О ЗАТУХАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА—ГОРДОНА

Е. Н. Пелиновский, С. Х. Шаравский

(Горкий)

Методом усреднения исследуется затухание несинусоидальной волны в системах, описываемых уравнением Клейна — Гордона. Для задач с начальными условиями решение дано в явном виде. Показано, что в некоторых случаях длительное существование стационарной волны невозможно. Диссипация может приводить также к остановке волн. Рассмотрены особенности граничной задачи. Получены формулы, описывающие затухание одновиальных импульсов (солитонов).

1. Нелинейное волновое уравнение вида

\[
\frac{\partial \Phi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\Phi^3}{\Lambda^2} \sin \Phi = 0
\]

известное как уравнение Клейна — Гордона с синусом, широко применяется в различных задачах физики. Оно описывает движение границ доменов в ферромагнетиках [1] и распределение дислокаций в кристаллической решетке [2], распространение ультракороткого светового импульса в неллинейной активной среде [3] и электромагнитное поле в переходах Джозефсона [4]. Уравнение (1.1) используется в некоторых моделях теории поля [5] и механики твердого тела [6]. Решение уравнения (1.1) исследовалось в дифференциальной геометрии [7], для (1.1) впервые в неллинейной теории получены точные решения, описывающие взаимодействие двух волн. Найдены также мно-говолновые (N-солитонные) решения [8, 9].

Влияние диссипативных эффектов на неллинейные волны изучено для слаботеллинейного случая [10, 11, 12]. Поскольку решение задачи о распространении волн с учетом поглощения в общем виде получить не удается, можно рассмотреть при произвольной величине неллинейности класс квазистационарных волн, характеризуемых только двумя параметрами (амплитудой и частотой), анализ которых возможен с помощью методов усреднения. Такие волны в отсутствие поглощения рассматривались в литературе, исследовалась их устойчивость относительно возмущений отгивающих [13, 14, 15]. В данной работе решается задача о затухании волны, форма которой в начальный момент времени стационарна.

Стационарные волны различают по фазовой скорости \( v = \omega / k \) (быстрые, если \( v > c \), и медленные, если \( v < c \)) и по величине среднего за период волны значения производных от \( \Phi \) \( (\text{в области I} \quad \left< \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right> = \left< \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right> = 0, \quad \text{в области II} \quad \text{хотя бы одна из этих величин отлична от нуля; эти} \)
области обозначены на фазовой плоскости быстрых стационарных волн, изображенной на фиг. 1). Аналитически стационарные волны выражаются в эллиптических функциях. В области I имеем

\[ \varphi = 2 \arcsin \left( \frac{K \theta}{s} \right) + \pi \left( v^2 - c^2 \right) \]

\[ \omega^2 = c^2 k^2 + \frac{c^2}{\Lambda^2} \left( \frac{\pi}{S K (s)} \right)^2 \] \text{sign} (v^2 - c^2) \]

в области II

\[ \varphi = 2 \operatorname{am} \left( \frac{K (s)}{\pi} \theta, s \right) + \pi \left( v^2 - c^2 \right) \]

\[ \omega^2 = c^2 k^2 + \frac{c^2}{\Lambda^2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{K} (s)} \right)^2 \] \text{sign} (v^2 - c^2) \]

где \( \theta = \omega t - kx \), \( I (z) \) — ступенчатая функция Хэвисида, am (z) и Sn (z) — амплитуда и синус Якоби соответственно, K (s) — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем s.

При фиксированном k форма медленных волн не может быть произвольной, возможно только те s (a этот параметр фактически определяет форму волны), при которых \( \omega^2 > 0 \); для быстрых волн таких ограничений не существует.

2. Учет диссипативных факторов во многих случаях приводит к добавлению в уравнение Клейна — Гордона слагаемого типа \( \delta \varphi / \delta t \), и исходное уравнение принимает вид

\[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{\Lambda^2} \sin \varphi + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \]

При достаточно больших \( \tau \) можно считать, что решение уравнения (2.1) описывается формулой (1.2) или (1.3), где амплитуда (или модуль s) и частота переменны. Поскольку огибающие изменяются медленно, уравнение для них удобно получить с помощью метода усреднения, например обобщенного вариационного принципа [15, 14]. Можно найти функции Лагранжа и Релея для уравнения (2.1). После их усреднения по фазе \( \theta \) получим искомые уравнения

\[ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \omega \langle \varphi^2 \rangle \right] + c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \langle \varphi^2 \rangle \right] = - \frac{\omega}{\tau} \langle \varphi^2 \rangle \]

\[ \frac{\partial k}{\partial t} + \delta \omega / \delta x = 0 \]

