

УДК 532.61.096

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОЙ СИСТЕМЕ В КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Е. П. Магденко

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, 660041 Красноярск, Россия
E-mail: magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Рассматривается цилиндрический контейнер конечных размеров, заполненный двумя покоящимися несмешиваемыми теплопроводящими жидкостями с общей плоской поверхностью раздела. Боковые стенки и основания сосуда являются твердыми, внешние силы отсутствуют, угол контакта поверхности раздела с боковой стенкой контейнера равен $\pi/2$. Граница раздела обладает поверхностным натяжением, сила которого линейно зависит от температуры. При нагреве одного из оснований контейнера до критической температуры внутри сосуда возникает движение. При моделировании учитывается энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности раздела. Для решения возникающей спектральной задачи используется модифицированный метод Галеркина. Для различных жидкостей в случае монотонных возмущений получена зависимость критического числа Марангони от размеров контейнера и отношения температур, задаваемых на основаниях цилиндра, а также построено поле скоростей возмущенного движения.

Ключевые слова: конвекция, поверхность раздела, тау-метод, число Марангони.

DOI: 10.15372/PMTF20190507

Введение. В условиях, когда неравномерно нагретая жидкость со свободной поверхностью находится в состоянии, близком к невесомости, существенное влияние на устойчивость ее равновесия и движения оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и обусловленный ею термокапиллярный эффект. В опубликованной в 1958 г. первой в этом направлении теоретической работе Дж. Пирсона [1] исследовался механизм неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной границей в отсутствие массовых сил. В этой работе в предположении, что свободная поверхность недеформируема, получен важный результат: наличие только термокапиллярных сил может приводить к возникновению движения в жидкости. В работе [2] рассматривалась концентрационная неустойчивость на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей. Так как уравнение диффузии аналогично уравнению теплопроводности, а зависимость коэффициента поверхностного натяжения от концентрации примеси имеет такой же характер, как его зависимость от температуры, то задача [2] близка к задаче Пирсона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00229).

© Магденко Е. П., 2019

С развитием технологий появились новые задачи, в которых необходимо учитывать термокапиллярный эффект в земных условиях, например при лазерном отжиге полупроводников [3] или при лазерной обработке материалов с плавлением, применяемой для легирования поверхностного слоя металла [4]. При исследовании устойчивости равновесного состояния неравномерно нагретой жидкости широко используется “принцип монотонности возмущений” [5], или “принцип смены устойчивости” [6], заключающийся в том, что рассматриваются только монотонно возрастающие или убывающие со временем возмущения и не рассматриваются осциллирующие. При этом находится зависимость какого-либо одного определяющего параметра, обычно числа Марангони, от других параметров для нейтрального состояния устойчивости. Вместе с тем монотонные возмущения играют главную роль не только в случае однородной жидкости. Например, при исследовании устойчивости системы двух жидкостей конечной толщины с внутренней недеформируемой границей раздела колебательная неустойчивость обнаружена только в системе трансформаторное масло — муравьиная кислота [7].

Таким образом, изучение только монотонных возмущений имеет большое практическое значение. Данный подход позволяет, не решая задачу на собственные значения, исследовать устойчивость равновесия в случае недеформируемой свободной поверхности. Кроме того, полученные аналитические зависимости позволяют провести апробацию численных методов, а также дают некоторое начальное приближение для решения полной задачи.

