УДК 517.97, 539.376

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ С УЧЕТОМ НЕПОЛНОЙ ОБРАТИМОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Бормотин[*,**], Н. А. Тарануха[*]

[*] Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
681013 Комсомольск-на-Амуре, Россия
[**] Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия
E-mails: cvmi@knastu.ru, taranukha@knastu.ru

С учетом теории неполной обратимости деформаций построены функционалы прямых и обратных задач о формообразовании деталей конструкций. Приведены постановки этих задач и доказана единственность их решений. Предложен итерационный метод решения обратных задач о формообразовании деталей конструкций. С использованием метода конечных элементов получены численные решения этих задач.

Ключевые слова: обратные задачи формообразования, вариационные неравенства, единственность, теория неполной обратимости деформации ползучести, сходимость, метод конечных элементов, итерационный метод.

DOI: 10.15372/PMTF20180117

Введение. Технологические задачи формообразования крупногабаритных изделий в режиме медленного деформирования имеют большое практическое значение в современном авиастроении [1–4]. При решении этих задач необходимо учитывать процесс восстановления, или обратную ползучесть. Для определения кинематических характеристик процесса деформирования, обеспечивающих заданную остаточную кривизну детали после разгрузки, решается обратная задача формообразования [4, 5]. В данной работе используется кинетическая теория ползучести, описывающая обратимую часть деформации ползучести после разгрузки [6, 7].

1. Постановка обратной задачи. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей S. Обозначим через $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde u_1, \tilde u_2, \tilde u_3)$ векторы текущих и остаточных перемещений, причем $\boldsymbol{u} \in [W_2^1(Q)]^3$, $\tilde{\boldsymbol{u}} \in [W_2^1(\tilde Q)]^3$, $Q = V \times \{0 \leqslant t \leqslant T\}$, $\tilde Q = V \times \{0 \leqslant t \leqslant \tilde T\}$. Скалярное произведение в $L_2(S)$ имеет

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант № МК-6127.2015.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-31-60038 мол_а_дк) и в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (НИР № 9.536.2014/К (проектная часть), НИР № 909 (базовая часть)).

вид

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_S = \int\limits_S \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \, dS.$$

Соответствующая этому скалярному произведению норма имеет вид

$$\|\boldsymbol{u}\|_S = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_S} = \Big(\int\limits_S \sum_{i=1}^{3} u_i^2 \, dS \Big)^{1/2}.$$

Обратная задача формообразования формулируется с использованием метода штрафа в форме квазистатического вариационного принципа с функционалом [8, 9]

$$J(\dot{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t})) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\dot{\boldsymbol{u}}(t) - \dot{\boldsymbol{u}}^*(t)\|_S^2 + a(\dot{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) + a(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t}), \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t})) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t}) - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^*(\tilde{t})\|_S^2, \tag{1}$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_1 \to 0, \qquad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_2 \to 0,$$

где точка обозначает производную по времени; $\dot{\boldsymbol{u}}^*(t)$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^*(\tilde{t})$ — заданные текущие и остаточные скорости перемещений в моменты времени t, $\tilde{t}$ соответственно; $t \in [0, T]$ — интервал времени деформирования тела под нагрузкой; $\tilde{t} \in [0, \tilde{T}]$ — интервал времени разгрузки; в случае бесконечно малых деформаций потенциальные формы определяются в виде

$$a(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{v}}) = \int\limits_V \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\boldsymbol{u}}))}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\boldsymbol{u}})} \, \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\boldsymbol{v}}) \, dV, \qquad a(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}) = \int\limits_V \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}))}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}})} \, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}) \, dV,$$

$W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl}/2 - c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}^c_{kl}$ [10]; $W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}/2 - c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\varepsilon}^c_{kl}$ [10]; c_{ijkl} — компоненты тензора упругих констант; $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2, \qquad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i})/2, \tag{2}$$

$\dot{\varepsilon}^c_{kl}$ — компоненты скоростей деформаций ползучести; $i, j, k, l = 1, 2, 3$; запятая обозначает дифференцирование: $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Выражения для текущих и остаточных скоростей напряжений при бесконечно малых деформациях имеют вид

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl}(t) - \dot{\varepsilon}^c_{kl}(t)), \qquad \dot{\rho}_{ij}(\tilde{t}) = \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}(\tilde{t}) - \dot{\tilde{\varepsilon}}^c_{kl}(\tilde{t})).$$

Независимые скорости $\dot{\boldsymbol{u}}(t)$ и $\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t})$, обеспечивающие стационарное значение данного функционала (1), являются решением квазистатической задачи деформирования тела под нагрузкой и квазистатической задачи разгрузки. Конечное время нагружения обозначено T, время разгрузки — $\tilde{T}$, следовательно, длительность всего процесса формообразования равна $T + \tilde{T}$.

