УДК 532.59

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ С НЕОДНОРОДНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Представлены результаты решения линейной задачи об установившихся колебаниях горизонтального цилиндра, погруженного в жидкость, верхняя граница которой частично закрыта твердой крышкой, при этом оставшаяся часть поверхности является свободной. Использованы методы мультиполей и разложения по собственным функциям. Выведены соотношения эквивалентности. Выполнены расчеты коэффициентов присоединенной массы и демпфирования, а также амплитуд волн на свободной поверхности жидкости.

Ключевые слова: линейная теория волн, колебания погруженного цилиндра, неоднородная верхняя граница, метод мультипольных разложений, гидродинамическая нагрузка.

Одной из наиболее хорошо изученных в линейном приближении задач волновой гидродинамики является так называемая задача радиации о волновых движениях в жидкости со свободной поверхностью, вызываемых плавающим или погруженным телом, которое совершает гармонические колебания по заданному закону с малыми амплитудами. Достаточно полные библиографические сведения и описание методов решения радиационной задачи в рамках линейной теории волн приведены в [1]. Однако до сих пор не рассмотрены задачи, в которых верхняя граница является неоднородной, т. е. состоящей из различных участков, например, наряду со свободной поверхностью имеются участки, представляющие собой твердую крышку или упругую пластину.

В данной работе рассматривается наиболее простой случай установившихся колебаний горизонтального кругового цилиндра, погруженного в слой жидкости постоянной толщины. Верхняя граница жидкости закрыта полубесконечной твердой крышкой с прямолинейным краем, а оставшаяся часть поверхности является свободной. Ось цилиндра параллельна краю твердой крышки, поэтому данная задача является двумерной. Используется метод мультипольных разложений, что позволяет получить наиболее точное решение для кругового цилиндра [1]. Определены зависимости коэффициентов гидродинамической нагрузки (присоединенной массы и демпфирования) и амплитуд вертикальных смещений свободной поверхности от частоты колебаний цилиндра и его положения относительно края твердой крышки.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, заполняющая безграничный в горизонтальном направлении слой толщиной H. Волновые движения в первоначально покоящейся жидкости создаются вынужденными колебаниями погруженного кругового контура радиусом a с частотой ω и малыми амплитудами $\eta_{1,2}$ соответственно для горизонтальной и вертикальной степеней свободы. Считая возмущенное движение жидкости установившимся и потенциальным, выражение для полного потенциала скоростей волнового движения запишем в виде

$$\Phi(x,y,t) = \mathrm{Re}\Big(i\omega \sum_{j=1}^{2} \eta_j \varphi_j(x,y) \exp{(i\omega t)}\Big), \tag{1.1}$$

где $\varphi_j(x,y)$ — комплексные радиационные потенциалы; x — горизонтальная ось, направленная вдоль невозмущенной верхней границы жидкости; y — вертикальная ось, проходящая через центр кругового контура; t — время. На верхней границе жидкости ($y=0$) твердая крышка занимает область $c < x < \infty$, а свободная поверхность — область $-\infty < x < c$.

Внутри жидкости выполняется уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad -H < y < 0). \tag{1.2}$$

В области свободной поверхности граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = K\varphi_j \qquad (-\infty < x < c, \quad y = 0), \qquad K = \frac{\omega^2}{g}, \tag{1.3}$$

где g — ускорение свободного падения, а в области, ограниченной сверху твердой крышкой, — вид

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = 0 \qquad (c < x < \infty, \quad y = 0). \tag{1.4}$$

На круговом контуре S: $x^2 + (y+h)^2 = a^2$ ставится условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = n_j \qquad (x, y \in S, \quad j = 1, 2), \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ — внутренняя нормаль к контуру S; h — расстояние между центром цилиндра и верхней границей жидкости ($h > a$). На ровном горизонтальном дне выполняется условие

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad y = -H). \tag{1.6}$$

В дальнем поле следует потребовать выполнения условия излучения, которое означает, что генерируемые волны являются расходящимися.

Вертикальные возвышения свободной поверхности $W(x,t)$ определяются из соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{y=0}.$$

По аналогии с представлением (1.1) выражение для $W(x,t)$ целесообразно записать в виде

$$W(x,t) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{2} \eta_j w_j(x) \exp{(i\omega t)}\Big),$$

где коэффициенты

$$w_j(x) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Big|_{y=0} \tag{1.7}$$

представляют собой комплексные функции, позволяющие определить амплитуды колебаний свободной поверхности по отношению к амплитуде колебаний погруженного тела.

Далее ограничимся случаями, когда цилиндр полностью расположен либо под твердой крышкой ($c < -a$), либо под свободной поверхностью ($c > a$).

