

УДК 539.3

## Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с $N$ цилиндрическими полостями

А.Г. Николаев, Е.А. Танчик

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского, ул. Чкалова, 17, Харьков, Украина, 61070  
E-mails: k405@d4.khai.edu (Николаев А.Г.), eug.tanchik@yandex.ru (Танчик Е.А.)

**Николаев А.Г., Танчик Е.А.** Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с  $N$  цилиндрическими полостями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 177–189.

Предложен эффективный метод аналитико-численного решения неосесимметричной краевой задачи теории упругости для многосвязного тела в виде цилиндра с  $N$  цилиндрическими полостями. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Разрешающая система решается численно методом редукции. Исследована практическая скорость сходимости метода редукции. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации. Достоверность результатов подтверждается сравнением их для двух случаев: цилиндра с шестнадцатью и с четырьмя цилиндрическими полостями.

**DOI:** 10.15372/SJNM20150206

**Ключевые слова:** *краевая задача, многосвязное тело, обобщенный метод Фурье, разрешающая система, цилиндрическая граница, теоремы сложения.*

**Nikolaev A.G., Tanchik E.A.** The first boundary value problem of elasticity theory for a cylinder with  $N$  cylindrical cavities // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 177–189.

An efficient method for the analytical-numerical solution to the non-axisymmetric boundary value problem of elasticity theory for a multiconnected body in the form of a cylinder with  $N$  cylindrical cavities is proposed. The solution is constructed as superposition of the exact basis solutions of the Lamé equation for a cylinder in the coordinate systems assigned to the centers of the boundary surfaces of the body. The boundary conditions are exactly satisfied with the help of the apparatus of the generalized Fourier method. As a result, the original problem reduces to an infinite system of linear algebraic equations, which has a Fredholm operator in the Hilbert space  $l_2$ . The resolving system is numerically solved by the reduction. The rate of convergence of the reduction is investigated. The numerical analysis of stresses in the areas of their greatest concentration is carried out. The reliability of the results obtained is confirmed by comparing them for the two cases: a cylinder with sixteen and a cylinder with four cylindrical cavities.

**Keywords:** *boundary value problem, multiconnected body, generalized Fourier method, resolving system, cylindrical boundary, addition theorems.*

---

## Введение

Краевые задачи теории упругости для многосвязных тел находят приложение в моделировании напряженно-деформированного состояния в пористых и композиционных материалах. В случае когда число границ многосвязного тела  $N \geq 3$ , практически отсутствуют эффективные методы их решения.

Краевые задачи теории упругости для бесконечного цилиндра рассматривались в классических работах [1, 3, 12, 18]. Их решения были получены авторами методом Фурье.

Задачи для полубесконечного и конечного цилиндров исследованы в статьях [5–8] при помощи разных модификаций метода Фурье.

В работах [19, 20] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя–Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В статье [2] асимптотическими методами анализируется поведение решений краевых задач теории упругости для пространства с тонким цилиндрическим включением.

Ряд исследований напряженно-деформированного состояния упругого пространства в окрестности цилиндрической полости или включения был связан с построением моделей волокнистых пористых или композиционных материалов. Обычно эти модели имеют простую структуру в виде одного цилиндрического включения или полости. Примером подобных исследований может служить работа [10]. В случае плоского напряженного состояния анализ напряжений в многосвязном волокнистом композите проводился методами теории функций комплексного переменного в работе [4].

Решения задач термоупругости для бесконечного цилиндра рассмотрены в работах [21, 22]. В них решения строятся в виде разложений в степенные ряды, ряды Фурье, ряды Фурье–Бесселя.

В работе [23] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В работах [13, 16] исследовано распределение напряжений в цилиндре с двумя цилиндрическими полостями или включениями. В них напряжения определяются при помощи обобщенного метода Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье разработан в [17]. Его применения к двусвязным задачам приведено в монографии [14].

В настоящей работе приводится аналитико-численное решение неосесимметричной краевой задачи теории упругости для многосвязного тела в виде цилиндра с цилиндрическими полостями. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Разрешающая система решается численно методом редукции. Исследована практическая скорость сходимости метода редукции. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации.