Компоненты скоростей деформации ползучести при деформировании под нагрузкой вычисляются по текущим напряжениям $\sigma_{ij}(t)$ и представляются в виде [7]

$$\dot{\varepsilon}^c_{ij}(t) = \dot{\xi}_{ij}(t) + \dot{\zeta}_{ij}(t) + \dot{\chi}_{ij}(t), \quad t \in [0, T], \qquad \xi_{ij}(0) = 0, \quad \zeta_{ij}(0) = 0, \quad \chi_{ij}(0) = 0,$$

где $\dot{\xi}_{ij}(t)$, $\dot{\zeta}_{ij}(t)$ — компоненты скорости обратимой и необратимой деформации на первой стадии ползучести; $\dot{\chi}_{ij}(t)$ — деформации на стадии установившейся ползучести.

Компоненты скоростей деформации ползучести при разгрузке в момент времени $\tilde{t} \in [0, \tilde{T}]$ определяются по формулам

$$
\begin{gathered}
\dot{\tilde{\varepsilon}}^{c}_{ij}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{\xi}}_{ij}(\tilde{t}) + \dot{\tilde{\zeta}}_{ij}(\tilde{t}) + \dot{\tilde{\chi}}_{ij}(\tilde{t}),\\
\dot{\tilde{\chi}}_{ij}(\tilde{t}) = \frac{3}{2}\, c\Big(\frac{\rho_i}{\sigma^*}\Big)^{m-1}\frac{1}{\sigma^*}\Big(\rho_{ij} - \frac{1}{3}\,\rho_{kk}\delta_{ij}\Big), \qquad \tilde{\chi}_{ij}(0) = \chi_{ij}(t),\\
\dot{\tilde{\xi}}_{ij}(\tilde{t}) = \sum_r \dot{\tilde{\xi}}^{r}_{ij}(\tilde{t}), \qquad \tilde{\xi}^{r}_{ij}(0) = \xi^{r}_{ij}(t),\\
\dot{\tilde{\xi}}^{r}_{ij}(\tilde{t}) = \lambda_r\Big[a_r\Big(\frac{\rho_i}{\sigma^*}\Big)^{n-1}\frac{1}{\sigma^*}\,[(1+\mu'_r)\rho_{ij} - \mu'_r\rho_{kk}\delta_{ij}] - \tilde{\xi}^{r}_{ij}(\tilde{t})\Big], \qquad (3)\\
\dot{\tilde{\zeta}}_{p}(\tilde{t}) = \sum_r \dot{\tilde{\zeta}}^{r}_{p}(\tilde{t}), \qquad \tilde{\zeta}^{r}_{p}(0) = \zeta^{r}_{p}(t),\\
\dot{\tilde{\zeta}}^{r}_{p}(\tilde{t}) = (1+\mu''_r)\dot{\tilde{\beta}}^{r}_{p}(\tilde{t}) - \mu''_r(\dot{\tilde{\beta}}^{r}_{1}(\tilde{t}) + \dot{\tilde{\beta}}^{r}_{2}(\tilde{t}) + \dot{\tilde{\beta}}^{r}_{3}(\tilde{t})),\\
\dot{\tilde{\beta}}^{r}_{p}(\tilde{t}) = \begin{cases} \lambda_r\Big[b_r\Big(\dfrac{\rho_i}{\sigma^*}\Big)^{n-1}\dfrac{\rho_p}{\sigma^*} - \tilde{\beta}^{r}_{p}(\tilde{t})\Big], & \Big[b_r\Big(\dfrac{\rho_i}{\sigma^*}\Big)^{n-1}\dfrac{\rho_p}{\sigma^*} - \tilde{\beta}^{r}_{p}(\tilde{t})\Big]\rho_p > 0,\\[2ex] 0, & \Big[b_r\Big(\dfrac{\rho_i}{\sigma^*}\Big)^{n-1}\dfrac{\rho_p}{\sigma^*} - \tilde{\beta}^{r}_{p}(\tilde{t})\Big]\rho_p \leqslant 0. \end{cases}
\end{gathered}
$$

Здесь ρ_i — интенсивность тензора напряжений; r, λ_r, a_r, b_r, c, n, m, σ^* — константы модели, с помощью которых описываются первая и вторая стадии ползучести материала и стадия ползучести после разгрузки; μ'_r, μ''_r — коэффициенты Пуассона для обратимой и необратимой компонент деформаций ползучести; $\tilde{\beta}^{r}_{p}$ — активные вязкопластические деформации. Расчет вязкопластической деформации $\dot{\tilde{\zeta}}_{ij}(t)$ осуществляется в главных осях. Соотношения (3) для текущих напряжений при нулевых начальных значениях являются компонентами деформаций $\dot{\varepsilon}^{c}_{ij}(t)$.