1. Состояние механического равновесия. Рассматривается цилиндрический контейнер конечных размеров, заполненный двумя несмешивающимися теплопроводящими жидкостями с общей поверхностью раздела (рис. 1), боковые стенки и основания сосуда являются твердыми. Обозначим через $\Omega_1 = (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-h_1, 0)$, $\Omega_2 = (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, h_2)$ области, которые занимают соответственно первая и вторая жидкости (R, h_1, h_2 — радиус цилиндра и толщины слоев соответственно), через ρ_j, μ_j, χ_j ($j = 1, 2$) — плотности, динамические вязкости, температуропроводности жидкостей соответственно. Далее будем полагать, что эти параметры являются положительными постоянными. В отсутствие внешних сил и внутренних источников тепла движение жидкостей в цилиндрической системе координат описывается системой уравнений

$$\rho_j(\mathbf{u}_{jt} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla \mathbf{u}_j)\mathbf{u}_j) = -\nabla p_j + \mu_j \Delta \mathbf{u}_j; \tag{1.1}$$

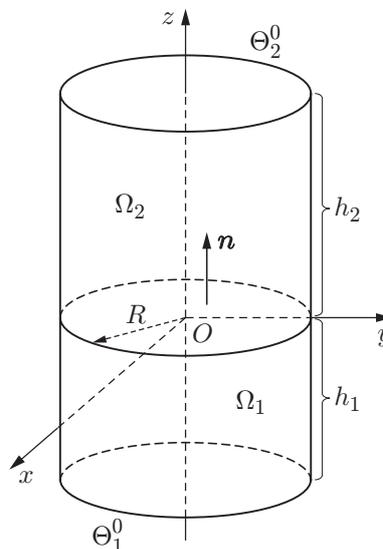


Рис. 1. Область решения задачи

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0; \quad (1.2)$$

$$\Theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \Theta_j = \chi_j \Delta \Theta_j. \quad (1.3)$$

Обозначим через Γ поверхность раздела жидкостей ($z = 0$). Предположим, что средняя кривизна границы раздела равна нулю, коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \varkappa \Theta$ ($\varkappa > 0$ — коэффициент линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры). Угол контакта поверхности раздела с боковой стенкой контейнера равен $\pi/2$. Тогда на поверхности Γ выполняются следующие условия:

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = \nabla_{11}\sigma; \quad (1.4)$$

$$k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} - k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \varkappa \Theta \nabla_{11} \cdot \mathbf{u}; \quad (1.5)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_n. \quad (1.6)$$

Здесь $P_j = -p_j e + 2\rho_j \nu_j D_j$ — тензоры напряжений; ν_j — кинематические вязкости жидкостей; e — единичный тензор; D_j — тензор скоростей деформаций, соответствующий векторному полю \mathbf{u}_j ; $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ — поверхностный градиент; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности Γ , направленный из Ω_1 в Ω_2 ; k_j — теплопроводности жидкостей; \mathbf{u} — вектор скорости обеих жидкостей на поверхности Γ ; V_n — скорость перемещения поверхности раздела Γ в направлении \mathbf{n} . Условие (1.4) представляет собой динамическое условие, условие (1.5) описывает изменение потока тепла на поверхности раздела, (1.6) является условием равенства температур и скоростей и кинематическим условием. На основаниях цилиндра и боковой поверхности задаются температура и условие прилипания для функции скорости:

$$\Theta_1(r, -h_1) = \Theta_1^0(r), \quad \Theta_2(r, h_2) = \Theta_2^0(r), \quad \Theta_j(R, z) = \Theta_j^1(z); \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u}_1(r, -h_1) = 0, \quad \mathbf{u}_2(r, h_2) = 0, \quad \mathbf{u}_j(R, z) = 0. \quad (1.8)$$

Полагая, что в начальный момент времени контейнер заполнен покоящимися жидкостями, из (1.1)–(1.3) получаем

$$\mathbf{u}_j = 0, \quad p_j z = 0, \quad \Theta_j = -A_j z + B_j, \quad (1.9)$$

где $A_j = \text{const}$, $B_j = \text{const}$ — постоянные, которые с учетом (1.9) определяются из условий (1.5)–(1.7):

$$A_1 = \frac{k(1-\gamma)}{k+h} \frac{\Theta_1^0}{h_1}, \quad A_2 = \frac{1-\gamma}{k+h} \frac{\Theta_1^0}{h_1}, \quad B_j = \frac{k\gamma+h}{k+h} \Theta_1^0, \quad (1.10)$$

$k = k_2/k_1$; $h = h_2/h_1$; $\gamma = \Theta_2^0/\Theta_1^0$. Заметим, что $\gamma \neq 1$, так как в противном случае $\Theta_j = \Theta_1^0$, следовательно, поверхность раздела является изотермической.