2. Метод мультипольных разложений. Для решения задачи (1.2)–(1.6) используется метод мультипольных разложений [1], который является наиболее эффективным при исследовании тел простой геометрии: в двумерном случае — круга, в трехмерном — сферы. Четные и нечетные по x мультиполи $\cos(m\theta)/r^m$ и $\sin(m\theta)/r^m$, где $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$; $\theta = \operatorname{arctg}[x/(y+h)]$, являются фундаментальными решениями уравнения Лапласа и сингулярны в точке $x = 0$, $y = -h$. Используя интегральные представления

$$\frac{\cos(m\theta)}{r^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-1)!} \displaystyle\int_0^\infty k^{m-1} e^{-k(h+y)} \cos(kx)\, dk, & y > -h, \\ \dfrac{(-1)^m}{(m-1)!} \displaystyle\int_0^\infty k^{m-1} e^{k(h+y)} \cos(kx)\, dk, & y < -h, \end{cases}$$

$$\frac{\sin(m\theta)}{r^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-1)!} \displaystyle\int_0^\infty k^{m-1} e^{-k(h+y)} \sin(kx)\, dk, & y > -h, \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \displaystyle\int_0^\infty k^{m-1} e^{k(h+y)} \sin(kx)\, dk, & y < -h, \end{cases}$$

для каждого мультиполя можно записать решения в случае конечного слоя жидкости, ограниченного снизу горизонтальным дном ($y = -H$), а сверху ($y = 0$) — бесконечно протяженной твердой крышкой либо свободной поверхностью.

Для бесконечно протяженной твердой крышки четные по x решения имеют вид

$$R_m(x,y) = \frac{\cos(m\theta)}{r^m} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \frac{k^{m-1}\cos(kx)}{1 - e^{-2kH}} \, [A(k,y) + (-1)^m B(k,y)]\, dk, \tag{2.1}$$

а нечетные по x решения равны

$$Q_m(x,y) = \frac{\sin(m\theta)}{r^m} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \frac{k^{m-1}\sin(kx)}{1 - e^{-2kH}} \, [A(k,y) - (-1)^m B(k,y)]\, dk, \tag{2.2}$$

где

$$A(k,y) = e^{-kh}[e^{ky} + e^{-k(y+2H)}], \qquad B(k,y) = 2\, e^{k(h-2H)} \operatorname{ch}(ky).$$

Для бесконечно протяженной свободной поверхности решения имеют более сложный вид. Четные по x решения равны

$$P_m(x,y) = \frac{\cos(m\theta)}{r^m} + \frac{1}{(m-1)!} \Big(\mathrm{pv} \int_0^\infty \frac{F(k,x,y)}{Z(k)}\, dk - i\pi \frac{F(k_0,x,y)}{Z'(k_0)} \Big), \tag{2.3}$$

где

$$F(k,x,y) = \frac{k^{m-1}\cos(kx)}{1 + e^{-2kH}} \, [C(k,y) + (-1)^m D(k,y)],$$

$$C(k,y) = e^{-kh}(k+K)(e^{ky} + e^{-k(y+2H)}), \qquad D(k,y) = 2\, e^{k(h-2H)}(k \operatorname{ch}(ky) + K \operatorname{sh}(ky)),$$

$$Z(k) = k \operatorname{th}(kH) - K, \qquad Z'(k_0) \equiv \frac{dZ}{dk}\Big|_{k=k_0}, \tag{2.4}$$

pv — интеграл в смысле главного значения. Подынтегральное выражение в (2.3) всегда имеет простой полюс в точке $k = k_0$, которая определяется при решении уравнения $Z(k) = 0$, что равносильно дисперсионному соотношению для поверхностных волн в жидкости конечной глубины. При выводе соотношения (2.3) использовано условие излучения.

Нечетные по x решения имеют вид

$$T_m(x,y) = \frac{\sin(m\theta)}{r^m} + \frac{1}{(m-1)!}\Big(\,\mathrm{pv}\int\limits_0^\infty \frac{G(k,x,y)}{Z(k)}\,dk - i\pi\,\frac{G(k_0,x,y)}{Z'(k_0)}\Big), \tag{2.5}$$

где

$$G(k,x,y) = \frac{k^{m-1}\sin(kx)}{1+\mathrm{e}^{-2kH}}\,[C(k,y) - (-1)^m D(k,y)].$$

Для построения решения в случае неоднородной верхней границы область, занятую жидкостью, следует разделить на две подобласти: Γ_1 $(-\infty < x < c,\ -H < y < 0)$ и Γ_2 $(c < x < \infty,\ -H < y < 0)$. Радиационные потенциалы $\varphi_j(x,y)$ далее обозначены $\varphi_j^{(1)}(x,y)$ и $\varphi_j^{(2)}(x,y)$ соответственно для подобластей Γ_1 и Γ_2. Различные случаи расположения цилиндра: под твердой крышкой (случай 1) или под свободной поверхностью (случай 2) — в настоящей работе рассматриваются отдельно.

3. Случай 1 (цилиндр под твердой крышкой). В данном случае $c < -a$ и решение для радиационного потенциала $\varphi_j^{(1)}(x,y)$ можно искать в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_{m=1}^\infty a^m\Big[p_m\Big(U_{0m}\,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)}\,\psi_0(y) + \sum_{n=1}^\infty U_{nm}\,\mathrm{e}^{k_n(x-c)}\,\psi_n(y)\Big) + {}$$
$$+\, q_m\Big(V_{0m}\,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)}\,\psi_0(y) + \sum_{n=1}^\infty V_{nm}\,\mathrm{e}^{k_n(x-c)}\,\psi_n(y)\Big)\Big], \tag{3.1}$$

