новых технологических методов обработки. Величина критических напряжений сдвига на фронте ударной волны определяет условия перехода из упругого состояния в пластическое. Применение пьезорезистивных датчиков давления позволяет непосредственно измерить нормальное и касательное напряжения на фронте волны, разность которых характеризует ве-