Пусть $\dot{\sigma}^{d}_{ij}$ — разности остаточных и текущих скоростей напряжений, представляющие собой компоненты скоростей напряжений неупругого деформирования:

$$
\dot{\rho}_{ij}(\tilde{t}) - \dot{\sigma}_{ij}(t) = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}^{d}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{c}_{kl}(t) - \dot{\tilde{\varepsilon}}^{c}_{kl}(\tilde{t})) = c_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} = \dot{\sigma}^{d}_{ij}.
$$

Здесь $\dot{\varepsilon}^{d}_{kl} = \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}(\tilde{t}) - \dot{\varepsilon}_{kl}(t)$.

Поскольку $\dot{\varepsilon}_{kl}(t)$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}(\tilde{t})$ удовлетворяют условиям совместности деформаций и одним и тем же граничным условиям, их разность $\dot{\varepsilon}^{d}_{kl}$ также удовлетворяет условиям совместности. Согласно закону Гука скоростям напряжений $\dot{\sigma}^{d}_{ij}$ соответствуют упругие скорости деформаций $\dot{\varepsilon}^{e}_{kl}$, которые необязательно удовлетворяют условиям совместности.

Вариационный принцип задачи разгрузки можно представить в виде (учитываются уравнения равновесия $\dot{\rho}_{ij,j} = 0$ в области V и граничные условия $\dot{\rho}_{ij}n_j = 0$ на поверхности S) [8, 9]

$$
\int\limits_V \dot{\rho}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\,dV = \int\limits_V (\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^{d}_{ij})\,\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\,dV = \int\limits_S \dot{\sigma}_{ij}n_j\,\delta\dot{\tilde{u}}_i\,dS + \int\limits_V \dot{\sigma}^{d}_{ij}\,\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\,dV = 0. \qquad (4)
$$

Однако в работах [8, 9] учитывалась только упругая разгрузка, что соответствует значению $\tilde{t} = 0$ в (4). В данном случае в (4) используются скорости напряжений и деформаций в различные моменты времени. Из единственности решения (4) следует однозначная зависимость между путями деформирования при нагружении и разгрузке.

Таким образом, если принять зависимости

$$\dot\rho_{ij} = \dot\sigma_{ij} + \dot\sigma^d_{ij}, \qquad \dot\sigma^d_{ij} = \frac{\partial W^d(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\tilde\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde\varepsilon}_{kl}(\tilde t) - \dot\varepsilon_{kl}(t) + \dot\varepsilon^c_{kl}(t) - \dot{\tilde\varepsilon}^c_{kl}(\tilde t)),$$

где $W^d(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}) = c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\dot{\tilde\varepsilon}_{kl}/2 - c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\dot\varepsilon_{kl} + c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}(\dot\varepsilon^c_{kl} - \dot{\tilde\varepsilon}^c_{kl})$, то в случае бесконечно малых деформаций достаточными условиями единственности [10, 11] решения задач деформирования с введенными потенциалами будут условия

$$\int\limits_V \Delta\Big(\frac{\partial W(\dot\varepsilon_{ij})}{\partial\dot\varepsilon_{ij}}\Big)\,\Delta\dot\varepsilon_{ij}\,dV > 0, \qquad \int\limits_V \Delta\Big(\frac{\partial W(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}}\Big)\,\Delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0,$$
$$\int\limits_V \Delta\Big(\frac{\partial W^d(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}}\Big)\,\Delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0 \qquad (5)$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения Коши (2)), принимающих заданные значения на границе. В (5) Δ означает разность соответствующих величин для двух различных деформированных состояний.