где

$$\psi_0(y) = \frac{\mathrm{ch}\,(k_0(y+H))}{\sqrt{\Lambda_0}}, \qquad \Lambda_0 = \int\limits_{-H}^0 \mathrm{ch}^2\,(k_0(y+H))\,dy = \frac{1}{2}\Big(H + \frac{K}{k_0^2 - K^2}\Big); \tag{3.2}$$

$$\psi_n(y) = \frac{\cos(k_n(y+H))}{\sqrt{\Lambda_n}}, \qquad \Lambda_n = \int\limits_{-H}^0 \cos^2(k_n(y+H))\,dy = \frac{1}{2}\Big(H - \frac{K}{k_0^2 + K^2}\Big). \tag{3.3}$$

Значения k_n определяются как вещественные положительные корни уравнения

$$k_n\,\mathrm{tg}\,(k_n H) + K = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Система функций $\psi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ является полной и ортонормированной, а значения k_n при $n \geqslant 1$ удовлетворяют неравенствам

$$(n-1)\pi/H < k_n < n\pi/H.$$

Решение для радиационных потенциалов $\varphi_j^{(2)}(x, y)$ с учетом (2.1) и (2.2) будем искать в виде

$$\varphi_j^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m \Big[p_m\Big(R_m(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} X_{nm}\,\mathrm{e}^{n\pi(c-x)/H} f_n(y)\Big) + \\ + q_m\Big(Q_m(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{nm}\,\mathrm{e}^{n\pi(c-x)/H} f_n(y)\Big)\Big], \qquad (3.4)$$

где

$$f_n(y) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\Big(\frac{n\pi}{H}(y+H)\Big) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (3.5)$$

Система функций $f_n(y)$ также является полной и ортонормированной.

Неизвестные комплексные постоянные U_{nm}, V_{nm}, X_{nm}, Y_{nm} определяются из условий согласования на границе подобластей Γ_1 и Γ_2

$$\varphi_j^{(1)} = \varphi_j^{(2)}, \qquad \frac{\partial\varphi_j^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_j^{(2)}}{\partial x} \qquad (x = c, \quad -H < y < 0). \qquad (3.6)$$

Эти условия означают непрерывность давления и горизонтальной скорости на указанной границе. Приведенные выше постоянные вычисляются для каждого номера m и не зависят от типа колебаний цилиндра. Для того чтобы было выполнено первое условие в (3.6), выражения в квадратных скобках (3.1) и (3.4) умножаются последовательно на $f_l(y)$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) и интегрируются по y от $-H$ до 0. Для того чтобы было выполнено второе равенство в (3.6), следует продифференцировать соответствующие выражения по x и провести интегральную склейку, используя функции $\psi_n(y)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). В результате для определения неизвестных постоянных U_{nm}, V_{nm}, X_{nm}, Y_{nm} получается система линейных алгебраических уравнений.

После определения указанных постоянных неизвестные комплексные постоянные p_m и q_m в (3.1), (3.4) находятся из граничного условия (1.5) на поверхности кругового контура S, причем они зависят от номера j, т. е. от типа колебаний цилиндра.

Для учета граничного условия (1.5) используется известное соотношение [1]

$$\exp\,[k(ix \pm y \pm h)] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\pm kr)^l}{l!} \exp\,(\pm il\theta), \qquad (3.7)$$

с помощью которого можно записать

$$\frac{\partial R_m}{\partial r} = -\frac{m\cos(m\theta)}{r^{m+1}} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\, I_{ml}^{+} \cos(l\theta); \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial r} = -\frac{m\sin(m\theta)}{r^{m+1}} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\, I_{ml}^{-} \sin(l\theta), \qquad (3.9)$$

где

$$I_{ml}^{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{k^{m+l-1}}{1-\mathrm{e}^{-2kH}}\big[\,\mathrm{e}^{-2kh} \pm \mathrm{e}^{-2kH}\big((-1)^m + (-1)^l \pm (-1)^{m+l}\,\mathrm{e}^{2kh}\big)\big]\,dk.$$

С использованием (3.8) и (3.9) из (3.4) вычисляется значение производной $\partial\varphi_j^{(2)}(x,y)/\partial r$ при $r = a$. Умножая полученное соотношение последовательно на $\sin(\alpha\theta)$ и $\cos(\alpha\theta)$ при $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ и интегрируя по θ от 0 до 2π, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных p_m и q_m в (3.1), (3.4).

Значения относительных возвышений свободной поверхности нетрудно определить из (1.7) с учетом (3.1). В дальнем поле существует только уходящая от тела волна с волновым числом k_0, определяемая соотношением

$$w_j = E_j \,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)} \qquad (x \to -\infty),$$

где

$$E_j = \frac{k_0}{\sqrt{\Lambda_0}} \operatorname{sh}(k_0 H) \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m U_{0m} + q_m V_{0m}).$$

Вдали от цилиндра значения потенциалов равны

$$\varphi_j^{(1)} = E_j \frac{\psi_0(y)\sqrt{\Lambda_0}}{k_0 \operatorname{sh}(k_0 H)} \,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)} \quad (x \to -\infty), \qquad \varphi_j^{(2)} = 0 \quad (x \to \infty).$$

Аналогично решается задача и в том случае, когда цилиндр расположен в подобласти Γ_1.