## 1. Постановка задачи

Рассматриваем бесконечный упругий цилиндр  $\Omega_0$ , содержащий  $N$  цилиндрических полостей  $\Omega_j$  ( $j = 1 \div N$ ), оси которых параллельны оси цилиндра. Обозначим через  $O_j$  ( $j = 0 \div N$ ) точки, принадлежащие осям исходного цилиндра и полостей, расположенные в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра. Предполагается, что точки  $O_j$  ( $j = 1 \div N$ ) образуют регулярную структуру: тетрагональную, гексагональную или другую (рис. 1).

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические системы координат  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ , начала которых отнесены к точкам  $O_j$  ( $j = 0 \div N$ ). Радиусы цилиндров  $\Omega_j$  равны  $R_j$ , границы цилиндров  $\Gamma_j$  описываются уравнениями  $\rho_j = R_j$ . Предполагается,

что полости расположены внутри исходного цилиндра и их границы не пересекаются.

Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости для указанной области. Предполагается, что к внешней границе приложена нагрузка  $\mathbf{f}(\varphi_0, z_0)$ , которая допускает представление абсолютно и равномерно сходящимся рядом и интегралом

$$\mathbf{f}(\varphi_0, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{x,m}(\lambda)\mathbf{e}_x + f_{y,m}(\lambda)\mathbf{e}_y + f_{z,m}(\lambda)\mathbf{e}_z] \times e^{i\lambda z + im\varphi} d\lambda. \quad (1)$$

где  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  — орты декартовой системы координат, сонаправленной с введенными цилиндрическими системами координат.

Считается, что вектор-функция  $\mathbf{f}$  удовлетворяет условиям статики на поверхности  $\rho_0 = R_0$ .

Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями: на внешней границе

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}(\varphi_0, z_0) \quad (3)$$

и на границе полостей

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$  — вектор перемещений,  $\mathbf{F}\mathbf{U}$  — соответствующий ему вектор напряжений,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

## 2. Решение задачи

Общее решение краевой задачи (2)–(4) в области  $\Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$  ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{- (3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda, \quad (5)$$

где  $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$  — неизвестные функции, подлежащие определению;  $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z)$  — базисные решения уравнения Ламе для цилиндра (знаку + (–) соответствует внешнее (внутреннее) решение), введенные в работе [17]. В статье [15] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе и доказана базисность систем:

$$\left\{ \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)} \right\}_{s=1, m=-\infty, \lambda=-\infty}^{3, \infty, \infty}, \quad \left\{ \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{- (3)} \right\}_{s=1, m=-\infty, \lambda=-\infty}^{3, \infty, \infty}.$$

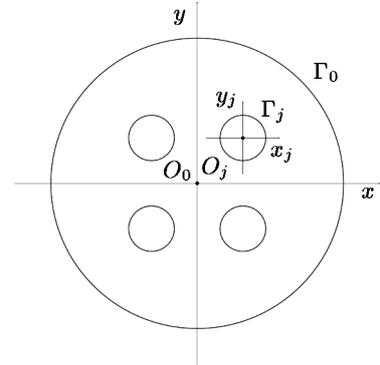


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Приведем явный вид этих решений:

$$U_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} D_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad s = 1, 3, \quad (6)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} B_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad (7)$$

где

$$D_1 = \nabla, \quad D_2 = z\nabla - \chi e_z, \quad D_3 = i[\nabla \times e_z], \quad B_2 = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [e_z \times [\nabla \times e_z]];$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho), \quad u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

$I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(x)$  — функция Макдональда;  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}$  — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах,  $i$  — мнимая единица.

В развернутой координатной форме базисные решения (6), (7) имеют вид:

$$U_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0, \quad (8)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp (D - \chi) \left[ u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 \right] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0, \quad (9)$$

$$U_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1, \quad (10)$$

где  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $e_{-1} = \frac{1}{2}(e_x + i e_y)$ ,  $e_1 = \frac{1}{2}(e_x - i e_y)$ ,  $e_0 = e_z$ .

