

УДК 536.2:532.5

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ДВОЙНАЯ СМЕШАННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА И ОТСОСА ЧЕРЕЗ ЕЕ ПОВЕРХНОСТЬ

М. Даба, П. Деварадж*

Колледж естественных наук Университета г. Джимма, Джимма, Эфиопия

* Инженерный колледж Университета Анны, 600025 Ченнай, Индия

E-mails: mitbru2007@yahoo.com, devaraj@annauniv.edu

Исследуется двойная смешанная конвекция в пограничном слое потока жидкости вдоль растягиваемой вертикальной поверхности с учетом вдува (отсоса). Система дифференциальных уравнений в частных производных с помощью соответствующего преобразования переменных сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом ячеек Келлера. Исследуется влияние различных параметров течения на скорость и температуру потока и концентрацию примеси в жидкости. Исследовано влияние ряда параметров задачи на коэффициент поверхностного трения в случаях вдува и отсоса.

Ключевые слова: смешанная конвекция, вдув и отсос, растягиваемая пластина, силы плавучести.

DOI: 10.15372/PMTF20170206

Введение. В тех случаях, когда вызывающие движение жидкости силы плавучести обусловлены наличием градиентов и температуры, и концентрации, конвекция называется двойной смешанной конвекцией. Такая конвекция возникает, например, в океане, где имеют место и градиент температуры, и градиент концентрации соли. Данные течения встречаются также в астрофизических, технологических, биологических, геологических, химических процессах [1].

Пограничный слой в ламинарном потоке жидкости на пластине впервые исследовал Г. Блазиус [2], в работе [3] полученные результаты обобщены на случай движущейся пластины. В [4] исследовано течение Блазиуса с учетом теплового излучения. В [5] с учетом теплового излучения изучено движение потока вдоль движущейся в покоящейся жидкости пластины, на поверхности которой заданы конвективные граничные условия. В [6] с использованием неявного метода конечных разностей и квазилинеаризации численно исследовано конвективное течение жидкости вдоль движущейся вертикальной пластины при наличии диффузии тепла и массы. В работе [7] выполнен анализ характеристик ламинарного пограничного слоя на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) через ее поверхность. Задача теплопереноса в случае течения жидкости вдоль растягиваемой пластины при различных значениях теплопроводности жидкости решена в [8]. В [9] исследована задача о смешанной конвекции в пограничном слое жидкости на вертикальной пластине, на поверхности которой заданы граничные условия проскальзывания для скорости

и температуры. В работе [10] решена задача магнитогидродинамики о смешанной конвекции с учетом омического тепла и вязкости жидкости, в [11] — задача о пограничном слое жидкости на растягиваемой пластине при наличии магнитного поля. В [12] исследована задача о ламинарном течении вдоль растягиваемой пластины с конвективными краевыми условиями и условиями частичного проскальзывания. В [13] решена задача о теплопереносе в пограничном слое жидкости на растягиваемой по линейному закону пластине, при этом теплопроводность полагалась переменной. В [14] аналитически изучался теплоперенос на растягиваемой поверхности при различных значениях задаваемой температуры. В [15] решена задача о смешанной конвекции в окрестности точки торможения ламинарного магнитогидродинамического потока несжимаемой вязкой жидкости вблизи вертикальной растягиваемой пластины.

Неустановившаяся конвекция в пограничном слое жидкости вблизи движущейся поверхности исследована в работе [16]. Такая же задача для растягиваемой вертикальной поверхности, находящейся в неподвижной жидкости, рассмотрена в [17], для непрерывно движущейся вертикальной пластины — в [18]. Конвекция вблизи мгновенно растягиваемой вертикальной проницаемой пластины, находящейся в безграничной неподвижной жидкости, при наличии поперечного магнитного поля исследовалась в [19] с использованием метода гомотопического анализа и численного метода ячеек Келлера. Неустановившаяся смешанная конвекция и теплоперенос в пограничном слое жидкости с изменяющимися свойствами, обусловленные растяжением вертикальной поверхности, изучались в работе [20]. Аналогичная задача для наножидкости исследована в [21]. Задача, рассмотренная в работе [20], изучалась в [22] с учетом теплового излучения, а в [23] — с учетом вязкости жидкости и ее диссипации. Во всех указанных выше работах краевые задачи для пограничного слоя рассматривались либо в случае установившегося течения жидкости с постоянными свойствами и постоянной концентрацией примеси в ней, либо в случае неустановившегося течения жидкости с изменяющимися свойствами при отсутствии в ней примесей.

В данной работе изучается неустановившаяся смешанная конвекция в пограничном слое жидкости с изменяющимися свойствами вблизи вертикальной растягиваемой пластины при наличии вдува (отсоса) через ее поверхность. Дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются с использованием метода ячеек Келлера, подробно описанного в работах [24, 25].