4. Случай 2 (цилиндр под свободной поверхностью). В данном случае $c > a$ и решение для радиационных потенциалов $\varphi_j^{(1)}(x,y)$ с учетом (2.3), (2.5), (3.2), (3.3) можно записать в виде

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m \Big[p_m \Big(P_m(x,y) + U_{0m} \,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)} \,\psi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \,\mathrm{e}^{k_n(x-c)} \,\psi_n(y) \Big) + \\ + q_m \Big(T_m(x,y) + V_{0m} \,\mathrm{e}^{ik_0(x-c)} \,\psi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm} \,\mathrm{e}^{k_n(x-c)} \,\psi_n(y) \Big) \Big]. \quad (4.1)$$

Решение для радиационных потенциалов $\varphi_j^{(2)}(x,y)$ с учетом (3.5) будем искать в виде

$$\varphi_j^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m \Big(p_m \sum_{n=1}^{\infty} X_{nm} \,\mathrm{e}^{n\pi(c-x)/H} f_n(y) + q_m \sum_{n=1}^{\infty} Y_{nm} \,\mathrm{e}^{n\pi(c-x)/H} f_n(y) \Big). \quad (4.2)$$

Неизвестные постоянные U_{nm}, V_{nm}, X_{nm}, Y_{nm} находим из условий согласования (3.6) так же, как в п. **3**.

Постоянные p_m и q_m в (4.1), (4.2) определяются следующим образом. С использованием (3.7) получаем

$$\frac{\partial P_m}{\partial r} = -\frac{m \cos(m\theta)}{r^{m+1}} + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} J_{ml}^{+} \cos(l\theta); \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial r} = -\frac{m \sin(m\theta)}{r^{m+1}} + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} J_{ml}^{-} \sin(l\theta), \quad (4.4)$$

где

$$J_{ml}^{\pm} = \mathrm{pv} \int_0^{\infty} \frac{L_{ml}^{\pm}(k)\,dk}{Z(k)} - i\pi \frac{L_{ml}^{\pm}(k_0)}{Z'(k_0)},$$

$$L_{ml}^{\pm}(k) = \frac{k^{m+l-1}}{1 + \mathrm{e}^{-2kH}} \big[(k+K)\big(\mathrm{e}^{-2kh} \pm (-1)^m \,\mathrm{e}^{-2kH} \big) \pm \\ \pm (-1)^l \,\mathrm{e}^{-2kH} \big(k + K \pm (-1)^m (k-K) \,\mathrm{e}^{-2kh} \big) \big].$$

Функция $Z(k)$ определена в (2.4).

С использованием (4.3) и (4.4) из (4.1) вычисляется значение производной $\partial\varphi_j^{(1)}(x,y)/\partial r$ при $r = a$. Умножая полученное соотношение последовательно на $\sin(\alpha\theta)$ и $\cos(\alpha\theta)$ при $\alpha = 1,2,3,\ldots$ и интегрируя по θ от 0 до 2π, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных p_m и q_m в (4.1), (4.2).

Значения относительных возвышений свободной поверхности определяются из (1.7) с учетом (4.1). В дальнем поле аналогично случаю 1 существует только уходящая от тела волна с волновым числом k_0, определяемая соотношением

$$w_j = E_j\,\mathrm{e}^{ik_0x} \qquad (x \to -\infty), \tag{4.5}$$

где

$$E_j = k_0 \sum_{m=1}^{\infty} a^m \Big[p_m\Big(\frac{U_{0m}}{\sqrt{\Lambda_0}}\,\mathrm{sh}\,(k_0H)\,\mathrm{e}^{-ik_0c} - \frac{iD_m^+(k_0)}{Z'(k_0)}\Big) + {}$$
$$+ q_m\Big(\frac{V_{0m}}{\sqrt{\Lambda_0}}\,\mathrm{sh}\,(k_0H)\,\mathrm{e}^{-ik_0c} - \frac{D_m^-(k_0)}{Z'(k_0)}\Big)\Big],$$
$$D_m^{\pm}(k) = \frac{2\pi K k^m}{(m-1)!(1+\mathrm{e}^{-2kH})}\,[\mathrm{e}^{-kh} \pm (-1)^m\,\mathrm{e}^{k(h-2H)}].$$

Вдали от цилиндра значения потенциалов равны

$$\varphi_j^{(1)} = E_j\,\frac{\psi_0(y)\sqrt{\Lambda_0}}{k_0\,\mathrm{sh}\,(k_0H)}\,\mathrm{e}^{ik_0x} \quad (x \to -\infty), \qquad \varphi_j^{(2)} = 0 \quad (x \to \infty).$$

5. Гидродинамическая нагрузка и соотношения эквивалентности. Определив все неизвестные постоянные, можно вычислить действующие на погруженное тело радиационные силы $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$, выражения для которых без учета гидростатической составляющей обычно записываются в матричной форме:

$$F_k = \sum_{j=1}^{2} \eta_j \tau_{kj} \qquad (k = 1,2),$$
$$\tau_{kj} = \rho\omega^2 \int_S \varphi_j n_k\,ds = \omega^2\mu_{kj} - i\omega\lambda_{kj}.$$

Здесь коэффициенты τ_{kj} представляют собой комплексную силу, действующую в направлении k и обусловленную синусоидальным движением тела с единичной амплитудой в направлении j; μ_{kj} — коэффициенты присоединенных масс; λ_{kj} — коэффициенты демпфирования.