Так как в (1) условия для скорости перемещений учитываются с помощью штрафных коэффициентов, то в вариационном принципе кинематически допустимым полем скоростей перемещений является поле скоростей перемещений, удовлетворяющее условиям закрепления. Условия, исключающие жесткое перемещение тела, в задачах деформирования и разгрузки должны быть одинаковыми. Под произвольным полем скоростей перемещений будем понимать скорости перемещений, удовлетворяющие данным условиям. С учетом условий (5) функционал (1) является выпуклым [10, 11] и обратная задача формообразования может быть представлена в виде неравенства

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\,(\dot{\boldsymbol u} - \dot{\boldsymbol u}^*, \dot{\boldsymbol v} - \dot{\boldsymbol u})_S + a(\dot{\boldsymbol u}, \dot{\boldsymbol v} - \dot{\boldsymbol u}) + a(\dot{\tilde{\boldsymbol u}}, \dot{\tilde{\boldsymbol v}} - \dot{\tilde{\boldsymbol u}}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\dot{\tilde{\boldsymbol u}} - \dot{\tilde{\boldsymbol u}}^*, \dot{\tilde{\boldsymbol v}} - \dot{\tilde{\boldsymbol u}})_S \geqslant 0 \quad \forall\dot{\boldsymbol v},\ \forall\dot{\tilde{\boldsymbol v}}. \qquad (6)$$

На примере одноосного растяжения стержня рассмотрим возможность разделения процессов деформирования. Уравнения для обратимых деформаций при деформировании под нагрузкой при $t \in [0, T]$ ($\sigma(t) \ne 0$) записываются в виде [7]

$$\dot\eta(t) = \lambda[a\sigma(t) - \eta(t)], \qquad \eta(0) = 0.$$

С учетом нулевых начальных условий решение неоднородного дифференциального уравнения при $t \in [0, T]$ имеет вид

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \lambda a\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\,\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Уравнения для обратимых деформаций при разгрузке при $\tilde t \in [0, \tilde T]$ ($\rho(\tilde t) = 0$) принимают вид

$$\dot{\tilde\eta}(\tilde t) = \lambda[a\rho(\tilde t) - \tilde\eta(\tilde t)], \qquad \tilde\eta(0) = \eta(t).$$

С учетом $\rho(\tilde t) = 0$ решение имеет вид

$$\tilde\eta(\tilde t) = \int\limits_0^t \lambda a\,\mathrm{e}^{-\lambda(t+\tilde t-\tau)}\,\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, полная функция наследственной деформации на всем промежутке времени $t \in [0, T + \tilde{T}]$ может быть записана в виде

$$\eta(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \lambda a\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \sigma(\tau)\, d\tau, & t \in [0, T], \\ \int\limits_0^T \lambda a\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \sigma(\tau)\, d\tau, & t \in (T, T + \tilde{T}]. \end{cases}$$

Остальные (необратимые) компоненты деформаций ползучести для данной задачи в силу разделения процессов при разгрузке равны значениям деформации, накопленным на интервале времени, когда тело находилось под нагрузкой.

Теорема. *Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования и разгрузки. Тогда решение прямой и обратной задач формообразования является единственным.*

Доказательство. Пусть имеется два решения задачи формообразования $\dot{u}_{1i}$, $\dot{\tilde{u}}_{1i}$ и $\dot{u}_{2i}$, $\dot{\tilde{u}}_{2i}$ в области V. Для прямой задачи на поверхности S выполняются равенства $\dot{u}_{2i} - \dot{u}_{1i} = \Delta \dot{u}_i = 0$, для обратной — $\dot{\tilde{u}}_{2i} - \dot{\tilde{u}}_{1i} = \Delta \dot{\tilde{u}}_i = 0$. Для каждого решения выполняется неравенство (6). Полагая в неравенстве (6) $\dot{v}_i = \dot{u}_{1i} - \Delta \dot{u}_i^d$, $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}_{1i} + \Delta \dot{u}_i^d$ и $\dot{v}_i = \dot{u}_{2i} + \Delta \dot{u}_i^d$, $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}_{2i} - \Delta \dot{u}_i^d$ и складывая соответствующие неравенства, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\, (\Delta \dot{\boldsymbol{u}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S + a(\Delta \dot{\boldsymbol{u}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d) - a(\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d) - \frac{1}{\varepsilon_2}\, (\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S \geqslant 0.$$

Рассмотрим разность

$$a(\Delta \dot{\boldsymbol{u}}(t), \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d) - a(\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t}), \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d) = -\int\limits_V \Delta \dot{\sigma}_{ij}^d\, \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^d\, dV.$$