В силу (1.9) и динамического условия (1.4), задаваемого на границе раздела, давления в слоях постоянны ($p_j = \text{const}$).

Далее одно из оснований цилиндра нагревается, и когда его температура достигает некоторого критического значения, внутри сосуда возникает конвективное движение. Вызываемое наличием градиента поверхностного натяжения движение в межфазных поверхностных слоях на границе раздела жидкость — жидкость (эффект Марангони) с точки зрения термодинамики объясняется следующим образом: течение происходит из области малых в область больших поверхностных натяжений вследствие самопроизвольного уменьшения количества свободной энергии поверхности. Как правило, неоднородность поверхностного натяжения обусловлена тем, что в разных точках межфазной поверхности

значения температуры различны. Так как в данной работе рассматриваются слои жидкостей небольшой толщины и поверхностное натяжение зависит от температуры, возникает эффект Марангони. Целью работы является определение критического значения температуры основания, при которой происходит потеря устойчивости состояния покоя. Эта температура зависит от размеров контейнера и физических параметров жидкостей.

2. Линеаризованная задача о малых возмущениях. Для определения температуры Θ_1^0 рассматривается линеаризованная в окрестности равновесного состояния (1.9), (1.10) задача о малых осесимметричных возмущениях системы в рамках модели вязкой теплопроводной жидкости. Предполагается, что в конвективном состоянии поверхность раздела образует с боковой стенкой контейнера угол контакта, равный $\pi/2$, и является недеформируемой, т. е. обладает достаточно большим поверхностным натяжением. Это означает, что число Вебера $We = \sigma_0 h_1 / (\rho_1 \nu_1^2) \gg 1$. Тогда неустойчивость возникает вследствие неоднородности распределения температуры вдоль поверхности раздела. При этом в линеаризованном в окрестности равновесного состояния условии равенства потоков тепла при $z = 0$ учитывается энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности раздела [8]. Решение задачи для монотонных возмущений будем искать в виде

$$(\mathbf{U}_j, P_j, T_j) = (\mathbf{U}_j(r, z), P_j(r, z), T_j(r, z))$$

где $P_j, T_j, \mathbf{U}_j = (U_j, W_j)$ — возмущения состояния покоя, описываемого условиями (1.4)–(1.9). В безразмерных переменных (в качестве масштабов вертикальной длины, горизонтальной длины, скорости, давления и температуры выбраны величины $h_1, h_1/\alpha, \nu_1/h_1, \rho_1 \nu_1^2/h_1^2, A_1 h_1$ соответственно, где $\alpha = h_1/R$) получаем систему уравнений

$$\alpha P_{jr} = \frac{\mu_j}{\mu_1} \left(\alpha^2 \left(U_{jrr} + \frac{1}{r} U_{jr} - \frac{1}{r^2} U_j \right) + U_{jzz} \right); \quad (2.1)$$

$$P_{jz} = \frac{\mu_j}{\mu_1} \left(\alpha^2 \left(W_{jrr} + \frac{1}{r} W_{jr} \right) + W_{jzz} \right); \quad (2.2)$$

$$\alpha \left(U_{jr} + \frac{1}{r} U_j \right) + W_{jz} = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{k_1}{k_j} W_j + \frac{\chi_j}{\chi_1 \text{Pr}} \left(\alpha^2 \left(T_{jrr} + \frac{1}{r} T_{jr} \right) + T_{jzz} \right) = 0 \quad (2.4)$$

($\text{Pr} = \nu_1/\chi_1$ — число Прандтля).