Применяя тождество Грина для области жидкости вне погруженного тела, можно получить соотношения эквивалентности, используемые для контроля точности численных расчетов. Пусть $\vartheta(x,y)$ и $\chi(x,y)$ — функции, удовлетворяющие уравнению (1.2), граничным условиям (1.3), (1.4), (1.6) и условию излучения. Учитывая, что при $x \to \infty$ движение жидкости отсутствует, получаем

$$\int_S \Big(\vartheta\,\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\,\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\Big)\,ds = \int_{-H}^{0} \Big(\vartheta\,\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\Big)\Big|_{x=-\infty} dy. \tag{5.1}$$

В качестве функций ϑ и χ можно выбрать различные пары φ_j, а также их комплексно-сопряженные значения $\bar\varphi_j$. При $\vartheta = \varphi_j$, $\chi = \varphi_k$ согласно (5.1) имеет место условие симметрии коэффициентов присоединенных масс и демпфирования

$$\mu_{jk} = \mu_{kj}, \qquad \lambda_{jk} = \lambda_{kj} \qquad (j,k = 1,2). \tag{5.2}$$

Используя значения $\vartheta = \varphi_j$, $\chi = \bar{\varphi}_k$ в (5.1), получаем связь между коэффициентами демпфирования и характеристиками волн в дальнем поле

$$\lambda_{kj} = \frac{\rho\omega\Lambda_0}{k_0 \operatorname{sh}^2(k_0 H)} E_k \bar{E}_j. \tag{5.3}$$

Из соотношения (5.3) следует, что диагональные коэффициенты демпфирования всегда имеют положительные значения.

6. Результаты численных расчетов. При численном решении рассматриваемой задачи используется метод редукции. В бесконечных рядах по m и n в (3.1), (3.4), (4.1), (4.2) учитываются только M и N первых членов соответственно. В проведенных расчетах использовались значения $M = 7$, $N = 15$, дальнейшее увеличение этих значений не приводило к изменению первых трех значащих цифр в результатах. Все расчеты выполнены при $h = 2a$.

На рис. 1, 2 представлены зависимости соответственно безразмерных значений коэффициентов присоединенной массы $M_{jk} = \mu_{jk}/(\pi\rho a^2)$ и демпфирования $L_{jk} = \lambda_{jk}/(\pi\rho a^2\omega)$ от частоты колебаний цилиндра при $H = 10a$. Известно, что присоединенные массы любого погруженного тела, колеблющегося под бесконечно протяженной твердой крышкой, не зависят от частоты, а все коэффициенты демпфирования тождественно равны нулю [2]. При этом для кругового цилиндра отличными от нуля являются только значения μ_{11}