1. Математическая формулировка задачи. Исследуется неустановившаяся смешанная конвекция в потоке несжимаемой вязкой жидкости вдоль полубесконечной пористой растягиваемой пластины. Задача решается в декартовой системе координат, в которой ось x направлена вдоль пластины, ось y — по нормали к ней (рис. 1). Предполагается, что при $t < 0$ потоки массы и тепла являются установившимися; скорость $U_w(x, t)$, с которой растягивается пластина, температура пластины $T_w(x, t)$ и концентрация вещества на ней $C_w(x, t)$ при каждом значении времени t являются линейными функциями переменной x ; все термодинамические характеристики пластины и окружающей жидкости, за исключением теплопроводности, постоянные; жидкость имеет один и тот же коэффициент поглощения при любой длине волны, выделяет тепло, но не является рассеивающей средой. Система уравнений пограничного слоя в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm g\beta_T(T - T_\infty) \pm g\beta_C(C - C_\infty); \quad (2)$$

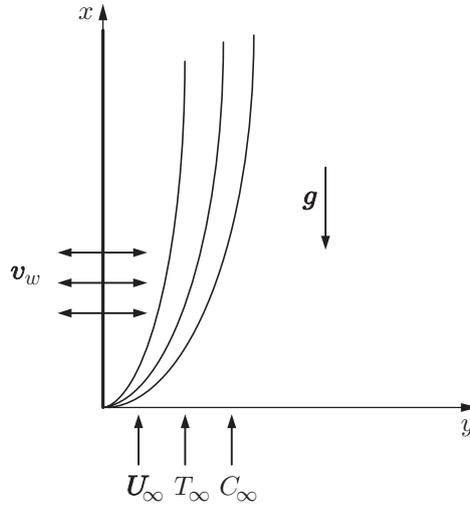


Рис. 1. Схема задачи

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial q_r}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (4)$$

граничные условия записываются в виде

$$y = 0: \quad u = U_w, \quad v = v_w(t), \quad T = T_w, \quad C = C_w, \\ y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad C \rightarrow C_\infty.$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости в направлениях x, y соответственно; $K(T) = K_\infty(1 + \varepsilon(T - T_\infty)/\Delta T)$ — теплопроводность [13]; $\Delta T = T_w - T_\infty$; T_w — температура пластины; ε — малый параметр; K_∞ — значение теплопроводности на бесконечности; ν — кинематическая вязкость; β_T, β_C — коэффициенты объемного температурного и концентрационного расширения соответственно; ρ — плотность жидкости; c_p — удельная теплоемкость; q_r — поток теплового излучения; D — коэффициент диффузии массы. Последние два слагаемых в уравнении (2) представляют собой силы плавучести. Знак “+” соответствует силе, способствующей течению, знак “−” — силе, препятствующей течению.

Следуя [13, 20, 22], определим величины

$$U_w(x, t) = \frac{ax}{1 - ct}, \quad T_w(x, t) = T_\infty + \frac{bx}{(1 - ct)^2}, \quad C_w(x, t) = C_\infty + \frac{mx}{(1 - ct)^2}$$

(a, b, c, m — константы). В приближении Росселанда [26] выражение для радиационного теплового потока записывается в виде

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y}, \quad (5)$$

где σ^*, k^* — константа Стефана — Больцмана и среднее значение коэффициента поглощения соответственно. Предполагается, что перепад температуры внутри области течения T^4 является линейной функцией. Разлагая в ряд Тейлора величину T^4 на бесконечности и пренебрегая членами более высокого порядка, получаем линейную аппроксимацию температуры

$$T^4 \simeq 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \quad (6)$$

С использованием выражения для теплопроводности $K(T)$ и аппроксимаций (5), (6) уравнение (3) приводится к виду

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\varepsilon k_\infty}{T_w - T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(K(T) + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Введем следующие преобразования подобия:

$$\eta = y \left(\frac{a}{\nu(1-ct)} \right)^{1/2}, \quad \psi(x, y, t) = \left(\frac{\nu a}{1-ct} \right)^{1/2} x f(\eta), \quad G(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

$$H(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta_T(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}, \quad \text{Gr}_* = \frac{g\beta_C(C_w - C_\infty)L^3}{\nu^2},$$

$$\lambda = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}_L^2}, \quad \lambda_1 = \frac{\text{Gr}_*}{\text{Re}_L^2}, \quad \text{Re}_L = \frac{U_w L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_\infty}, \quad \alpha_\infty = \frac{K_\infty}{\rho c_p}.$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ — функция тока ($u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$); Gr, Gr* — числа Грасгофа, зависящие от температуры и концентрации соответственно; L — длина пластины; λ , λ_1 — параметры сил плавучести, обусловленных наличием градиентов температуры и концентрации соответственно; U_w — скорость растяжения пластины; α_∞ — коэффициент тепловой диффузии. С использованием введенных преобразований подобия и выражения для теплопроводности $K(T)$ уравнения (2), (7), (4) приводятся к связанной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''' + f f'' - f'^2 - M(f' + \eta f''/2) + \lambda(G + NH) = 0,$$

$$((1 + \varepsilon G + N_r)G')' - \text{Pr}(f'G - G'f) - M \text{Pr}(2G + \eta G'/2) = 0, \quad (8)$$

$$H'' - \text{Sc}(f'H - H'f) - M \text{Sc}(2H + \eta H'/2) = 0$$

с краевыми условиями

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f(0) = s, \quad f'(0) = 1, \quad G(0) = 1, \quad H(0) = 1, \quad f' \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 0, \quad H \rightarrow 0. \quad (9)$$

В (8), (9) штрих обозначает дифференцирование по переменной η ; $M = c/a$ — параметр нестационарности течения; $N_r = 16\sigma^* T_\infty / (3K_\infty k^*)$ — параметр излучения; $s = -v_0 / \sqrt{(1-ct)/(\nu a)}$ (значения $s < 0$ соответствуют вдуву, $s > 0$ — отсосу, $s = 0$ — непроницаемой поверхности); $N = \lambda_1/\lambda$ (значение $N = 0$ соответствует отсутствию сил плавучести, обусловленных диффузией вещества, $N = \infty$ — силам плавучести, обусловленным диффузией тепла).