На поверхности раздела ($z = 0$) выполняются условия [8]

$$\mu(\alpha W_{2r} + U_{2z}) - (\alpha W_{1r} + U_{1z}) = -\alpha \text{Mn} T_{1r}; \quad (2.5)$$

$$kT_{2z} - T_{1z} = \alpha \Gamma_0 E (U_{1r} + U_1/r); \quad (2.6)$$

$$T_1 = T_2; \quad (2.7)$$

$$U_1 = U_2; \quad (2.8)$$

$$W_1 = W_2 = 0, \quad (2.9)$$

где $\Gamma_0 = (k\gamma + h)/k(\gamma - 1)$; $E = \nu_1/(k_1 h_1)$ — параметр, характеризующий энергию, затрачиваемую на деформацию поверхности раздела; $\text{Mn} = \nu A_1 h_1^2 / (\rho_1 \nu_1 \chi_1)$ — число Марангони. Условия (2.5)–(2.8) представляют собой линеаризованные в окрестности равновесного состояния равенства касательных напряжений, потоков тепла (в правой части (2.6) учитывается энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности раздела), температур и скоростей соответственно. Равенство (2.9) — кинематическое условие на недеформируемой поверхности раздела.

На основаниях цилиндра ($z = -1$ и $z = h$), а также на его боковой поверхности ($r = 1$) выполняются условия прилипания для скоростей и отсутствия возмущения температуры:

$$U_1(r, -1) = W_1(r, -1) = 0, \quad T_1(r, -1) = 0; \quad (2.10)$$

$$U_2(r, h) = W_2(r, h) = 0, \quad T_2(r, h) = 0; \quad (2.11)$$

$$U_j(1, z) = 0, \quad W_j(1, z) = 0, \quad T_j(1, z) = 0. \quad (2.12)$$

Кроме того, возмущения скоростей и температуры должны быть ограничены при $r = 0$.

3. Метод численного решения. Спектральная задача (2.1)–(2.12) относительно числа Марангони с условиями на поверхности раздела (2.5)–(2.9) решается с помощью модифицированного метода Галеркина — тау-метода [9], основное отличие которого от метода Галеркина заключается в том, что приближенное решение обязательно должно удовлетворять граничным условиям. Возмущения скоростей и температуры ищутся в виде разложения по базисным функциям

$$U_j = \sum_{k=1}^{n_r} \sum_{l=1}^{n_z} A_{jkl} U_{jkl}, \quad T_j = \sum_{k=1}^{n_r} \sum_{l=1}^{n_z} Q_{jkl} T_{jkl}. \quad (3.1)$$

Здесь n_r, n_z — постоянные, определяющие количество базисных функций переменных r и z соответственно; A_{jkl}, Q_{jkl} — неизвестные постоянные; $U_{jkl} = (U_{jkl}, W_{jkl}), T_{jkl}$ — базисные функции, имеющие представления

$$U_{jkl} = R_{k-1}(r) \frac{d}{dz} Z_{jl-1}(z), \quad W_{jkl} = -\frac{\alpha}{r} \frac{d}{dr} (r R_{k-1}(r)) Z_{jl-1}(z); \quad (3.2)$$

$$T_{jkl} = \bar{R}_{k-1}(r) \bar{Z}_{jl-1}(z); \quad (3.3)$$

$$R_{k-1}(r) = r^2(r-1)^2 P_{k-1}(2r-1), \quad \bar{R}_{k-1}(r) = r(r-1) P_{k-1}(2r-1); \quad (3.4)$$

$$Z_{1l-1}(z) = z(z+1)^2 P_{l-1}(2z+1), \quad Z_{2l-1}(z) = z(z/h-1)^2 P_{l-1}(2z/h-1); \quad (3.5)$$

$$\bar{Z}_{1l-1}(z) = (z+1) P_{l-1}(2z+1), \quad \bar{Z}_{2l-1}(z) = (z/h-1) P_{l-1}(2z/h-1), \quad (3.6)$$

$P_{k-1}(2r-1), P_{l-1}(2z+1), P_{l-1}(2z/h-1)$ — смещенные полиномы Лежандра $(k-1)$ -го, $(l-1)$ -го порядков, определенных на отрезках $[0, 1], [-1, 0]$ и $[0, h]$ соответственно. Представленные базисные функции удовлетворяют уравнению сохранения масс (2.3) и условиям (2.9)–(2.12).