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right], \quad (11)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

Применив к формулам (8)–(10) оператор (11) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ , получим:

$$\mathbf{FU}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp D u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp D u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp \right. \\ \left. [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 + \right. \\ \left. i [m^2 + \lambda^2 \rho^2 (2\sigma-2)D] u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\mathbf{FU}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{G}{\rho} \left\{ \pm (D + m - 1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp (D - m - 1) u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}. \quad (14)$$

### 3. Теоремы сложения

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары цилиндров. Справедливы следующие теоремы сложения [17]:

$$U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{1,\lambda,m}^{(33)l,j,\alpha} U_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha); \quad (15)$$

$$U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{\lambda,m}^{+(33)l,j,\alpha} U_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha); \quad (16)$$

$$U_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{\lambda,m}^{-(33)l,j,\alpha} U_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha), \quad (17)$$

$$f_{1,\lambda,m}^{(33)l,j,\alpha} = (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}), \quad f_{\lambda,m}^{\pm(33)l,j,\alpha} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}),$$

$$\tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} = \left[ \delta_{st} + \delta_{t1} \delta_{s2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right], \quad j \neq \alpha,$$

где  $(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha})$  — цилиндрические координаты точки  $O_\alpha$  в системе координат  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ ,  $\delta_{st}$  — дельта-символ Кронекера.

#### 4. Разрешающая система уравнений

Используя теоремы сложения (15)–(17), представим вектор перемещения  $U$  в системе координат с началом в точке  $O_0$ :

$$U = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-l} \tilde{D}_{s,t}^{(j0)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{j0}, \varphi_{j0}, z_{j0}) U_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) U_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad (18)$$

и с началом в точке  $O_j$  ( $j = 1 \div N$ ):

$$U = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{\alpha \neq j} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(\alpha j)} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{\alpha j}, \varphi_{\alpha j}, z_{\alpha j}) U_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) U_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda. \quad (19)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ :

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0) \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l-m} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) \tilde{D}_{t,s}^{(j0)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{j0}, \varphi_{j0}, z_{j0}) \right\} = (f_{x,m-1}(\lambda) - if_{y,m-1}(\lambda), f_{x,m+1}(\lambda) + if_{y,m+1}(\lambda), f_{z,m}(\lambda)), \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(j)}(\lambda) G_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j) + \right. \\ \left. G_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) (-1)^m \tilde{D}_{t,s}^{(\alpha j)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{\alpha j}, \varphi_{\alpha j}, z_{\alpha j}) + \right. \\ \left. G_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \tilde{D}_{t,s}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = 0, \quad (21)$$

$$j = 1 \div N; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

где  $G_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R) = \left( G_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right);$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \mp \frac{G}{R} (D - m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \pm \frac{G}{R} (D + m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = \frac{2G}{R} i [m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma - 2)D] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{+(3)}(R) = \tilde{K}_m(\lambda R), \quad \tilde{u}_{\lambda,m}^{-(3)}(R) = I_m(\lambda R).$$

## 5. Анализ разрешающей системы

**Теорема.** При любом  $\lambda \neq 0$  оператор системы (20), (21) является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$  при выполнении условий  $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$  ( $j \neq \alpha$ ;  $j, \alpha = 1 \div N$ ),  $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$  ( $\alpha = 1 \div N$ ).

**Доказательство.** Путем переобозначения неизвестных функций:

$$A_{s,m}^{(j)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)}{K_m(|\lambda|R_j)} \quad (j = 1 \div N), \quad A_{s,m}^{(0)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda)}{I_m(\lambda R_0)} \quad (22)$$

и решения системы относительно  $\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)$  можно представить систему (20), (21) в виде:

$$\tilde{A}_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) + \sum_{j \neq \alpha} \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) + \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{2,\alpha,s,m}^{p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(0)}(\lambda) = 0, \quad (23)$$

$$\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{3,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) = F_{s,m}(\lambda). \quad (24)$$

Опустим явную запись матричных коэффициентов. Заметим, что модули матричных коэффициентов  $|T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l}|$ ,  $|T_{2,\alpha,s,m}^{p,l}|$ ,  $|T_{3,s,m}^{j,p,l}|$  оцениваются сверху конечными линейными комбинациями выражений вида (25)–(27) соответственно

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda| R_j)} K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha}) \right|, \tag{25}$$

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda| \rho_{0\alpha}) \right|, \tag{26}$$

$$\left| \frac{K_m(|\lambda| R_0)}{K_l(|\lambda| R_j)} I_{m-l}(\lambda \rho_{j0}) \right|. \tag{27}$$

При этом были использованы оценки определителей разрешающих систем первой краевой задачи теории упругости для внутренности и внешности цилиндра, полученные в работе [15].