Поставим для (2.2) начальную задачу, т. е. будем считать, что при \( t = 0 \) решение имеет вид (1.2) или (1.3) с заданными значениями s и k. Тогда при \( t > 0 \) волновое число не изменяется, а s будет меняться со временем. При этих условиях (2.2) интегрируется

\[ I (s, k_0 \Lambda) \exp (t/\tau) = \text{const} \]

где функция I в области I равна

\[ I = \left[ K^2 (s) + \frac{\pi^2}{4 k_0^2 \Lambda^2} \right]^{1/2} \left[ E (s) - (1 - s^2) K (s) \right] \]

и в области II

\[ I = \left[ K^2 (s) + \frac{\pi^2}{4 k_0^2 \Lambda^2} s^2 \right]^{1/2} E (s) \]
Здесь \( E(s) \) — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем \( s \). График функции \( I(s) \) приведен на фиг. 2 (1 — область \( I, v^{c} > c \); 2 — область \( I, v^{c} < c \); 3 — область \( II, v^{c} < c \); 4 — область \( II, v^{c} > c \)). Уравнение (2,3) в явном виде определяет зависимость \( s(t) \) от \( t \). Основные особенности в поведении решения определяются зависимостью \( I(s) \). В области \( I \) \( I(s) \) — монотонная функция своего аргумента; в результате \( s(t) \) уменьшается и волна становится все более синусоидальной. Если \( v^{c} > c \), то амплитуда волны убывает до нуля, и этот процесс качественно похож на описан-ый в [15]. С ростом амплитуды декремент затухания увеличивается и при \( s = 1 \) превышает в два раза значение, полученное в линейной теории. Таким образом, быстрая волна конечной амплитуды в области \( I \) затухает быстрее, чем это следует из линейного приближения.

В случае медленной волны в области \( I \) при \( k_{0} \Lambda < 1 \) возможен новый эффект, связанный с остановкой волны на конечном расстоянии (но за бесконечное время). При этом частота волны обращается в нуль и процесс выходит на стационарный режим \( \varphi = \varphi(x) \). Зависимость параметра \( s_{0}^{c} \), характеризующего предельную форму медленной волны в области \( I \) при \( t \to \infty \) от \( k_{0} \Lambda \) приведена на фиг. 3 (кривая \( I \)).

Для медленной волны в области \( II \) \( I(s) \) — также монотонная функция и при \( t \to \infty \) \( s \) стремится к асимптотическому значению \( s_{0}^{c} (k_{0} \Lambda) \) (фиг. 3, кривая \( 2 \)), при котором \( \omega = 0 \). Волна останавливается также на конечном расстоянии.

В случае быстрой волны в области \( III \) \( I(s) \) имеет минимум (фиг. 2) при некотором \( s = s_{0}^{c} (k_{0} \Lambda) \) (фиг. 3, кривая \( 3 \)). Тогда, вне зависимости от начальных условий параметр \( s(t) \) за конечное время стремится к \( s_{0}^{c} \), после чего формула (2.3) теряет смысл. Параметры волны уже не могут плавно «перестраиваться», и ее квазистационарная структура разрушается. Возникающий в этом случае режим не поддается анализу. Если пренебречь нелинейностью (формально \( \Lambda \to \infty \), то падающий участок на графике \( I(s) \) исчезает и функция \( I(s) \) становится монотонной. Таким образом, разрушение стационарной структуры волны целиком обусловлено нелинейностью.

3. Рассмотрим граничную задачу, когда при \( x = 0 \) волна имеет стационарную форму. В этом случае для нахождения \( s(x) \) имеем уравнение

\[
\frac{dE}{dx} = -\frac{\omega}{\tau_{0}^{2}} \langle \varphi_{0}^{2} \rangle, \quad R = \langle \varphi_{0}^{2} \rangle
\]