Наибольший интерес представляют следующие физические величины: коэффициент поверхностного трения

$$C_f = 2\tau_w / (\rho u_w^2), \quad (10)$$

локальное число Нуссельта

$$\text{Nu}_x = x q_w / (k_\infty (T_w - T_\infty)), \quad (11)$$

локальное число Шервуда

$$\text{Sh}_x = x q_m / (D(C_w - C_\infty)) \quad (12)$$

($\tau_w = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$ — поверхностное напряжение; $q_w = -k_\infty \partial T / \partial y|_{y=0}$ — поток тепла на стенке; $q_m = -k_\infty \partial T / \partial y|_{y=0}$ — поток массы на стенке; μ — динамическая вязкость).

С учетом переменных подобия уравнения (10)–(12) записываются в виде

$$C_f \sqrt{\text{Re}_x} / 2 = f''(0), \quad \text{Nu}_x / \sqrt{\text{Re}_x} = -G'(0), \quad \text{Sh}_x / \sqrt{\text{Re}_x} = -H'(0),$$

где $\text{Re}_x = U_w x / \nu$ — локальное число Рейнольдса.

2. Метод решения. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с граничными условиями (9) решалась методом ячеек Келлера [24, 25]. Программа реализована в пакете Matlab. Метод ячеек Келлера является неявным конечно-разностным методом решения дифференциальных уравнений.

Введя новые переменные $u(x, \eta)$, $v(x, \eta)$, $p(x, \eta)$, $q(x, \eta)$:

$$f' = u, \quad u' = v, \quad G' = p, \quad H' = q,$$

уравнения (8) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} v' + fv - u^2 - M(u + \eta v/2) + \lambda(G + NH) &= 0, \\ (1 + N_r + \varepsilon G)p' + \varepsilon p^2 - \text{Pr}(uG - pf) - M \text{Pr}(2G + \eta p/2) &= 0, \\ q' - \text{Sc}(uH - qf) - M \text{Sc}(2H + \eta q/2) &= 0. \end{aligned}$$

В плоскости (x, η) зададим прямоугольную сетку:

$$\begin{aligned} x^0 &= 0, & x^n &= x^{n-1} + k_n, & n &= 1, 2, \dots, N, \\ \eta_0 &= 0, & \eta_j &= \eta_{j-1} + h_j, & j &= 1, 2, \dots, J \end{aligned}$$

(k_n, h_j — расстояния между узлами в направлениях x, η соответственно). С использованием центральных разностей запишем конечно-разностные уравнения для узла $(x^n, \eta_{j-1/2})$:

$$\begin{aligned} (f_j - f_{j-1})h_j^{-1} &= u_{j-1/2}, & (u_j - u_{j-1})h_j^{-1} &= v_{j-1/2}, \\ (G_j - G_{j-1})h_j^{-1} &= p_{j-1/2}, & (H_j - H_{j-1})h_j^{-1} &= q_{j-1/2}, \\ (v_j - v_{j-1})h_j^{-1} + f_{j-1/2}v_{j-1/2} - (u_{j-1/2})^2 - M(u_{j-1/2} + \eta_j v_{j-1/2}/2) - \\ & - \lambda(G_{j-1/2} + NH_{j-1/2}) &= 0, & (13) \\ (1 + N_r + \varepsilon G_{j-1/2})(p_j - p_{j-1})h_j^{-1} + \varepsilon(p_{j-1/2})^2 - \text{Pr}(u_{j-1/2}G_{j-1/2} - p_{j-1/2}f_{j-1/2}) - \\ & - M \text{Pr}(2G_{j-1/2} + \eta_j p_{j-1/2}/2) &= 0, \\ (q_j - q_{j-1})h_j^{-1} - \text{Sc}(u_{j-1/2}H_{j-1/2} - q_{j-1/2}f_{j-1/2}) - M \text{Sc}(2H_{j-1/2} + \eta_j q_{j-1/2}/2) &= 0, \end{aligned}$$

где $u_{j-1/2} = (u_j + u_{j-1})/2$ и т. д. Система (13) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Прежде чем применить метод факторизации, эту систему необходимо линеаризовать. Запишем итерационную схему Ньютона. Для $(i+1)$ -й итерации имеем