Так как

$$\int\limits_V \Delta \dot{\sigma}_{ij}^d\, \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^d\, dV = \int\limits_V (\Delta \dot{\sigma}_{ij}\, \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \Delta \dot{\sigma}_{ij}^d \Delta \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} - \Delta \dot{\rho}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij})\, dV \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_V \Delta \dot{\rho}_{ij}\, \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}\, dV = \int\limits_V \Delta \dot{\rho}_{ij,j}\, \Delta \dot{u}_i\, dV - \int\limits_S \Delta \dot{\rho}_{ij} n_j\, \Delta \dot{u}_i\, dS = 0,$$

то

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\, (\Delta \dot{\boldsymbol{u}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S - \frac{1}{\varepsilon_2}\, (\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}, \Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S \geqslant 0.$$

Для прямой задачи $\Delta \dot{\boldsymbol{u}} = 0$ на поверхности S, тогда $\Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d = \Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}$ на поверхности S, следовательно, $0 \geqslant \|\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}\|_S^2 \geqslant 0$ или $\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}} = 0$ на поверхности S. Для обратной задачи $\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}} = 0$ на поверхности S, тогда $\Delta \dot{\boldsymbol{u}}^d = -\Delta \dot{\boldsymbol{u}}$ на поверхности S, следовательно, $0 \geqslant \|\Delta \dot{\boldsymbol{u}}\|_S^2 \geqslant 0$ или $\Delta \dot{\boldsymbol{u}} = 0$ на поверхности S. Теорема доказана.

В работах [8, 9] с учетом ограничения методом штрафа и с использованием управления с помощью обратных связей построена процедура решения обратных задач

$$A_1^k(\dot{\boldsymbol{u}}^{k+1} - \dot{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}^{k+1})_S + a(\dot{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}^{k+1}) + a(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \tilde{\boldsymbol{v}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^*) + \\ + A_2^k(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^* - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \tilde{\boldsymbol{v}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^*)_S \geqslant 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{v}}, \forall \dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}, \qquad (7)$$

где $A_1^k > 0$, $A_2^k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots,\ \lim\limits_{k \to \infty} A_1^k = \infty,\ \lim\limits_{k \to \infty} A_2^k = \infty$).

Лемма. *Пусть* $\dot{\boldsymbol{u}}^k$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k$ — *решения задачи деформирования с заданными на поверхности* S *граничными условиями и задачи разгрузки. Тогда итерационный процесс* (7) *решения обратной задачи формообразования на* S *представляется в виде*

$$\dot{u}_i^{k+1}(t) = \dot{u}_i^k(t) + \alpha^k(\dot{\tilde{u}}_i^*(\tilde{t}) - \dot{\tilde{u}}_i^k(\tilde{t})), \qquad \alpha^k = A_2^k/A_1^k. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть в (7) $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{\tilde{u}}_i^k$, $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^* + \dot{u}_i^k - \dot{\tilde{u}}_i^k$. Тогда

$$A_1^k(\dot{\boldsymbol{u}}^{k+1} - \dot{\boldsymbol{u}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S + a(\dot{\boldsymbol{u}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d) - a(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d) - A_2^k(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^* - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S \geqslant 0, \tag{9}$$

где $\dot{u}_i^d = \dot{\tilde{u}}_i^k - \dot{u}_i^k$.

Поскольку

$$a(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d) - a(\dot{\boldsymbol{u}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d) = \int\limits_V \dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij}^d \, dV = \int\limits_V (\dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\rho}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}) \, dV \geqslant 0,$$

неравенство (9) принимает вид

$$(\dot{\boldsymbol{u}}^{k+1} - \dot{\boldsymbol{u}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S - (A_2^k/A_1^k)(\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^* - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^k, \dot{\boldsymbol{u}}^d)_S \geqslant 0.$$

Данное неравенство определяет операцию проектирования [12], поэтому

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k(\dot{\tilde{u}}_i^* - \dot{\tilde{u}}_i^k), \qquad \alpha^k = A_2^k/A_1^k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Сходимость данного итерационного метода в $L_2(S)$ при $0 < \alpha^k < 2$ доказывается аналогично тому, как это сделано в [8, 9]. Из [9] следует, что данные задачи могут быть обобщены на случай геометрической нелинейности, а именно представлены в общей лагранжевой формулировке.

При доказательстве приведенных выше теоремы и леммы предполагалось, что выполняются неравенства $\int\limits_V \dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij}^d \, dV \geqslant 0$ и $\int\limits_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}^d \, \Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^d \, dV \geqslant 0$. Нетрудно показать справедливость данных неравенств в одномерных задачах, в частности в задаче одноосного растяжения и чистого изгиба стержня при напряжении и скорости напряжения, имеющих один и тот же знак.