Для доказательства теоремы достаточно показать выполнение следующих условий для матричных коэффициентов системы (23), (24):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l}|^2 < \infty, \tag{28}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{2,\alpha,s,m}^{p,l}|^2 < \infty, \tag{29}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{3,s,m}^{j,p,l}|^2 < \infty. \tag{30}$$

Рассмотрим теорему сложения гармонических функций [14]:

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha). \tag{31}$$

Это разложение можно интерпретировать как представление функции  $u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  рядом Фурье по переменной  $\varphi_\alpha \in [0, 2\pi]$ . Тогда для этого разложения справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha})|^2 |I_l(\lambda \rho_\alpha)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_m(|\lambda| \rho_j)|^2 d\varphi_\alpha. \tag{32}$$

В силу оценок (25)–(27), для доказательства теоремы достаточно показать сходимость рядов:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda| R_j)} K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha}) \right|^2, \tag{33}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda| \rho_{0\alpha}) \right|^2, \tag{34}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_m(|\lambda| R_0)}{K_l(|\lambda| R_j)} I_{m-l}(\lambda \rho_{j0}) \right|^2. \tag{35}$$

В работе [15] доказана оценка

$$I_m(z)K_m(z) > \frac{c}{m^2 + 1}(1 + 2z)^{-1}, \quad m \geq 0, \quad z > 0, \quad (36)$$

где  $c > 0$  — некоторая постоянная. Тогда ряд (33) можно мажорировать рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha})|^2.$$

Подставим в тождество (32)  $\rho_\alpha = R_\alpha$ , после чего домножим обе его части на  $|I_m(\lambda R_j)|^2$  и просуммируем по  $m$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha})|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |I_m(\lambda R_j)|^2 |K_m(|\lambda| \rho_j)|_{\rho_\alpha=R_\alpha}^2 d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (37)$$

Из асимптотических формул при  $m \rightarrow \infty$  [11]:

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} [1 + O(m^{-1})], \quad (38)$$

$$K_m(z) = \frac{2^{m-1}(m-1)!}{z^m} [1 + O(m^{-1})] \quad (39)$$

следует, что ряд в левой части (37) сходится при условии  $\rho_j > R_j$ . Определим минимальное значение  $\rho_j^{\min}$  при произвольных значениях угла  $\varphi_\alpha$ . Из соотношений между цилиндрическими координатами в системах с началами  $O_j$  и  $O_\alpha$  следует, что при  $\rho_\alpha = R_\alpha$ :

$$\rho_j = \sqrt{\rho_{j\alpha}^2 + R_\alpha^2 + 2\rho_{j\alpha}R_\alpha \cos(\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha})},$$

и минимальное значение  $\rho_j$  достигается при условии  $\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha} = \pi$  и равняется  $\rho_j^{\min} = \rho_{j\alpha} - R_\alpha$  ( $\rho_{j\alpha} > R_\alpha$  — естественное геометрическое условие в постановке задачи).

Таким образом, условие сходимости ряда будет удовлетворено, если  $\rho_j^{\min} > R_j$ . Оно означает, что  $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$ .

Аналогично можно записать такое равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |K_m(|\lambda| R_0) I_l(\lambda R_\alpha) I_{m-l}(\lambda \rho_{0\alpha})|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |K_m(|\lambda| R_0)|^2 |I_m(\lambda \rho_0)|_{\rho_\alpha=R_\alpha}^2 d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

На основании асимптотик (38), (39) ряд в формуле (40) сходится при условии  $\rho_0 < R_0$ . На поверхности  $\rho_\alpha = R_\alpha$  справедливо  $\rho_0^{\max} = \rho_{0\alpha} + R_\alpha$ . Поэтому условием сходимости ряда (40) является неравенство  $\rho_0^{\max} < R_0$  или  $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$ .

В силу оценки (36), сходимость ряда (35) при условии  $\rho_{0j} + R_j < R_0$  следует из сходимости ряда (40).  $\square$

### 6. Анализ численных результатов

При численной реализации задачи предполагалось, что к границе цилиндра приложена кусочно-постоянная нормальная нагрузка

$$FU|_{\Gamma_0} = Te_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h/2, \\ 0, & |z| > h/2, \end{cases} \quad (41)$$

и выбирались следующие значения параметров:  $R_j=R$ ,  $R_0=10R$ ,  $\sigma=0.38$ . Рассматривалась тетрагональная упаковка из  $N=16$  цилиндрических полостей, расположенных симметрично относительно оси цилиндра (рис. 2).