$$f_j^{i+1} = f_j^i + \delta f_j^i, \quad (14)$$

где f — любая искомая функция. Используя представления (14) в уравнениях (13) и пренебрегая квадратичными членами и членами более высокого порядка относительно δf_j^{i+1} , получаем трехдиагональную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \delta f_j - \delta f_{j-1} - h_j(\delta u_j + \delta u_{j-1})/2 &= (r_1)_{j-1/2}, \\ \delta u_j - \delta u_{j-1} - h_j(\delta v_j + \delta v_{j-1})/2 &= (r_2)_{j-1/2}, \\ \delta G_j - \delta G_{j-1} - h_j(\delta p_j + \delta p_{j-1})/2 &= (r_3)_{j-1/2}, \\ \delta H_j - \delta H_{j-1} - h_j(\delta q_j + \delta q_{j-1})/2 &= (r_4)_{j-1/2}, \\ (a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j + (a_6)_j \delta u_{j-1} + \\ & + (a_7)_j \delta G_j + (a_8)_j \delta G_{j-1} + (a_9)_j \delta H_j + (a_{10})_j \delta H_{j-1} &= (r_5)_{j-1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_j \delta p_j + (b_2)_j \delta p_{j-1} + (b_3)_j \delta G_j + (b_4)_j \delta G_{j-1} + (b_5)_j \delta u_j + (b_6)_j \delta u_{j-1} + \\
& \quad + (b_7)_j \delta f_j + (b_8)_j \delta f_{j-1} = (r_6)_{j-1/2}, \\
& (c_1)_j \delta q_j + (c_2)_j \delta q_{j-1} + (c_3)_j \delta u_j + (c_4)_j \delta u_{j-1} + (c_5)_j \delta H_j + (c_6)_j \delta H_{j-1} + \\
& \quad + (c_7)_j \delta f_j + (c_8)_j \delta f_{j-1} = (r_7)_{j-1/2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j = 1 + h_j(f_j + f_{j-1})/4 - Mh_j\eta_j/4, \quad (a_2)_j = -1 + h_j(f_j + f_{j-1})/4 - Mh_j\eta_j/4, \\
& \quad (a_3)_j = (a_4)_j, \quad (a_4)_j = h_j(v_j + v_{j-1})/4, \quad (a_5)_j = (a_6)_j, \\
& \quad (a_6)_j = -h_j(u_j + u_{j-1})/2 - Mh_j/2, \quad (a_7)_j = (a_8)_j, \quad (a_8)_j = \lambda h_j/2, \\
& \quad (a_9)_j = (a_{10})_j, \quad (a_{10})_j = N\lambda h_j/2, \\
& (b_1)_j = 1 + \frac{\varepsilon}{2(1+N_r)}(G_j + G_{j-1}) + \frac{\varepsilon h_j}{2(1+N_r)}(p_j + p_{j-1}) + \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(f_j + f_{j-1}) - \frac{\text{Pr } \eta_j h_j}{4(1+N_r)}, \\
& (b_2)_j = -1 - \frac{\varepsilon}{2(1+N_r)}(G_j + G_{j-1}) + \frac{\varepsilon h_j}{2(1+N_r)}(p_j + p_{j-1}) + \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(f_j + f_{j-1}) - \frac{\text{Pr } \eta_j h_j}{4(1+N_r)}, \\
& \quad (b_3)_j = (b_4)_j = \frac{\varepsilon}{2(1+N_r)}(p_j - p_{j-1}) - \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(u_j + u_{j-1}) - \frac{\text{Pr } h_j}{1+N_r}, \\
& \quad (b_5)_j = (b_6)_j = -\frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(G_j + G_{j-1}), \quad (b_7)_j = (b_8)_j = \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(p_j + p_{j-1}), \\
& (c_1)_j = 1 + \text{Sc}(f_j + f_{j-1})/4 - M\text{Sc}\eta_j h_j/4, \quad (c_2)_j = -1 + \text{Sc}(f_j + f_{j-1})/4 - M\text{Sc}\eta_j h_j/4, \\
& \quad (c_3)_j = (c_4)_j = -\text{Sc}h_j(H_j + H_{j-1})/4, \quad (c_5)_j = (c_6)_j = -\text{Sc}h_j(u_j + u_{j-1})/4 - M\text{Sc}h_j, \\
& \quad (c_7)_j = (c_8)_j = \text{Sc}h_j(q_j + q_{j-1})/4, \\
& \quad (r_1)_j = f_{j-1} - f_j + h_j(u_j + u_{j-1})/2, \quad (r_2)_j = u_{j-1} - u_j + h_j(v_j + v_{j-1})/2, \\
& \quad (r_3)_j = G_{j-1} - G_j + h_j(p_j + p_{j-1})/2, \quad (r_4)_j = H_{j-1} - H_j + h_j(q_j + q_{j-1})/2, \\
& (r_5)_j = v_{j-1} - v_j - h_j(f_j + f_{j-1})(v_j + v_{j-1})/4 + h_j(u_j + u_{j-1})^2/4 + Mh_j(u_j + u_{j-1})/2 + \\
& \quad + Mh_j\eta_j(v_j + v_{j-1})/4 - \lambda h_j(G_j + G_{j-1})/2 - \lambda N h_j(H_j + H_{j-1})/2, \\
& (r_6)_j = p_{j-1} - p_j - \frac{\varepsilon}{2(1+N_r)}(G_j + G_{j-1})(p_j - p_{j-1}) - \frac{\varepsilon h_j}{4(1+N_r)}(p_j + p_{j-1})^2 + \\
& \quad + \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(u_j + u_{j-1})(G_j + G_{j-1}) - \frac{\text{Pr } h_j}{4(1+N_r)}(f_j + f_{j-1})(p_j + p_{j-1}) + \\
& \quad \quad \quad + \frac{M\text{Pr } h_j}{1+N_r}(G_j + G_{j-1}) + \frac{M\text{Pr } \eta_j h_j}{4(1+N_r)}(p_j + p_{j-1}), \\
& (r_7)_j = q_{j-1} - q_j + \text{Sc}h_j(u_j + u_{j-1})(H_j + H_{j-1})/4 - \text{Sc}h_j(f_j + f_{j-1})(q_j + q_{j-1})/4 + \\
& \quad \quad \quad + M\text{Sc}h_j(H_j + H_{j-1}) + M\text{Sc}h_j\eta_j(q_j + q_{j-1})/4.
\end{aligned}$$

Линеаризуя граничные условия, находим

$$\delta f_0 = s, \quad \delta u_0 = 1, \quad \delta G_0 = 1, \quad \delta H_0 = 1, \quad \delta u_J = 0, \quad \delta G_J = 0, \quad \delta H_J = 0.$$