2. Результаты численного решения. Применяя метод конечных элементов для решения вариационных задач [10], построенных с использованием функционала (1), при условии независимости функций $\dot{\boldsymbol{u}}(t)$ и $\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(\tilde{t})$ можно получить систему алгебраических уравнений задачи о деформировании тела при нагружении и систему алгебраических уравнений задачи о деформировании тела при разгрузке:

$$K\dot{\boldsymbol{U}} = \dot{\boldsymbol{R}}, \qquad \tilde{K}\dot{\hat{\boldsymbol{U}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{R}}}(\dot{\boldsymbol{U}}).$$

Здесь K, $\tilde{K}$ — симметричные матрицы касательной жесткости, определенные в моменты t, $\tilde{t}$ соответственно; $\dot{\boldsymbol{R}}$ — вектор скоростей внутренних и внешних сил; $\dot{\hat{\boldsymbol{R}}}$ — вектор скоростей сил, обусловленных начальными деформациями и начальными напряжениями.

Ниже приводятся результаты решения двух задач. В результате решения первой задачи по заданным перемещениям определяются распределения в теле напряжений и деформаций. В результате решения второй задачи определяются перемещения $\hat{\boldsymbol{U}}$, полученные при разгрузке. Затем вычисляются остаточные перемещения $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} + \hat{\boldsymbol{U}}$.

С использованием уравнения (8) для любых заданных остаточных скоростей перемещений в некоторый момент разгрузки $\tilde{t}$ можно определить скорости текущих перемещений

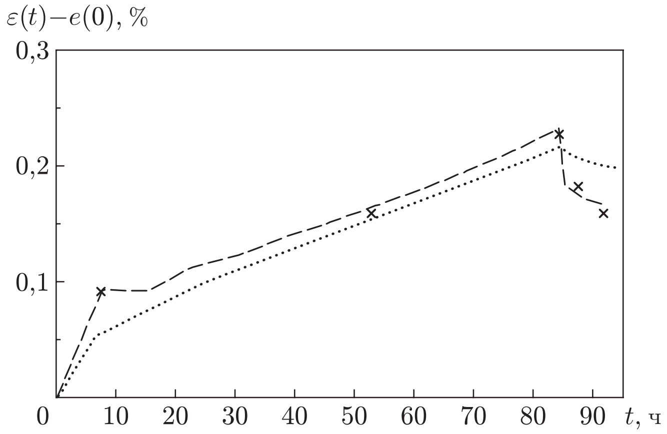

Рис. 1. Кривые деформаций ползучести:
пунктирная линия — зависимость, полученная при решении задачи с использованием формул (3) (константы материала см. в [7]), штриховая — зависимость, полученная с учетом повреждаемости материала [7], точки — экспериментальные данные [7]

в некоторый момент нагружения t. Таким образом, при выполнении достаточных условий единственности решения путь деформирования при нагружении однозначно определяет путь деформирования при разгрузке. Уравнение (8) можно проинтегрировать, если продолжить функции $\dot{u}_i^k(t)$, $\dot{\tilde{u}}_i^k(t)$:

$$\dot{u}_i^k(t) = \begin{cases} \dot{u}_i^k(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \in (T, T + \tilde{T}], \end{cases} \qquad \dot{\tilde{u}}_i^k(t) = \begin{cases} \dot{\tilde{u}}_i^k(0), & t \in [0, T], \\ \dot{\tilde{u}}_i^k(t), & t \in (T, T + \tilde{T}] \end{cases}$$

($\dot{\tilde{u}}_i^k(0)$ — скорости остаточных перемещений при мгновенной упругой разгрузке). Интегрируя уравнение (8) на интервале $[0, T + \tilde{T}]$, получаем $u_i^{k+1}(T) = u_i^k(T) + \alpha^k(\tilde{u}_i^*(T + \tilde{T}) - \tilde{u}_i^k(T + \tilde{T}))$.

На рис. 1 приведены зависимости $\varepsilon(t)$–$e(0)$ ($\varepsilon(t)$ — полная деформация; $e(0)$ — упругая деформация в начальный момент времени) для случая одноосного растяжения стержня из материала ЭИ698 при температуре $T = 750$ °C.

С использованием итерационного метода решена также задача об определении упреждающей формы, обеспечивающей заданную кривизну, после разгрузки квадратной пластины толщиной h (длина стороны квадрата равна a) из материала ЭИ698 при температуре $T = 750$ °C. Рассматривается упреждающая форма пластины, моделирующая ее кручение [13].