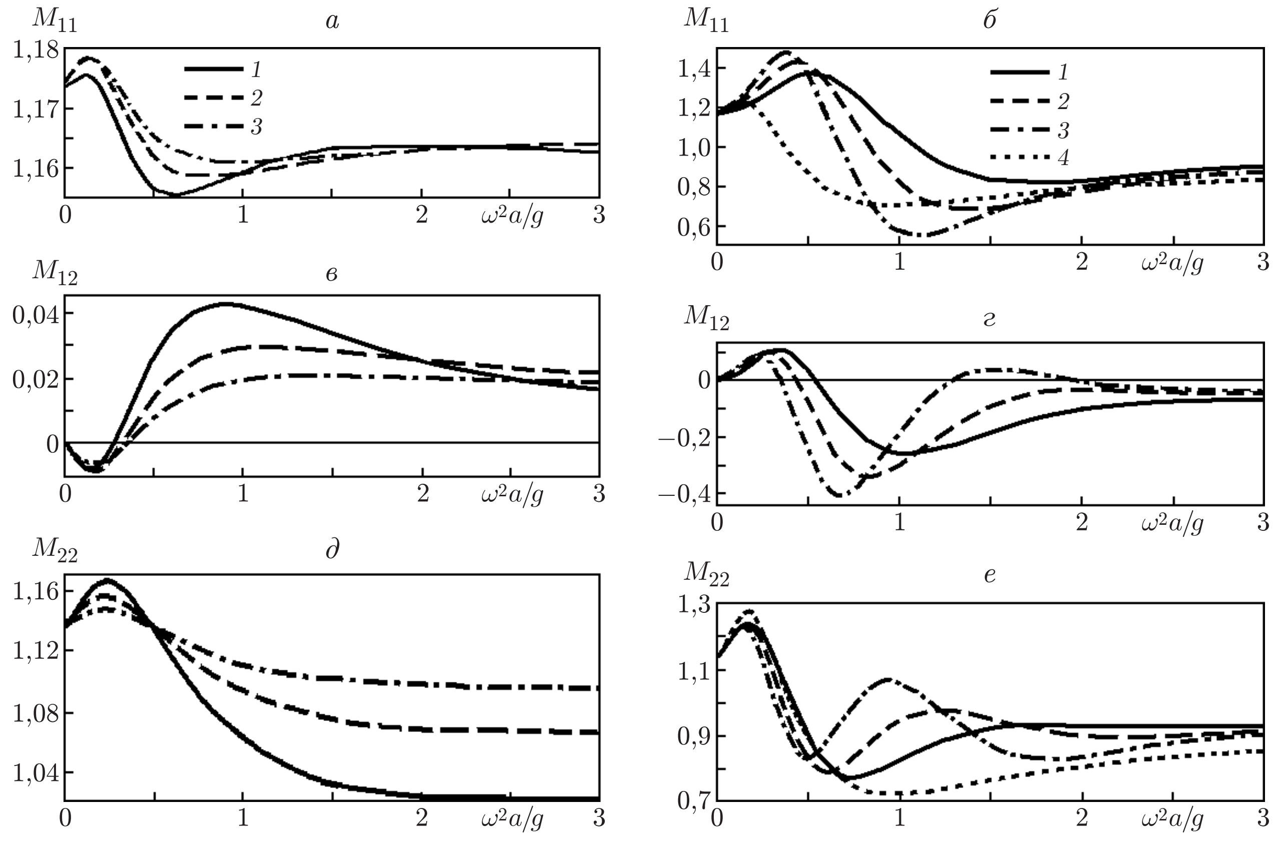

Рис. 1. Зависимости коэффициентов присоединенной массы M_{11} (*а, б*), M_{12} (*в, г*), M_{22} (*д, е*) от частоты при $H/a = 10$:

а, в, д — случай 1 (*1* — $c/a = -1{,}05$; *2* — $c/a = -1{,}5$; *3* — $c/a = -2$), *б, г, е* — случай 2 (*1* — $c/a = 1{,}05$; *2* — $c/a = 1{,}5$; *3* — $c/a = 2$), *4* — случай бесконечно протяженной свободной поверхности

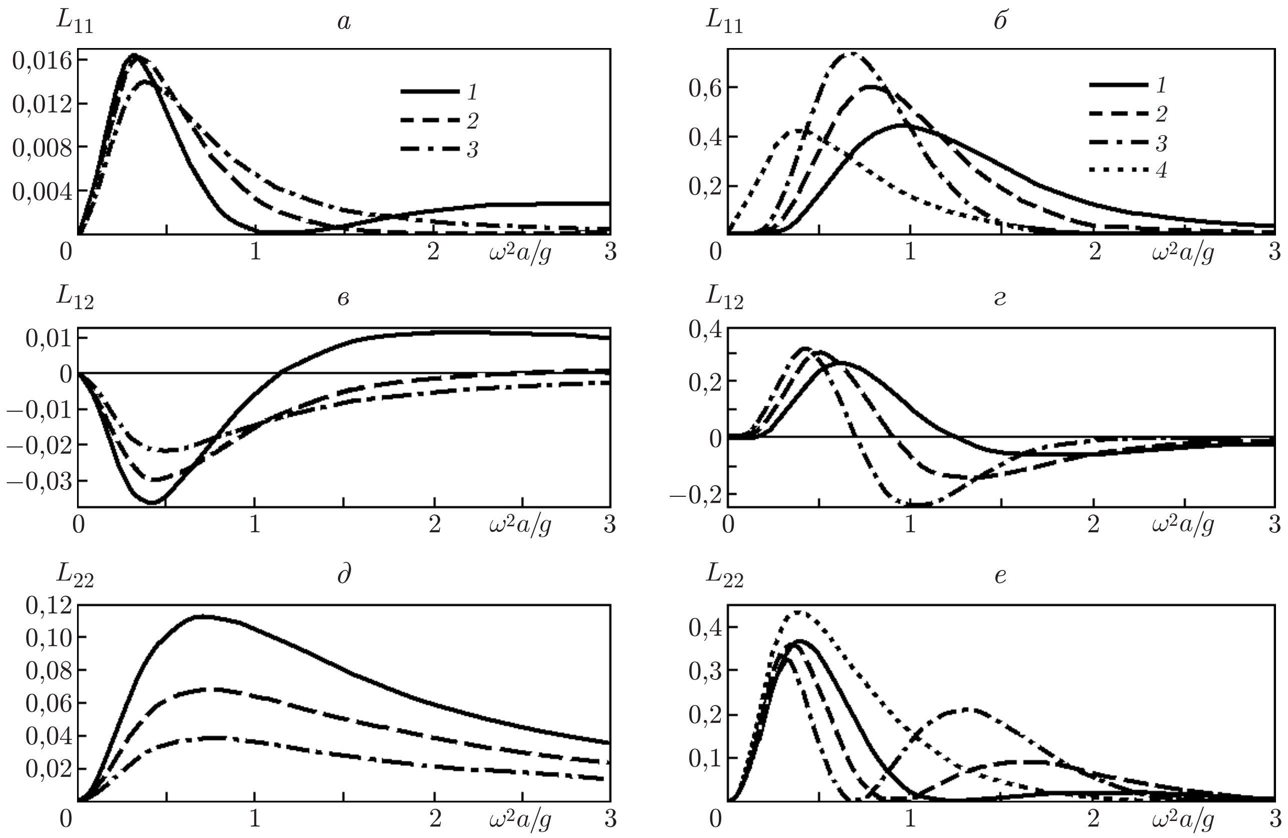

Рис. 2. Зависимости коэффициентов демпфирования L_{11} (*а, б*), L_{12} (*в, г*), L_{22} (*д, е*) от частоты при $H/a = 10$ (обозначения те же, что на рис. 1)