где \( \omega = \text{const}, k \) определяется дисперсионными соотношениями. Хотя ре-

\[\text{Фиг. 2} \quad \text{Фиг. 3}\]
шение уравнения (3.1) сводится к квадрату, его особенности удобнее проанализировать, исходя из зависимостей \( R \) и \( \langle q \rangle \) от \( s \). Так как функция \( \langle q \rangle \) положительная, \( R \) уменьшается с расстоянием до своего минимального значения. Поскольку \( R (s) \) имеет минимум для медленных волн в области \( II \), то уравнение (3.1), находиме с некоторого расстояния, становится противоречивым, что означает невозможность распространения стационарной волны этого типа на большие расстояния. Для быстрых волн в областях \( II \) и \( I \) (в последнем случае при \( \Lambda < c \)) \( R (s) \) определена лишь при \( s > s_0 \) (\( s_0 > 0 \)), причем зависимость от \( s \) монотонная. Поскольку \( \langle q \rangle \) в точке \( s_0 \) отлична от нуля, то в этом случае стационарная структура волны также не может существовать на больших расстояниях от границы. В этом случае говорить о разрушении волны необходимо с осторожностью, так как вблизи критической точки \( k \to 0 \) и метод усреднения, вообще говоря, неприемлем.

Для медленных и быстрых (при условии \( \Lambda \gg c \)) волна в области \( I \) уравнение (3.1) применимо на любых расстояниях и с его помощью затухание стационарной волны может быть полностью описано.

4. Наряду с периодическими волнами существенно нестационарной формы (см. уравнение (1)) возможно распространение солитонов, которым соответствуют периоды фазы \( \varphi \), равные \( 2\pi \) (поскольку они получили в нелинейной оптике название 2-импульсов). Эти волнами определяется скорость солитона по формуле

\[
(4.1) \quad k K (s) = \alpha s / \Lambda S |v^2 - c^2|
\]

С учетом (4.1) получаем для \( I \) выражение

\[
(4.2) \quad I = |v^2| / |v^2 - c^2| - k
\]

Подставляя (4.2) в (2.3), находим \( v (t) \)

\[
(4.3) \quad v (t) = c [1 - (1 - c^2/v_o^2) \exp 2t/x]^{-1/2}
\]

где \( v_o = v (t = 0) \). Отсюда следует, что скорость быстрой волны неограниченно возрастает за конечное время \( \Delta = -1/4 \ln (1 - c^2/v_o^2) \), причем солитон за это время проходит конечное расстояние \( L = 1/2 \ln [(c + v_o)/(v_o - c)] \). При \( t \to T \), \( \varphi / d\varphi \to 0 \), а \( \varphi / d\varphi \) стремится к конечному значению. При \( t > T \) импульс не может оставаться стационарным.

Для медленной волны при \( t \to \infty \) \( \varphi / d\varphi \to 0 \), а \( \varphi / d\varphi \) к постоянно-му значению. Хотя затухание в этом случае происходит бесконечно долго, солитон проходит конечное расстояние \( L = 1/2 \ln [(c + v_o)/(c - v_o)] \). Следовательно, из-за затухания невозможно распространение уединенной волны на большие расстояния.

5. Кроме рассмотренных 2-импульсов возможны также \( \pi \)-импульсы, существование которых обусловлено диссипацией. Эти волны стационарные и осуществляют релаксацию среды из инвертированного состояния с фазой \( \pm \pi \) (из (4.1) можно видеть, что решение \( \varphi = \pm \pi \) неустойчиво относительно возмущений с масштабом, превышающим \( \Lambda \)) к нормальному с \( \varphi = 0 \).
(ср. [17]). В отличие от 2 π-импульсов решение в диссипативной среде в виде π-импульса можно найти при любом τ (для малых τ — фиг. 4, а, для больших τ — фиг. 4, б). При τ → 0 приближенно имеем

\[
\frac{d\psi}{dz} = \frac{\sigma t}{v\lambda} \sec\theta \frac{c(t)(x - vl)}{\lambda v}
\]

По виду это решение совпадает с решением для 2 π-импульса. При v = c и любом τ решение (5.1) точное.

Авторы благодарны А. Н. Малахову и Л. А. Островскому за обсуждение результатов работы.

Поступила 29 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиборев К. М. К теории механизма намагничения ферромагнетиков. ЖЭТФ, 1945, т. 15, вып. 1, 2.
11. Авербух А. З., Венцшанов Е. В. Стационарные решения дисперсионных систем для нелинейных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
12. Куликов И. О. Распространение волн в туннельном переходе Джозефсона при наличии вихрей, и электродинамика слабой сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 6.
15. Пелиновский Е. П. О посвящении нелинейных волн в диспергирующих средах. ПМТФ, 1971, № 2.
16. Островский Л. А., Пелиновский Е. П. Метод упрощения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.