Запишем линеаризованную систему в матричной форме

$$A\delta = r, \tag{15}$$

Полагая, что в (15) матрица A является невырожденной, факторизуем ее следующим образом:

$$A = LU. \quad (16)$$

Здесь

$$L = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & & & \\ [\beta_2] & [\alpha_2] & & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & [\alpha_{J-1}] & & \\ & & & & [\beta_2] & [\alpha_J] & \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & [I] & [\Gamma_{J-1}] & \\ & & & & & [I] & \end{bmatrix},$$

$[I]$ — единичная матрица размерностью 7×7 ; $[\alpha_i]$, $[\Gamma_i]$ — матрицы размерностью 7×7 , элементы которых определяются из следующих уравнений:

$$[\alpha_1] = [A_1], \quad [A_1][\Gamma_1] = [C_1], \quad [\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, 4, \dots, J.$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$LU\delta = r. \quad (17)$$

Вводя обозначение

$$U\delta = W,$$

уравнение (17) запишем в виде

$$LW = r, \quad (18)$$

где $W = [W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7]^T$; W_j — матрицы-столбцы размерностью 7×1 . Элементы W определяются из решения уравнения (18):

$$[\alpha_1][W_1] = [r_1], \quad [\alpha_j][W_j] = [r_j] - [\beta_j][W_{j-1}], \quad j = 2, 3, 4, \dots, J.$$

Определив элементы W , можно найти решение уравнения (18) по рекуррентным соотношениям

$$[\delta_j] = [W_j], \quad [\delta_j] = [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq j-1.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости $|\delta v_0^i| \leq \varepsilon_1$ (ε_1 — заданное малое положительное число).

3. Результаты исследования и их обсуждение. Расчеты выполнены при различных значениях числа Прандтля Pr , числа Шмидта Sc , параметра λ сил плавучести, обусловленных наличием градиента температуры, параметра нестационарности течения M , параметра теплопроводности ε , параметра излучения N_r , отношения сил плавучести N и параметра вдува (отсоса) s . Значения скорости теплопереноса на поверхности $-G'(0)$, полученные с использованием приведенного выше алгоритма, согласуются со значениями этой величины, полученными в работах [14, 15, 20, 22] (табл. 1).

На рис. 2,а приведены распределения скорости f' по пространственной координате η при различных значениях параметра λ в случаях вдува ($s < 0$), непроницаемой поверхности ($s = 0$) и отсоса ($s > 0$) для установившегося и неустановившегося течений. Из рис. 2,а следует, что с увеличением параметра λ скорость жидкости увеличивается. Вблизи поверхности скорость увеличивается с увеличением координаты η , а затем уменьшается и при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к нулю. В случае вдува скорость жидкости больше, чем в случае отсоса. Наконец, при установившемся течении скорость жидкости больше, чем при неустановившемся.

Таблица 1

Значения $-G'(0)$, полученные в различных работах

M	λ	Pr	Данные [14]	Данные [15]	Данные [20]	Данные [22]	Данные настоящей работы
0	0	0,72	0,8086	0,8058	0,8086	0,808 636	0,808 637
0	0	1,00	1,0000	0,9610	1,0000	1,000 000	1,000 000
0	0	3,00	1,9237	1,9144	1,9237	1,923 687	1,923 691
0	0	10,00	3,7207	3,7006	3,7207	3,720 788	3,720 791
0	0	100,00	12,2940	—	12,2941	12,300 390	12,300 395
1	0	1,00	—	—	1,6820	1,681 921	1,680 799
1	1	1,00	—	—	1,7039	1,703 910	1,702 720
1	1	1,00	—	—	1,0873	1,087 206	1,087 279
0	2	1,00	—	—	1,4230	1,422 980	1,142 341
0	3	1,00	—	—	1,1853	1,185 197	1,185 293