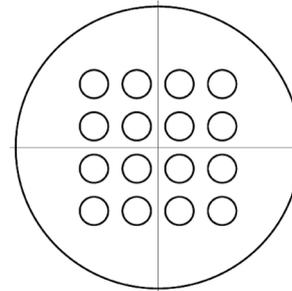


Рис. 2. Тетрагональная упаковка полостей

Система (20), (21) численно решается методом редукции по параметру  $m$  ( $-m_{\max} \leq m \leq m_{\max}$ ) при фиксированных значениях  $\lambda$ , которые являются узлами квадратурной формулы Лагерра.

На рис. 3–5 приведены графики напряжений  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_z/T$  на линии, которая соединяет центры соседних полостей, ближайших к оси цилиндра, в зависимости от относительного расстояния между полостями  $a/R$  в плоскостях  $z=0$  и  $z=h$ . Вдоль горизонтальной оси откладывается относительное расстояние между границами соседних полостей. Наибольшая концентрация напряжений  $\sigma_y/T$  наблюдается на границах полостей, в то время как для напряжений  $\sigma_x/T$  — в середине линии. Характерным является изменение знака напряжения  $\sigma_z/T$  при переходе от плоскости  $z=0$  к плоскости  $z=h$ .

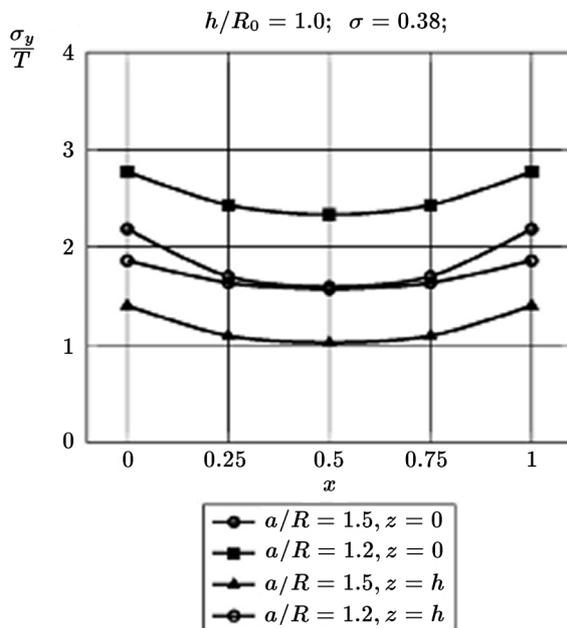


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними

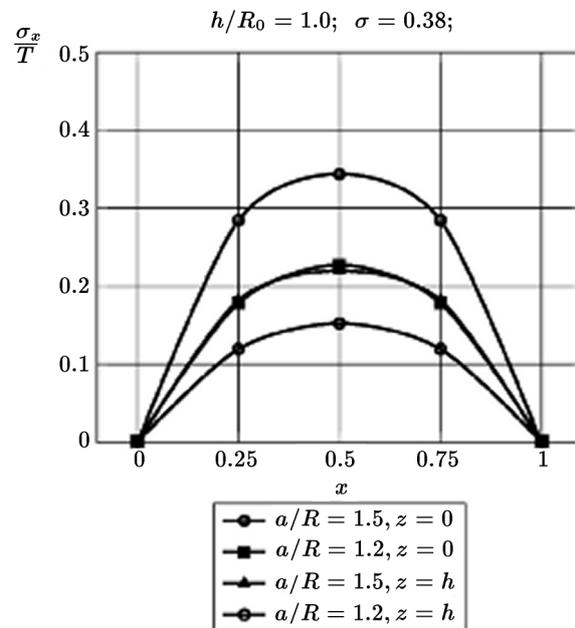
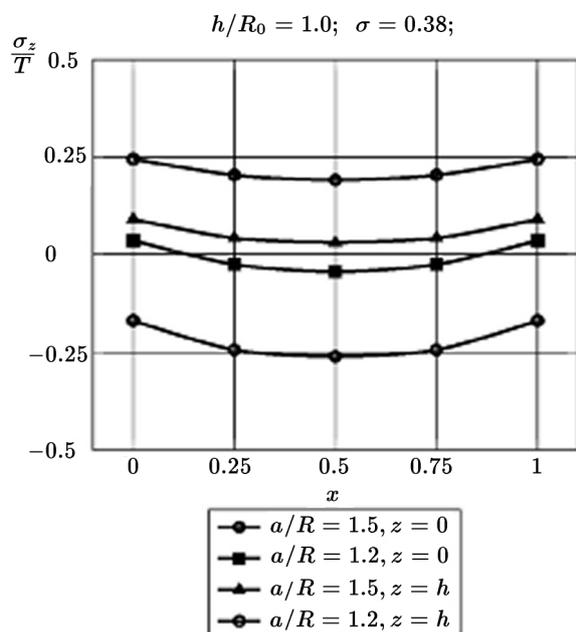
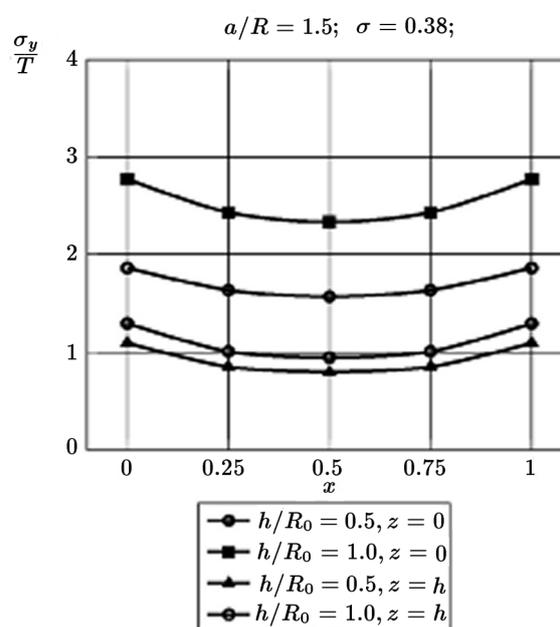


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними

На рис. 6 приведены графики напряжений  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры соседних полостей, в плоскостях  $z = 0$  и  $z = h$  в зависимости от отношения  $h/R_0$ .