Приближенные решения (3.1) с учетом (3.2)–(3.6) подставляются в уравнения (2.1), (2.2), (2.4)–(2.8), и вычисляется их невязка. Далее задается условие ортогональности невязки базисным функциям. В результате получается система линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_{jkl}, Q_{jkl} . Нетривиальное решение этой системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Это позволяет найти зависимость критических чисел Марангони от размеров контейнера и физических параметров жидкости. Следует отметить, что числа n_r и n_z (количество базисных функций по r и z соответственно) выбираются таким образом, что $|(Mn(n_r+n_1, n_z+n_2) - Mn(n_r, n_z)) / Mn(n_r, n_z)| \cdot 100\% \leq 0,01\%$ ($n_1 = 1, 2, \dots, n_2 = 1, 2, \dots$; $Mn(n_r, n_z)$ — критические значения числа Марангони при соответствующем числе базисных функций).

Замечание 1. Приближенные решения (3.1) с учетом (3.2)–(3.6) подставляются в уравнения (2.1), (2.2), вычисляется их невязка, задается условие ортогональности невязки базисным функциям и полученные уравнения суммируются. При интегрировании по частям и использовании граничных условий (2.10)–(2.12) градиент давления в полученном уравнении исчезает, поэтому для возмущения давления не приводится разложение по базисным функциям.

Значения числа Марангони при различных значениях n_r, n_z

$n_r \times n_z$	Mn				
	$\alpha = 1, \gamma = 0,1$	$\alpha = 1, \gamma = 0$	$\alpha = 1, \gamma = 2$	$\alpha = 0,5, \gamma = 0,1$	$\alpha = 2, \gamma = 0,1$
17 × 8	-663,987	—	—	—	—
19 × 9	-668,404	—	—	—	—
21 × 10	-669,690	-774,603	425,640	-701,890	-128,879
23 × 11	-669,752	-774,672	425,691	-701,849	-128,872
25 × 12	-669,504	—	—	—	—
$\Delta_{Mn}, \%$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$

4. Результаты численных расчетов. Рассмотрим случай, когда в сосуде находятся муравьиная кислота ($-1 \leq z \leq 0$) и трансформаторное масло ($0 \leq z \leq h$), имеющие следующие физические параметры: $\rho_1 = 1,2196 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 0,86 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu_1 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu_2 = 18,49 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi_1 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi_2 = 1,21 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $k_1 = 1,55 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}/(\text{с}^3 \cdot \text{К})$, $k_2 = 0,63519 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}/(\text{с}^3 \cdot \text{К})$, $\sigma_0 = 3,81 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$, $\varkappa = 0,0022 \text{ Н}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Толщина нижнего слоя жидкости равна $h_1 = 0,001 \text{ м}$. В таблице приведены критические значения числа Марангони при $h = 1$ и различных значениях параметров n_r, n_z . Из анализа представленных в таблице данных следует, что при $n_r \times n_z = 21 \times 10$ тау-метод начинает сходиться при различных значениях γ и α , например при $\alpha = 1, \gamma = 0,1$ $\Delta_{Mn} = |(Mn_1 - Mn_2)/Mn_1| \cdot 100 \% \leq 9,3 \cdot 10^{-3} \%$ (Mn_1 — значение числа Марангони при $n_r = 21, n_z = 10$; Mn_2 — значение Mn при $n_r = 23, n_z = 11$). Таким образом, в дальнейших расчетах выбор параметров $n_r \times n_z$ основывался на результатах, приведенных в таблице.