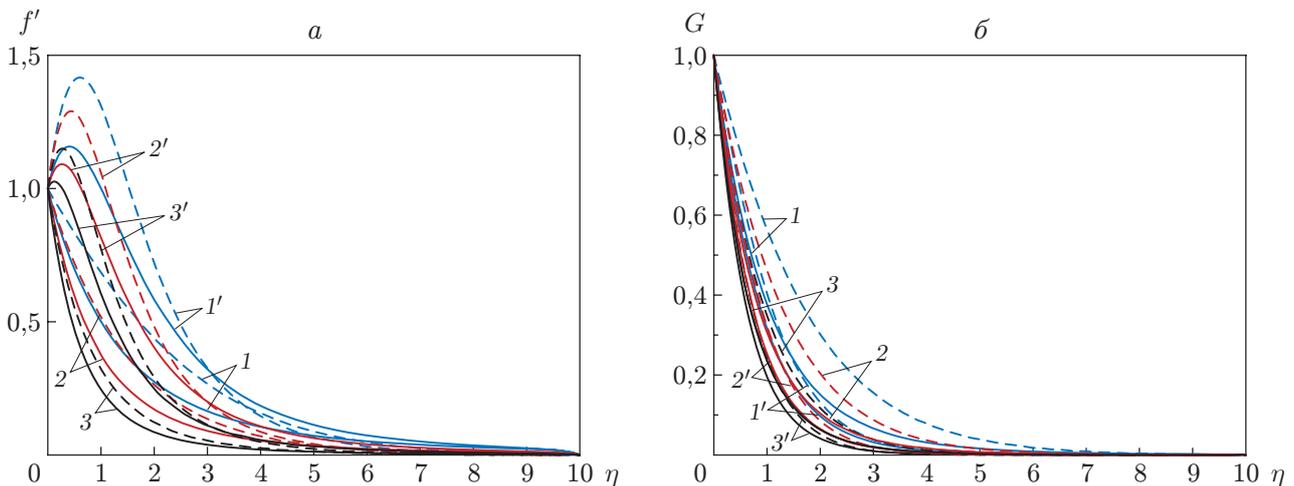


Рис. 2. Зависимости скорости (а) и температуры (б) от пространственной координаты η при $N = \varepsilon = N_r = 0,2$, $Pr = 0,7$ и различных значениях λ , s , M : сплошные линии — $M = 1$, штриховые — $M = 0$; 1-3 — $\lambda = 0,5$, 1'-3' — $\lambda = 5$; 1, 1' — $s = -1$, 2, 2' — $s = 0$, 3, 3' — $s = 1$

На рис. 2,б приведены распределения температуры по пространственной координате η при тех же значениях параметров задачи, что и на рис. 2,а. Видно, что с увеличением параметра λ температура жидкости уменьшается как в случаях вдува и отсоса через поверхность, так и в случае ее непроницаемости. В случае вдува толщина теплового пограничного слоя больше, чем в случае отсоса. При установившемся течении температура жидкости больше, чем при неустановившемся.

С увеличением параметра плавучести N скорость жидкости увеличивается как в случаях вдува и отсоса через поверхность, так и в случае ее непроницаемости (рис. 3). На рис. 3 видно, что при установившемся течении скорость жидкости больше, чем при неустановившемся. В случае сил плавучести, способствующих течению ($N > 0$), решение уравнений движения существует при больших значениях N , в случае сил плавучести, препятствующих течению ($N < 0$), решение этих уравнений существует при малых значениях N .

На рис. 4 приведены распределения температуры по пространственной координате η при различных значениях параметра ε для установившегося и неустановившегося течений как в случаях вдува и отсоса через поверхность, так и в случае непроницаемой по-

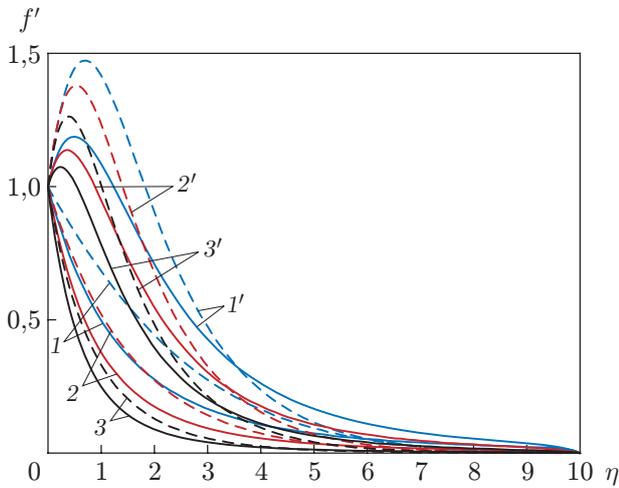


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость скорости от пространственной координаты η при $\lambda = \varepsilon = N_r = 0,5$ и различных значениях N, s, M :

1-3 — $N = 0,5$, 1'-3' — $N = 5$; остальные обозначения те же, что на рис. 2

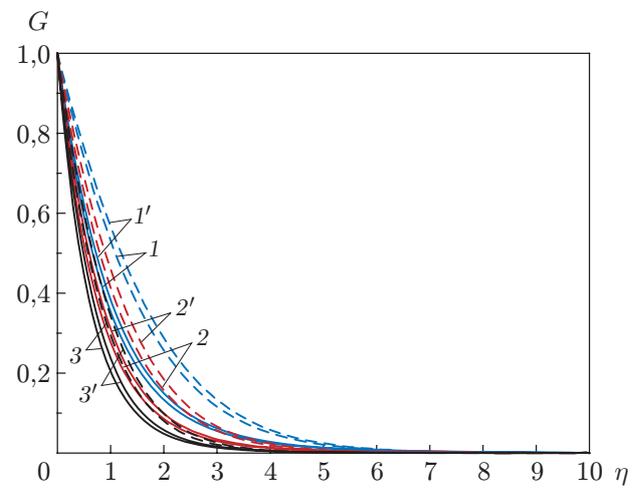


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость температуры от пространственной координаты η при $\lambda = N = N_r = 0,5$, $Pr = 1$ и различных значениях ε, s, M :

1-3 — $\varepsilon = 0,25$, 1'-3' — $\varepsilon = 1$; остальные обозначения те же, что на рис. 2

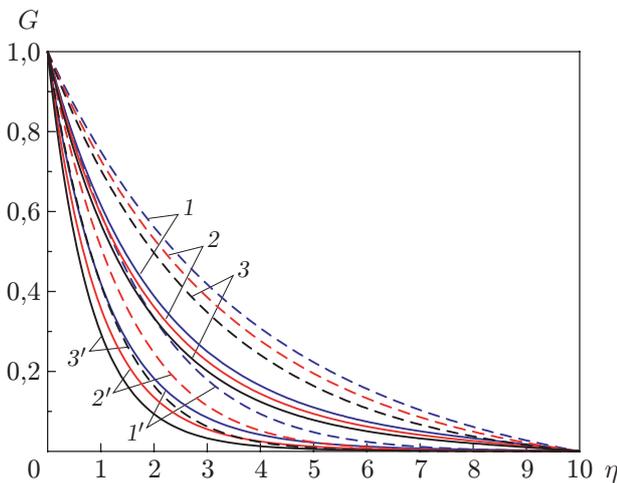


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость температуры от пространственной координаты η при $\lambda = N = \varepsilon = 0,5$, $Pr = 0,7$ и различных значениях N_r, s, M :