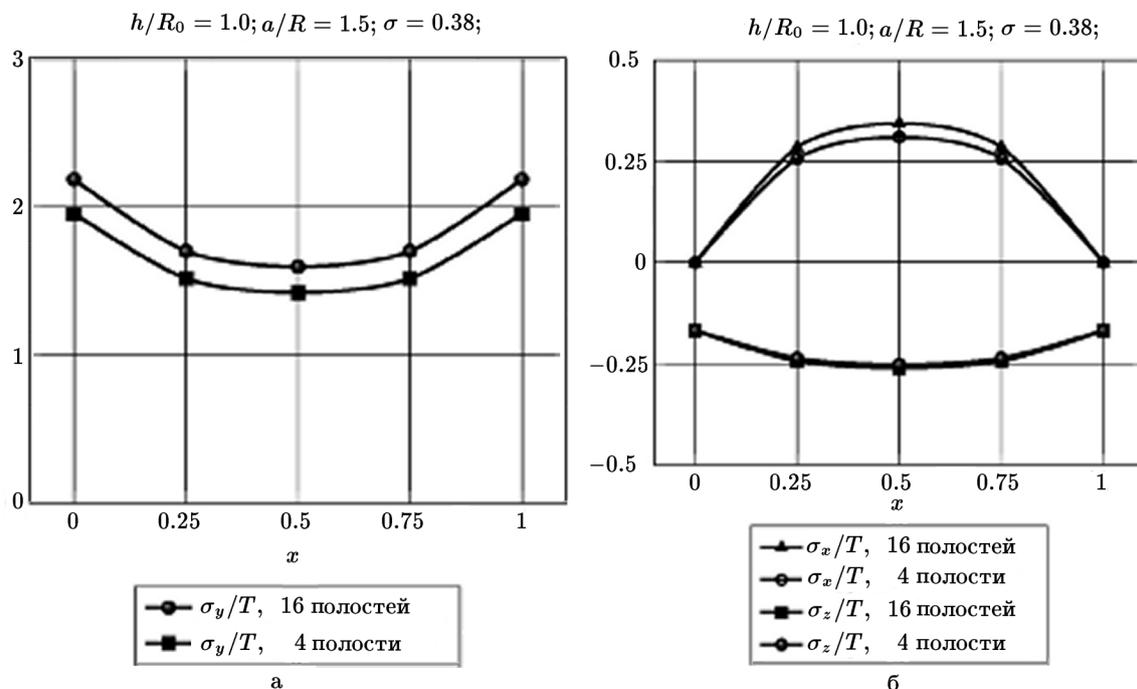


**Рис. 5.** Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними



**Рис. 6.** Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от соотношения  $h/R_0$

На рис. 7 приведено сравнение напряжений  $\sigma_y/T$  (рис. 7а) и напряжений  $\sigma_x/T, \sigma_z/T$  (рис. 7б) в одних и тех же точках цилиндра в зависимости от количества полостей в упаковке при  $a/R = 1.5, h/R_0 = 1.0$ .



**Рис. 7.** Сравнение напряжений в одних и тех же точках цилиндра в зависимости от количества полостей в упаковке

Об эффективности предложенной методики можно судить по скорости сходимости метода редукции, информация о которой содержится в таблице. В ней приведены значения нормальных компонент тензора напряжений в средней точке линии, соединяющей центры соседних полостей в зависимости от размера редуцируемой системы при  $a/R = 1.5$ ,  $h/R_0 = 1.0$ .

**Таблица.** Сходимость метода редукции

$m_{\max}$	5	10	15	20
$\sigma_x/T$	0.343729	0.344384	0.344381	0.344382
$\sigma_y/T$	1.5964	1.59645	1.59648	1.59648
$\sigma_z/T$	-0.260994	-0.260695	-0.260671	-0.260669

## Заключение

Предложен эффективный метод аналитико-численного решения неосесимметричной краевой задачи теории упругости для многосвязного тела в виде цилиндра с  $N$  цилиндрическими полостями. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Последнее обстоятельство позволяет применять при численном решении системы метод редукции. При этом известно [9], что решение редуцированной системы сходится к точному решению разрешающей системы при  $m_{\max} \rightarrow \infty$ .

Исследована практическая скорость сходимости метода редукции, которая показывает эффективность предложенной методики. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации. Достоверность результатов подтверждается сравнением их для двух случаев: цилиндра с шестнадцатью и с четырьмя цилиндрическими полостями.

## Литература

1. **Абрамян Б.Л.** К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра // Докл. АН Арм. ССР. — 1954. — Т. 19, № 1. — С. 3–12. (Abramyan B.L. K zadache osesimmetrichnoj deformatsii kruglogo tsilindra // Dokl. AN Arm. SSR. — 1954. — Т. 19, № 1. — С. 3–12.)
2. **Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Назаров С.А.** Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. — 1987. — Т. 10, № 4. — С. 3–91. (Arutyunyan N.KH., Movchan A.B., Nazarov S.A. Povedenie reshenij zadach teorii uprugosti v neogranichennykh oblastiakh s paraboloidal'nymi i tsilindricheskimi vkluchenyami ili polostyami // Uspekhi mekhaniki. — 1987. — Т. 10, № 4. — С. 3–91.)
3. **Валов Г.М.** Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, вып. 4. — С. 650–667. (Valov G.M. Ob osesimmetrichnoj deformatsii sploshnogo krugovogo tsilindra konechnoj dliny // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1962. — Т. 26, вып. 4. — С. 650–667.)
4. **Ванин Г.А.** Микромеханика композиционных материалов. — Киев: Наукова думка. — 1985. (Vanin G.A. Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov. — Kiev: Naukova dumka. — 1985.)