Сначала решается задача о кручении пластины. Определенный в результате решения этой задачи прогиб $\tilde{\boldsymbol{u}}(T + \tilde{T})$ используется в качестве начальной итерации $\boldsymbol{u}^0(T) = \tilde{\boldsymbol{u}}(T + \tilde{T})$. Перемещения в кинематической задаче на любой итерации принимаются в виде $\boldsymbol{u}^k(t) = t\boldsymbol{u}^k(T)$, $t \in [0, T]$. Время деформирования пластины с заданными перемещениями равно 30 ч, время разгрузки — 10 ч.

На рис. 2 приведена зависимость среднеквадратичной ошибки $e = e_i/e_1$ от числа итераций при различных значениях параметра α ($e_i = \Big(\sum\limits_S (\tilde{\boldsymbol{w}}^i - \tilde{\boldsymbol{w}}^0)^2\Big)^{1/2}$; S — нижняя поверхность пластины; i — номер итерации; $\tilde{\boldsymbol{w}}^i$, $\tilde{\boldsymbol{w}}^0$ — векторы узловых параметров, описывающих функции прогиба на i-м приближении и заданного прогиба).

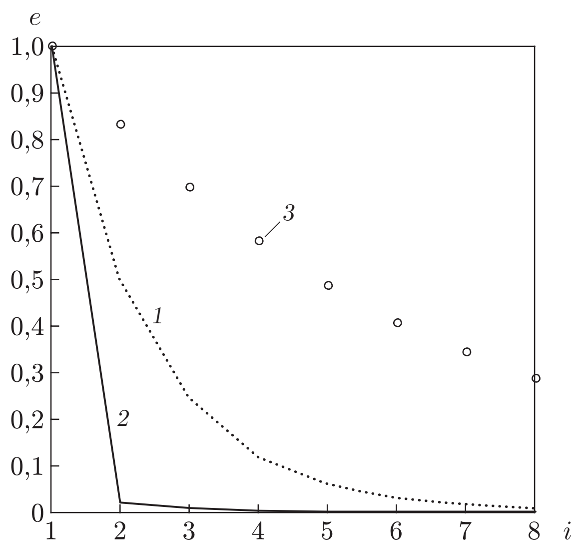

Рис. 2

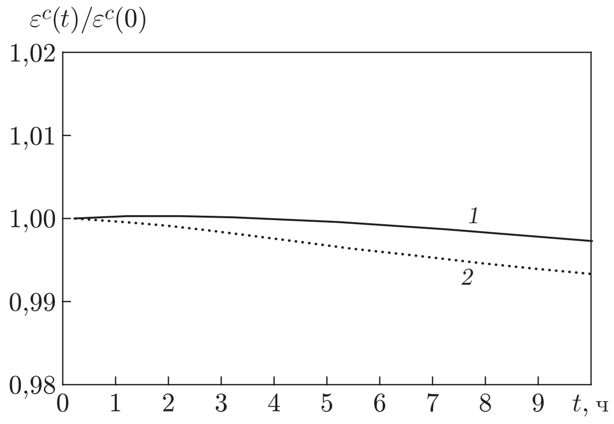

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной ошибки от числа итераций при различных значениях параметра α:
1 — $\alpha = 0{,}5$, *2* — $\alpha = 1{,}0$, *3* — $\alpha = 1{,}8$

Рис. 3. Зависимости обратной ползучести от времени в узлах, в которых достигается максимальное значение деформации:
1 — пластина из материала ЭИ698 ($T = 750$ °C), *2* — пластина из материала АК4 ($T = 250$ °C)