1-3 — $N_r = 0,5$, 1'-3' — $N_r = 5,0$; остальные обозначения те же, что на рис. 2

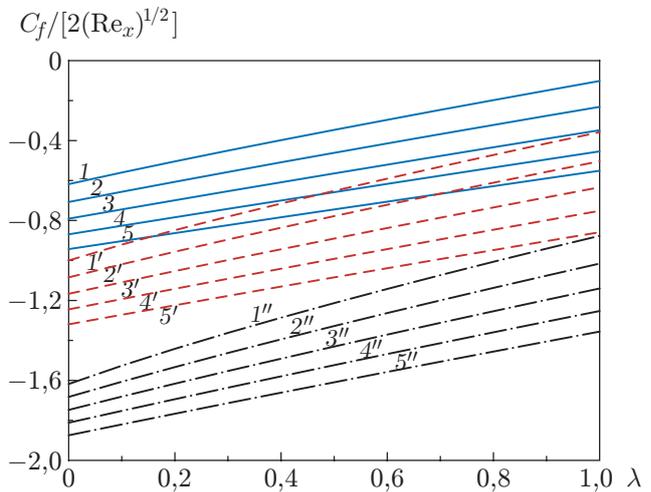


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость коэффициента поверхностного трения от параметра λ при $N = N_r = 0,2$, $Pr = 0,7$, $Sc = 0,23$, $\varepsilon = 0,1$ и различных значениях s, M :

сплошные линии — $s = -1$, штриховые — $s = 0$, штрихпунктирные — $s = 1$; 1, 1', 1'' — $M = 0$, 2, 2', 2'' — $M = 0,25$, 3, 3', 3'' — $M = 0,5$, 4, 4', 4'' — $M = 0,75$, 5, 5', 5'' — $M = 1$

Таблица 2

Значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$, скорости теплопереноса $-G'(0)$ и скорости массопереноса $-H'(0)$ на поверхности пластины при $s = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $N_r = 0,1$

λ	N	Pr	Sc	M	$f''(0)$	$-G'(0)$	$-H'(0)$
0,1	1,00	0,7	0,23	0	-0,858 408	0,768 940	0,406 118
0,1	1,00	1,0	0,23	0	-0,865 023	0,953 517	0,403 615
0,1	1,00	7,0	0,23	0	-0,890 728	2,844 145	0,398 804
0,1	1,00	0,7	0,23	0	-1,235 140	1,290 678	0,773 027
0,1	1,00	1,0	0,23	1	-1,238 657	1,557 566	0,772 696
0,1	1,00	7,0	0,23	1	-1,255 358	4,276 605	0,771 587
0,1	-0,01	7,0	0,23	1	-0,729 728	0,784 582	0,410 264
0,1	0	0,7	0,23	0	-0,726 130	0,785 696	0,411 591
0,5	1,00	0,7	0,23	0	-0,414 382	0,852 052	0,475 624
0,5	10,00	0,7	0,23	0	0,059 986	0,015 111	0,010 195
0,5	-0,01	0,7	0,23	0	-1,136 448	1,296 389	0,777 035
0,5	0	0,7	0,23	1	-1,134 162	1,296 559	0,777 170
0,5	1,00	0,7	0,23	1	-0,910 271	1,312 644	0,789 867
0,5	10,00	0,7	0,23	1	0,860 174	1,416 167	0,867 530
0,5	10,00	0,7	0,23	1	-0,562 480	0,824 953	0,451 661
0,5	0,50	0,7	0,94	0	-0,620 637	0,800 854	1,047 223
0,5	0,50	0,7	2,56	0	-0,651 321	0,793 737	1,832 906
0,5	0,50	0,7	10,00	0	-0,676 175	0,793 609	3,772 886
0,5	0,50	0,7	0,23	0	-1,021 099	1,304 807	0,783 711
0,5	0,50	0,7	0,94	1	-1,053 660	1,301 129	1,646 042
0,5	0,50	0,7	2,56	1	-1,075 946	1,299 083	2,771 281
0,5	0,50	0,7	10,00	1	-1,099 863	1,297 477	5,572 851

верхности. Видно, что с увеличением параметра ε температура жидкости незначительно увеличивается во всех трех случаях. При установившемся течении температура жидкости больше, чем при неустановившемся.

На рис. 5 приведены распределения температуры по пространственной координате η при различных значениях параметра излучения N_r . Видно, что с увеличением параметра излучения температура жидкости увеличивается и в случаях вдува и отсоса через поверхность, и в случае непроницаемой поверхности. При установившемся течении температура жидкости больше, чем при неустановившемся.

На рис. 6 приведена зависимость коэффициента поверхностного трения от параметра λ при различных значениях параметра M . Видно, что с уменьшением параметра M и увеличением параметра λ коэффициент поверхностного трения увеличивается. В случае вдува коэффициент поверхностного трения больше, чем в случае отсоса. В табл. 2 для случая непроницаемой поверхности приведены значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$, скорости теплопереноса $-G'(0)$ и скорости массопереноса $-H'(0)$ при различных значениях параметров задачи. Из табл. 2 следует, что с увеличением параметра плавучести N уменьшается коэффициент поверхностного трения, с увеличением числа Прандтля увеличивается скорость теплопереноса, с увеличением числа Шмидта — скорость массопереноса на поверхности.