и μ_{22}. На рис. 1 этим значениям соответствуют значения $M_{11} \approx 1{,}1743$, $M_{22} \approx 1{,}1361$, являющиеся предельными для всех рассмотренных случаев при низких частотах колебаний тела ($\omega \to 0$). Для кругового цилиндра, находящегося под бесконечно протяженной свободной поверхностью, наиболее полные расчеты радиационной задачи проведены в [3] для слоя жидкости большой толщины. В этой задаче коэффициенты радиационной нагрузки существенно зависят от частоты, и ненулевые значения имеют только компоненты τ_{11} и τ_{22}. Следует отметить, что зависимости коэффициентов присоединенной массы от частоты всегда имеют два локальных экстремума, а зависимости коэффициентов демпфирования от частоты — один локальный максимум. Значительно более сложный характер имеют зависимости радиационной нагрузки от частоты при неоднородных условиях на верхней границе жидкости. Появляются отличные от нуля недиагональные коэффициенты, а значения диагональных коэффициентов существенно отличаются от соответствующих значений в случае однородных граничных условий. Число локальных экстремумов на кривых зависимостей от частоты коэффициентов как присоединенной массы, так и демпфирования определяется значением параметра c, характеризующего расстояние от цилиндра до левого края твердой крышки. Интересной особенностью поведения диагональных коэффициентов демпфирования является возникновение в случае 2 локальных минимумов, при которых эти коэффициенты имеют практически нулевые значения. Согласно соотношению эквивалентности (5.3) при этих частотах амплитуда волны в дальнем поле очень мала. В случае 1 влияние неоднородных граничных условий на все компоненты радиационной нагрузки уменьшается по мере удаления цилиндра от края твердой крышки.

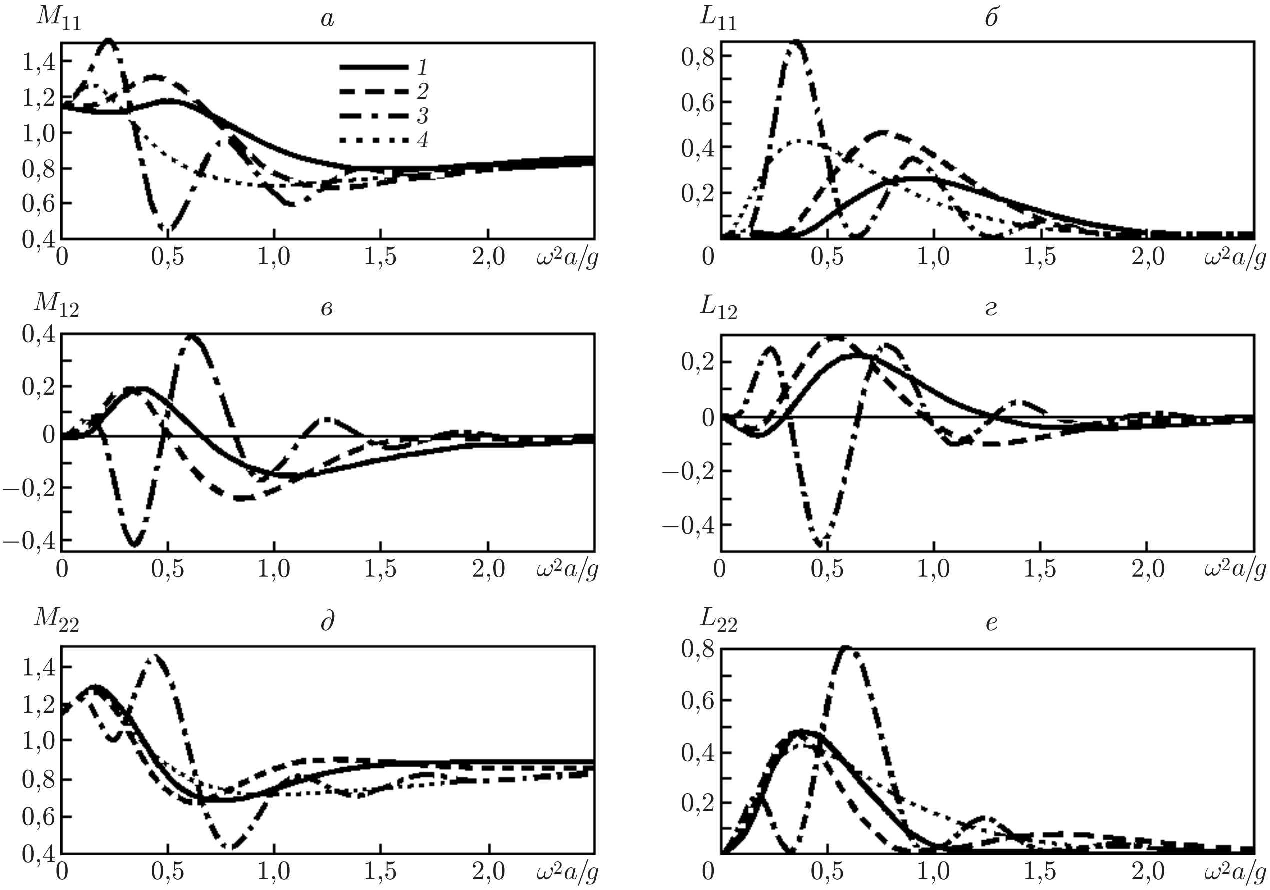

Рис. 3. Зависимости коэффициентов присоединенной массы M_{11} (*а*), M_{12} (*в*), M_{22} (*д*) и демпфирования L_{11} (*б*), L_{12} (*г*), L_{22} (*е*) от частоты для случая 2 при $H/a = 50$:
1 — $c/a = 1{,}05$; *2* — $c/a = 1{,}5$; *3* — $c/a = 5$; *4* — случай бесконечно протяженной свободной поверхности