На рис. 2 показана нейтральная кривая 1 как функция параметра γ , представляющего собой отношение задаваемых температур на верхнем и нижнем основаниях, на рис. 3 — нейтральная кривая как функция параметра α , представляющего собой отношение толщины слоя жидкости к радиусу цилиндра. На рис. 2, 3 видно, что при $\gamma \in [0, 10], \alpha \in [0, 1, 10, 0]$ соответственно критические значения числа Марангони увеличиваются. При этом, если $\gamma > 1$, т. е. $\Theta_2^0 > \Theta_1^0$, то $Mn > 0$ (см. рис. 2). Зная критические значения числа Марангони, можно найти значение температуры на нижнем основании цилиндра, соответственно, при заданном значении параметра γ можно вычислить критическую разность температур, задаваемых на основаниях цилиндра, при которой внутри сосуда возникает движение. Следует отметить, что область между кривой и осью абсцисс представляет собой область устойчивости. Нейтральные кривые пересекают ось абсцисс в точке $\gamma = 1$, соответствующей состоянию равновесия, и поверхность раздела является изотермической.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [10] исследовалась зависимость числа Марангони от размеров контейнера и физических параметров жидкости для случая, когда на боковой поверхности цилиндра выполнялось условие просачивания жидкости:

$$U_j(1, z) \neq 0, \quad V_j(1, z) = W_j(1, z) = 0, \quad T_j(1, z) = 0.$$

При этом общий поток жидкости через боковую поверхность равен нулю. В этом случае задача решалась методом разделения переменных. В результате для осесимметричного случая, когда внешние силы отсутствуют, возмущения монотонны и поверхность раздела является недеформируемой, построена кривая 2 (см. рис. 2). На рис. 2 видно, что изменение условия на боковой поверхности цилиндра не влияет на характер зависимости числа Марангони от отношения температур, задаваемых на основаниях цилиндра, с увеличением γ значение Mn увеличивается.

Параметр E характеризует влияние процесса выделения или поглощения теплоты при локальных изменениях площади межфазной поверхности на конвективное движение

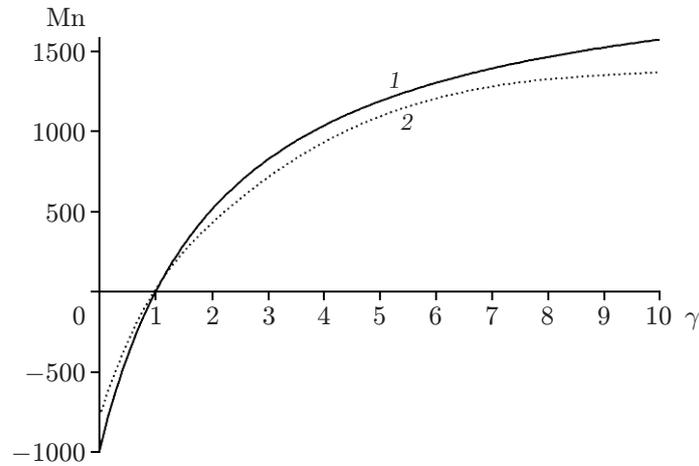


Рис. 2. Нейтральные кривые как функции параметра γ при различных значениях возмущения радиальной составляющей вектора скорости на боковой поверхности цилиндра:

1 — $U_j(1, z) = 0$, 2 — $U_j(1, z) \neq 0$

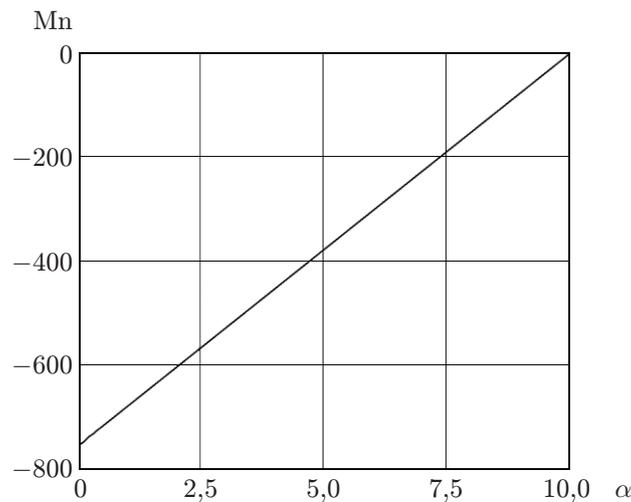


Рис. 3. Нейтральная кривая как функция параметра α

вблизи поверхности раздела. При этом значение данного параметра мало, так, для рассматриваемых жидкостей $E \approx 0,05$. Впервые влияние этого параметра исследовалось в работе [11], более подробно — в [8]. В настоящей работе установлено, что чем больше значение параметра энергии E , тем больше критическое значение числа Марангони. Так, при увеличении E в 10 раз $Mn = -6683,5$. На рис. 4 видно, что при увеличении E область возмущений, возникающих на поверхности раздела, становится больше. Так, конвективные ячейки вблизи границы (см. рис. 4,а, $E = 0$) при $E = 0,05$ (см. рис. 4,б) имеют более вытянутую форму вдоль вертикальной оси, а при $E = 0,5$ на поверхности раздела начинают формироваться вихри большего диаметра. На рис. 4,в видно, что поле скоростей становится несимметричным относительно радиуса цилиндра.

Заключение. Изучена задача о малых возмущениях равновесного состояния двух покоящихся несмешивающихся вязких теплопроводящих жидкостей в цилиндрическом контейнере при наличии плоской границы раздела, на которой коэффициент поверхностного