Заключение. В работе с использованием метода ячеек Келлера получено численное решение задачи о двойной смешанной конвекции в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости при неустановившемся течении вдоль растягиваемой поверхности. Задача решена с учетом теплового излучения для случаев вдува через поверхность, отсоса с нее, а также для случая непроницаемой поверхности.

В результате исследования установлено, что с увеличением параметра излучения N_r температура жидкости увеличивается, а с увеличением параметра плавучести λ уменьшается как при установившемся течении, так и при неустановившемся. В случае вдува температура жидкости больше, чем в случае отсоса. С увеличением параметра теплопроводности ε температура жидкости увеличивается. С уменьшением параметра M и увеличением параметра плавучести λ поверхностное трение увеличивается, причем в случае вдува коэффициент поверхностного трения больше, чем в случае отсоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Patil P. M., Momoniat E., Roy S.** Influence of convective boundary condition on double diffusive mixed convection from a permeable vertical surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 70. P. 313–321.
2. **Blasius H.** Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. angew Math. Phys. 1908. Bd 56. S. 1–37.
3. **Sakiadis B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surface: the boundary layer on a continuous flat surface // AIChE J. 1961. V. 7. P. 221–225.
4. **Cortell B.** Radiation effects in the Blasius flow // Appl. Math. Comput. 2008. V. 198. P. 333–338.
5. **Cortell R.** Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition // Appl. Math. Comput. 2008. V. 206. P. 832–840.
6. **Patil P. M., Roy S., Chamkha A. J.** Double diffusive mixed convection flow over a moving vertical plate in the presence of internal heat generation and a chemical reaction // Turkish J. Engng Environ Sci. 2009. V. 33. P. 193–205.
7. **Aydn O., Kaya A.** Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate // Appl. Math. Comput. 2005. V. 161. P. 229–240.
8. **Ahmad N., Siddiqui Z. U., Mishra M. K.** Boundary layer flow and heat transfer past a stretching plate with variable thermal conductivity // Intern. J. Non-Linear Mech. 2010. V. 45. P. 306–309.
9. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Similarity solution of mixed convective boundary layer slip flow over a vertical plate // Ain Shams Engng J. 2013. V. 4. P. 299–305.
10. **Aydn O., Kaya A.** MHD mixed convection of a viscous dissipating fluid about a permeable vertical flat plate // Math. Model. 2009. V. 33. P. 4086–4096.
11. **Pop I., Na T.** A note on MHD flow over a stretching permeable surface // Mech. Res. Comm. 1998. V. 25. P. 263–269.
12. **Bakar N., Zaimi W., Hamid R., et al.** Boundary layer flow over a stretching sheet with a convective boundary condition and slip effect // World Appl. Sci. J. 2012. V. 17. P. 49–53.
13. **Chiam T. C.** Heat transfer in a fluid with variable thermal conductivity over a linearly stretching sheet // Acta Mech. 1998. V. 129. P. 63–72.
14. **Grubka L. G., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1985. V. 107. P. 248–250.
15. **Ali F. M., Nazar R., Arifin N. M., Pop I.** Mixed convection stagnation-point flow on vertical stretching sheet with external magnetic field // Appl. Math. Mech. (English ed.) 2014. V. 35. P. 155–166.
16. **Kumari M., Slaouti A., Taldlar H. S., et al.** Unsteady free convection flow over a continuous moving vertical surface // Acta Mech. 1996. V. 116. P. 75–82.
17. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Unsteady mixed convection boundary layer flow due to a stretching vertical surface // Arabian J. Sci. Engng. 2006. V. 31, N 2B. P. 165–182.

18. **Anilkumar D.** Nonsimilar solutions for unsteady mixed convection from a moving vertical plate // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 3147–3157.
19. **Kumari M., Nath G.** Unsteady MHD mixed convection flow over an impulsively stretched permeable vertical surface in a quiescent fluid // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2010. V. 45. P. 310–319.
20. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Boundary layer flow and heat transfer over an unsteady stretching vertical surface // *Meccanica.* 2009. V. 44. P. 369–375.
21. **Mahdy A.** Unsteady mixed convection boundary layer flow and heat transfer of nanofluids due to stretching sheet // *Nuclear Engng Design.* 2012. V. 249. P. 248–255.
22. **Vajravelu K., Prasad K. V., Chiu-On Ng.** Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at a vertical surface with variable fluid properties // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2013. V. 14. P. 455–464.
23. **Mohamed A. E.** Unsteady mixed convection heat transfer along a vertical stretching surface with variable viscosity and viscous dissipation // *J. Egyptian Math. Soc.* 2014. V. 22, iss. 3. P. 529–537.
24. **Cebeci T.** Physical and computational aspects of convective heat transfer / T. Cebeci, P. Bradshaw. N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
25. **Na T. Y.** Computational methods in engineering boundary value problems. N. Y.: Acad. Press, 1979. (Math. Sci. Engng; V. 145).
26. **Cortell R.** A numerical tackling on sakiadis flow with thermal radiation // *Chin. Phys. Lett.* 2008. V. 25. P. 1340–1342.

*Поступила в редакцию 10/IX 2014 г.,
в окончательном варианте — 10/VIII 2015 г.*