5. **Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В.** Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины // Теор. и прикладная механика. — 1989. — № 20. — С. 3–9. (Gomilko A.M., Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Odnorodnye resheniya v zadache o ravnovesii uprugogo tsilindra konechnoj dliny // Teor. i prikladnaya mekhanika. — 1989. — № 20. — S. 3–9.)
6. **Гринченко В.Т.** Осесимметричная задача теории упругости для полубесконечного кругового цилиндра // Прикладная механика. — 1965. — Т. 1, № 1. — С. 109–119. (Grinchenko V.T. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya polubeskonechnogo krugovogo tsilindra // Prikladnaya mekhanika. — 1965. — T. 1, № 1. — S. 109–119.)
7. **Гринченко В.Т.** Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины // Прикладная механика. — 1967. — Т. 3, № 8. — С. 93–103. (Grinchenko V.T. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya tolstostennogo tsilindra konechnoj dliny // Prikladnaya mekhanika. — 1967. — T. 3, № 8. — S. 93–103.)
8. **Гринченко В.Т.** Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — Киев: Наукова думка, 1978. (Grinchenko V.T. Ravnovesie i ustanovivshiesya kolebaniya uprugikh tel konechnykh razmerov. — Kiev: Naukova dumka, 1978.)
9. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. (Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyj analiz. — M.: Nauka, 1977.)
10. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982. (Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. — M.: Mir, 1982.)
11. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. — М.: Физматлит, 1963. (Lebedev N.N. Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya. — M.: Fizmatlit, 1963.)
12. **Лурье А.И.** Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. (Lur'e A.I. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti. — M.: Gostekhizdat, 1955.)
13. **Николаев А.Г., Танчик Е.А.** Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — № 6(103). — С. 32–38. (Nikolaev A.G., Tanchik E.A. Napryazhennoe sostoyanie v tsilindricheskom obraztse s dvumya parallel'nymi tsilindricheskimi voloknami // Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. — 2013. — № 6(103). — S. 32–38.)
14. **Николаев, А.Г., Проценко В.С.** Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. — Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”, 2011. (Nikolaev, A.G., Protsenko V.S. Obobshchennyj metod Fur'e v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti. — KHar'kov: Natsional'nyj aerokosmicheskij universitet im. N.E. Zhukovskogo “KHar'kovskij aviatsionnyj institut”, 2011.)
15. **Николаев А.Г.** Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Докл. НАН Украины. — 1998. — № 2. — С. 78–83. (Nikolaev A.G. Obosnovanie metoda Fur'e v osnovnykh kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya nekotorykh prostranstvennykh kanonicheskikh oblastej // Dokl. NAN Ukrainy. — 1998. — № 2. — S. 78–83.)
16. **Николаев А.Г., Танчик Е.А.** Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями // Сб. науч. тр. Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”. Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. — Харьков, 2013. — Вып. 4(76). — С. 26–35. (Nikolaev A.G., Tanchik E.A. Raspredelenie napryazhenij v tsilindricheskom obraztse materiala s dvumya parallel'nymi tsilindricheskimi polostyami // Sb. nauch. tr. Natsional'nogo aerokosmicheskogo universiteta im. N.E. Zhukovskogo “KHar'kovskij aviatsionnyj institut”. Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktsij letatel'nykh apparatov. — KHar'kov, 2013. — Vyp. 4(76). — S. 26–35.)

17. **Николаев А.Г.** Теоремы сложения решений уравнения Ламе / Харьковский авиационный институт. — Харьков, 1993. — Деп. в ГНТБ Украины от 21.06.93, № 117-Ук 93. (Nikolaev A.G. Teoremy slozheniya reshenij uravneniya Lamе / KHar'kovskij aviatsionnyj institut. — KHar'kov, 1993. — Dep. v GNTB Ukrainy ot 21.06.93, № 117-Uk 93.)
18. **Прокопов В.К.** Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра // Тр. Ленинградского политехнического института. — 1950. — № 2. — С. 286–304. (Prokorov V.K. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya izotropnogo tsilindra // Tr. Leningradskogo politekhnicheskogo instituta. — 1950. — № 2. — S. 286–304.)
19. **Токовий Ю.В.** Осесимметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми мех. і матем. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151. (Tokovuj Ju.V. Osesymetrychni napruzhennja v skinchennomu pruzhnomu cylindri pid dijeju normal'nogo tysku, rivnomirno rozpodilenogo po chastyni bichnoi' poverhni // Prykl. problemy meh. i matem. — 2010. — Vyp. 8. — S. 144–151.)
20. **Meleshko V.V., Tokovyy Yu.V.** Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. — 2013. — Vol. 78. — P. 143–166.
21. **Vihak V.M., Yasinsky A.V., Tokovyy Yu.V., and Rychahivskyy A.V.** Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behav. Mater. — 2007. — № 18. — P. 141–148.
22. **Williams D.K., Ranson W.F.** Pipe-anchor discontinuity analysis utilizing power series solutions, Bessel functions, and Fourier series // Nucl. Eng. Des. — 2003. — № 220. — P. 1–10.
23. **Zhong Z., Sun Q.P.** Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // Int. J. of Solids and Structures. — 2002. — Vol. 39, iss. 23. — P. 5753–5765.

*Поступила в редакцию 21 февраля 2014 г.*