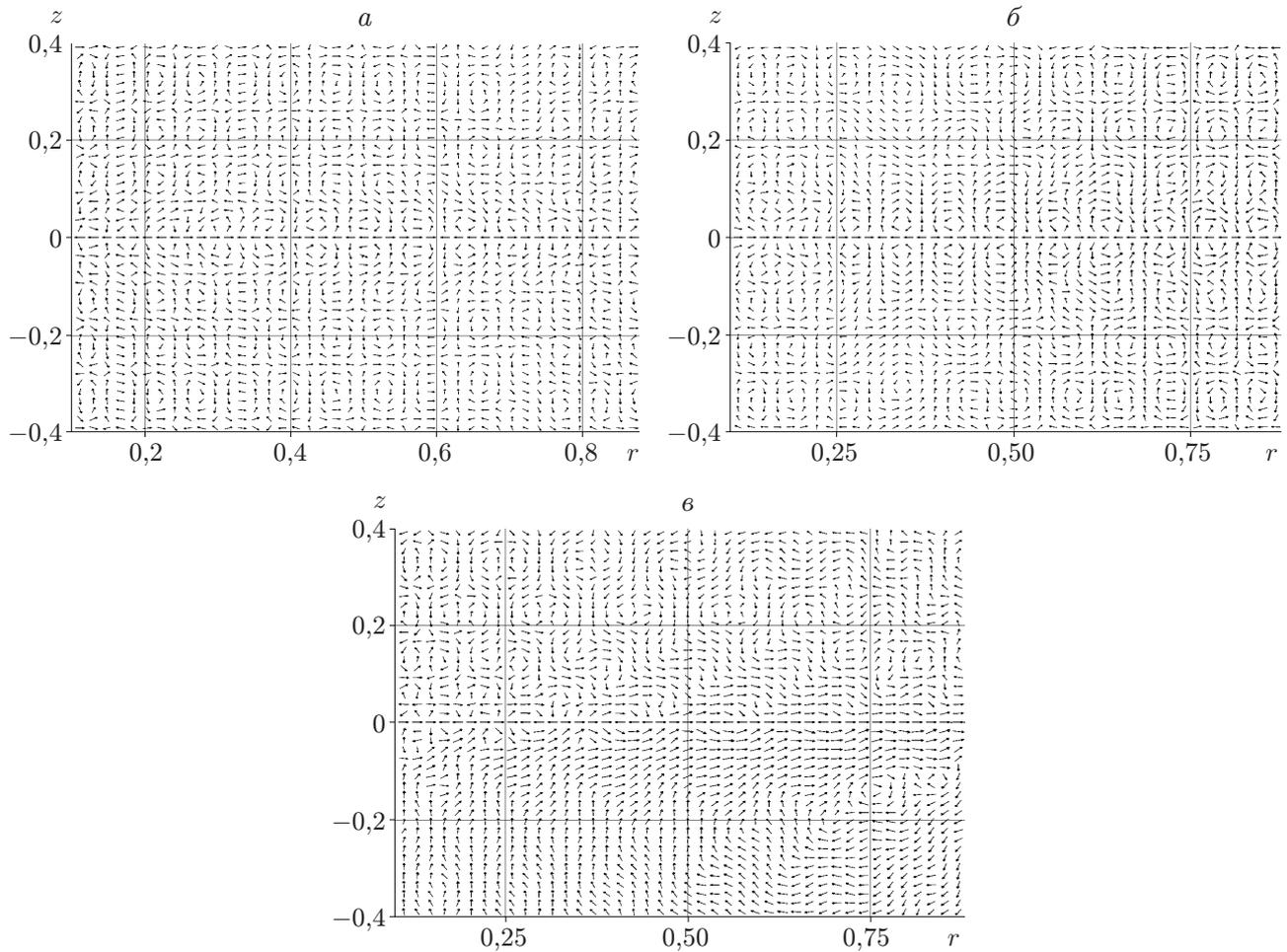


Рис. 4. Векторные поля скоростей при $Mn = -669,69$, $h = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 0,1$ и различных значениях параметра E :
 а — $E = 0$, б — $E = 0,05$, в — $E = 0,5$

натяжения линейно зависит от температуры. Для рассмотренных жидкостей (муравьиная кислота, трансформаторное масло) в случае монотонных возмущений получена зависимость числа Марангони от размеров контейнера и отношения температур, задаваемых на основаниях цилиндра. Также исследовано влияние параметра E , характеризующего процесс выделения или поглощения теплоты при локальных изменениях площади межфазной поверхности, на конвективное движение вблизи поверхности раздела и на значение числа Марангони Mn . Таким образом, зная размеры контейнера и физические параметры жидкости, можно вычислить критическую разность температур, задаваемых на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, при которой внутри сосуда возникает движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pearson J. R.** One convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489–500.
2. **Sterling C. V., Scriven L. E.** Interfacial turbulence: hydrodynamics instability and Marangoni effect // AIChE J. 1959. V. 5, N 4. P. 514–520.

3. **Хайбибулин И. Г., Штырков Е. И., Зарипов М. М.** Лазерный отжиг имплантированных полупроводников // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45, № 8. С. 1464–1473.
4. **Веденов А. А.** Физические процессы при лазерной обработке металлов / А. А. Веденов, Г. Г. Гладуш. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.
6. **Бабский В. Г.** Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. М.: Наука, 1976.
7. **Непомнящий А. А., Симановский И. Б.** О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта // ПМТФ. 1985. № 1. С. 62–65.
8. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
9. **Canuto C.** Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer, 2007.
10. **Магденко Е. П.** О потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2012. Т. 5, вып. 4. С. 558–565.
11. **Torres F. E., Helberzheimer E.** Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, N 3. P. 537–549.

*Поступила в редакцию 13/XI 2018 г.,
после доработки — 18/II 2019 г.
Принята к публикации 25/II 2019 г.*