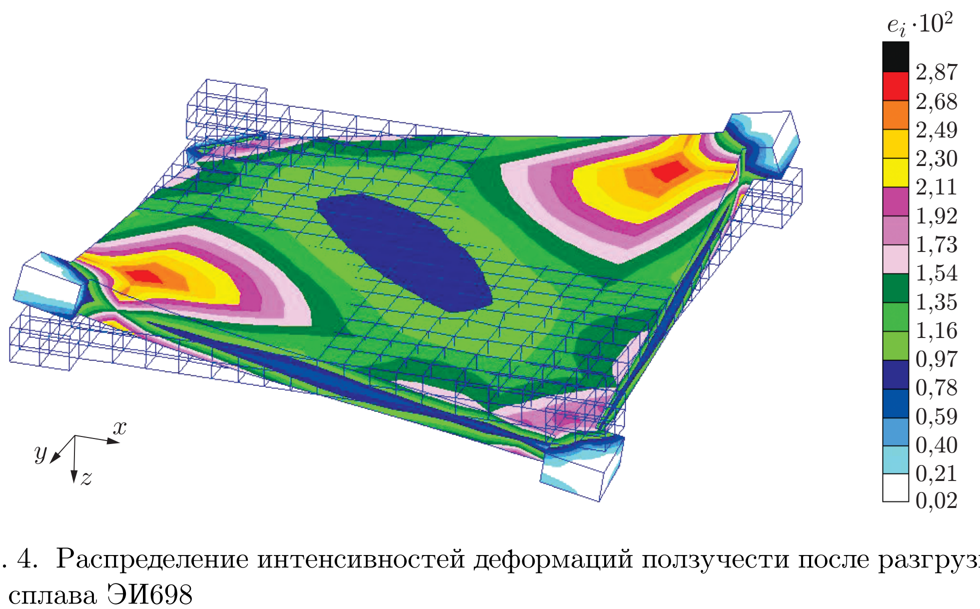

Рис. 4. Распределение интенсивностей деформаций ползучести после разгрузки для сплава ЭИ698

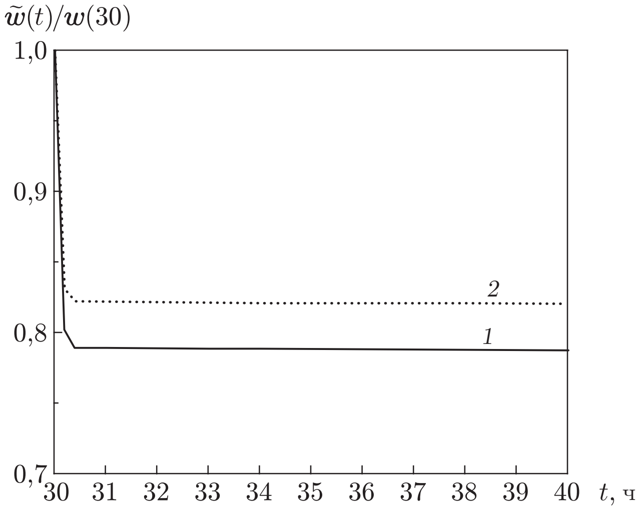

Рис. 5. Зависимость остаточного прогиба от времени в узле, расположенном в угле пластины:
1 — пластина из материала ЭИ698 ($T = 750$ °C), *2* — пластина из материала АК4 ($T = 250$ °C)

На рис. 3 представлена зависимость обратной ползучести от времени (сплошная кривая) в узлах, в которых достигается максимальное значение деформации, для пластины из материала ЭИ698 при температуре $T = 750$ °C, а также аналогичная зависимость для пластины из материала АК4 при температуре $T = 250$ °C (пунктирная кривая). Узлы, в которых достигаются максимальные значения деформаций, расположены на диагонали поверхности пластины на расстоянии 44 мм от углов пластины (рис. 4).

На рис. 5 приведены зависимости остаточного прогиба от времени в узле, расположенном в угле пластины.

В работе с использованием теории неполной обратимости деформаций ползучести сформулированы обратные задачи формообразования, разработан итерационный метод решения и приведены численные решения задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adachi T., Kimura S., Nagayama T., et al.** Age forming technology for aircraft wing skin // Materials Forum. 2004. V. 28. P. 202–207.
2. **Lihua Z., Jianguo L., Minghui H.** Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // Adv. Sci. Lett. 2013. V. 19, N 1. P. 75–79.
3. **Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С.** Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
4. **Олейников А. И., Бормотин К. С.** Моделирование формообразования крыловых панелей в режиме ползучести с деформационным старением в решениях обратных задач // Учен. зап. Комс.-на-Амуре гос. техн. ун-та. 2015. № II-1. С. 5–12.
5. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
6. **Самарин Ю. П.** Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Куйбышев. гос. ун-т, 1979.
7. **Радченко В. П.** Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин. М.: Машиностроение-1, 2005.

8. **Бормотин К. С.** Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычисл. методы и программирование. 2013. Т. 14, разд. 1. С. 141–148.
9. **Бормотин К. С.** Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 12. С. 145–153.
10. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. **Hill R.** On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. V. 5, N 4. P. 229–241.
12. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
13. **Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С.** Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365.

Поступила в редакцию 18/VIII 2016 г.,
в окончательном варианте — 15/XI 2016 г.