На рис. 3 приведена зависимость коэффициентов присоединенной массы и демпфирования от частоты в случае 2 при $H = 50a$. Для бесконечно протяженной твердой крышки $M_{11} \approx 1{,}1361$ и $M_{22} \approx 1{,}1346$ (см. рис. 3,*а,д*). Для бесконечно протяженной свободной поверхности с увеличением толщины слоя жидкости коэффициенты τ_{11} и τ_{22} становятся близкими по значению и в случае бесконечно глубокой жидкости ($H \to \infty$) совпадают. Однако этого не происходит при неоднородных граничных условиях, которые также оказывают существенное влияние на максимальные значения коэффициентов радиационной нагрузки.

На рис. 4,*а,б* представлены амплитуды возвышений свободной поверхности $|E_1|$, $|E_2|$, определенные согласно (4.5), в области $|x|/a \leqslant 5$ при $H = 50a$, $c = 5a$ и $\omega^2 a/g = 0{,}32$; $0{,}64$ соответственно. Выбранные значения частот интересны тем, что при $\omega^2 a/g = 0{,}32$ мало значение L_{22} ($L_{22} \approx 0{,}000\,21$), а при $\omega^2 a/g = 0{,}64$ — значение L_{11} ($L_{11} \approx 0{,}000\,53$). Для сравнения показаны значения амплитуд возвышений в случае безграничной свободной поверхности. В этом случае амплитуды являются четными по x функциями и для рассматриваемой толщины слоя жидкости при горизонтальных и вертикальных колебаниях кругового контура практически совпадают в дальнем поле. Видно, что при наличии твердой крышки поведение свободной поверхности существенно отличается от ее поведе-

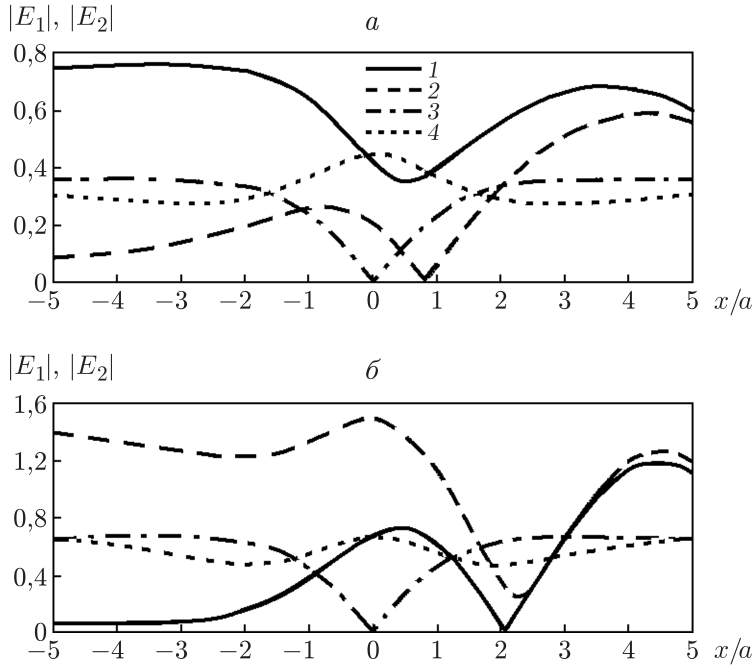

Рис. 4. Амплитуды возвышений свободной поверхности при $H/a = 50$:
а — $\omega^2 a/g = 0{,}32$, *б* — $\omega^2 a/g = 0{,}64$; *1, 3* — $|E_1|$, *2, 4* — $|E_2|$; *1, 2* — $c/a = 5$,
3, 4 — случай бесконечно протяженной свободной поверхности

ния в случае отсутствия крышки. Соотношения эквивалентности (5.2), (5.3) выполняются с относительной погрешностью, не превышающей 0,01 %.

Заключение. Предложен метод расчета волнового течения, вызванного малыми колебаниями кругового цилиндра, погруженного в жидкость, свободная поверхность которой частично закрыта твердой крышкой. Определены гидродинамические нагрузки, действующие на цилиндр, и амплитуды возвышений свободной поверхности. Показано, что волновые движения существенно зависят от положения цилиндра относительно кромки твердой крышки. Выведены соотношения эквивалентности, из которых следует симметрия коэффициентов присоединенных масс и демпфирования, а также связь коэффициентов демпфирования с амплитудами волн в дальнем поле. Предложенный метод может быть распространен на случаи более сложных неоднородностей на верхней границе жидкости, например на случай плавающей упругой пластины полубесконечной или конечной протяженности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Linton C. M.** Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions / C. M. Linton, P. McIver. L.; Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2001.
2. **Короткин А. И.** Присоединенные массы судостроительных конструкций: Справ. СПб.: Мор. вестн., 2007.
3. **Eatock Taylor R., Hu C. S.** Multipole expansions for wave diffraction and radiation in deep water // Ocean Engng. 1991. V. 18, N 3. P. 191–224.

Поступила в редакцию 16/V 2013 г.