УДК 539.375

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ТЕЛЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

С. М. Гулиев

Азербайджанский государственный педагогический университет,
AZ1000 Баку, Азербайджан
E-mail: salehm@rambler.ru

Рассматривается задача механики разрушения о зарождении трещин, исходящих из контуров круговых отверстий перфорированного изотропного тела при продольном сдвиге. Решение задачи о равновесии перфорированного тела при продольном сдвиге с зонами предразрушения сводится к решению одной бесконечной алгебраической системы и нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром типа ядра Коши. Из решения этих уравнений находятся усилия в зонах зарождения трещин. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельного разрыва смещений материала.

Ключевые слова: перфорированное тело, зона предразрушения, связи между берегами.

Постановка задачи. Рассматривается изотропная упругая среда, ослабленная двоякопериодической системой круговых отверстий, симметричных относительно осей координат и имеющих радиусы $\lambda < 1$ и центры в точках (рис. 1)

$$P_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$\omega_1 = 2, \qquad \omega_2 = 2h\,\mathrm{e}^{i\alpha}, \quad h > 0, \quad \mathrm{Im}\,\omega_2 > 0.$$

Полагается, что контуры круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. Имеет место антиплоская деформация: на бесконечной плоскости, перпендикулярной оси y, вдоль осей отверстий действует касательное напряжение τ_y^∞ (продольный сдвиг на бесконечности).

По мере увеличения интенсивности внешних нагрузок в теле вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. При возрастании τ_y^∞ на поверхности отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами связей с заданной диаграммой деформирования.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D, занятой материалом среды, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2.

Как известно, при антиплоской деформации поле напряжений и смещений можно описать с помощью одной аналитической функции комплексной переменной $z = x + iy$ [1].

Считается, что из контуров круговых отверстий исходят симметричные прямолинейные зоны предразрушения, направленные вдоль оси абсцисс. В рассматриваемом случае

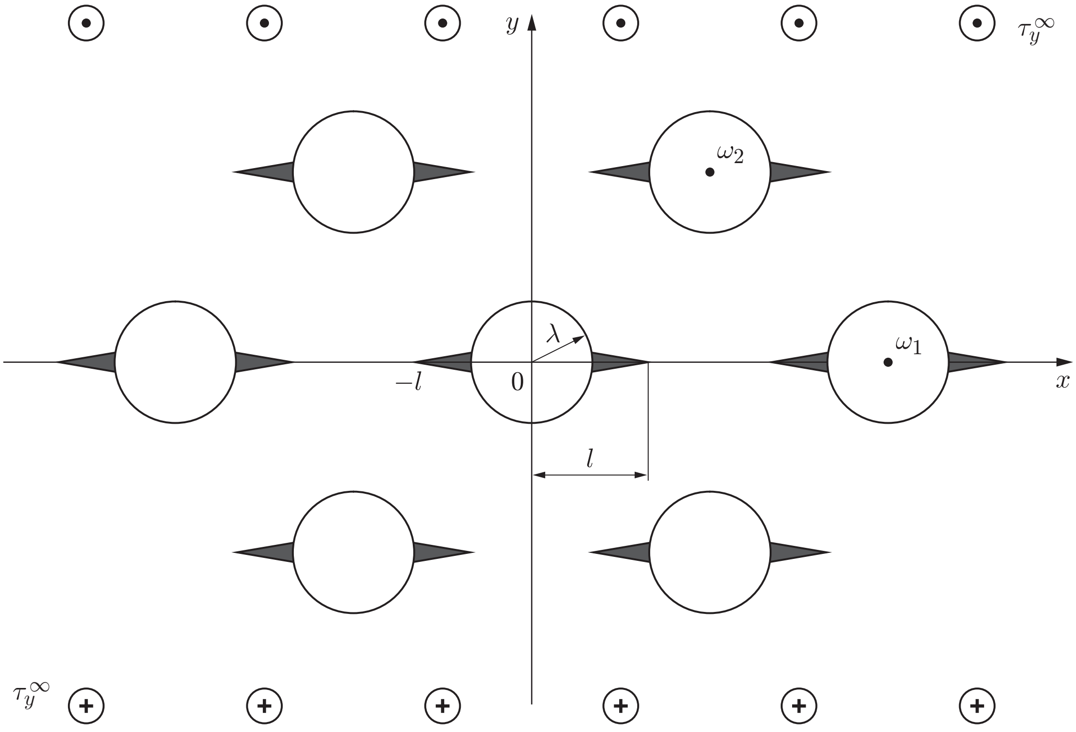

Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения о зарождении трещин в перфорированном теле

возникновение зародышевых трещин в перфорированном теле представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее не известен и должен быть определен в процессе решения задачи. При действии внешней нагрузки на перфорированное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают касательные усилия $q_y(x)$. Эти напряжения заранее не известны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

С использованием соотношений [1] и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах прямолинейных зон предразрушения задача сводится к определению одной аналитической функции $F(z)$ из краевых условий

$$F(\tau)\,\mathrm{e}^{i\theta} - \overline{F(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\theta} = 0, \qquad F(x) - \overline{F(x)} = -2iq_y(x) \quad \text{на } L, \tag{1}$$

где $\tau = \lambda\,\mathrm{e}^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$ ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$); x — аффикс точек берегов зон предразрушения, направленных вдоль оси абсцисс.

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими разрыв смещений зон предразрушения и усилия в связях. Без потери общности эти соотношения представим в виде

$$w^+(x,0) - w^-(x,0) = C(x, q_y(x))q_y(x), \tag{2}$$

где функцию $C(x, q_y(x))$ можно рассматривать как эффективную податливость связей; $w^+ - w^-$ — разрыв смещений зоны предразрушения.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического разрыва смещений зоны предразрушения

$$w^+ - w^- = \delta_c, \tag{3}$$

где δ_c — характеристика сопротивления материала перфорированного тела трещинообразованию.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (1) будем искать в виде

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z); \tag{4}$$

$$F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \, \frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \qquad F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L g(t)\zeta(t-z)\,dt + A \tag{5}$$

(интегралы в (5) берутся по линии $L = \{[-l, -\lambda] + [\lambda, l]\}$).

Функция $\gamma(z)$ называется эллиптической функцией Вейерштрасса [2]; $\zeta(z)$ — ζ-функция Вейерштрасса; $g(t)$ — искомая функция, характеризующая разрыв смещений зон предразрушения:

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \, \frac{d}{dx} \, [w^+(x,0) - w^-(x,0)] \quad \text{на} \quad L$$

(μ — постоянная материала среды).

Неизвестная функция $g(x)$ и искомые постоянные α_{2k} определяются из краевых условий (1).

Для вывода уравнений относительно коэффициентов α_{2k+2} функции $F_1(z)$ первое краевое условие (1) преобразуем к виду

$$F_1(\tau)\,\mathrm{e}^{i\theta} - \overline{F_1(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\theta} = if_2(\theta), \tag{6}$$

где $if_2(\theta) = -F_2(\tau)\,\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{F_2(\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\theta}$.

Для решения краевой задачи (6) применим метод степенных рядов. Будем считать, что функция $if_2(\theta)$ на контуре $|\tau| = \lambda$ разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии задачи этот ряд имеет вид

$$if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k+1}\,\mathrm{e}^{(2k+1)i\theta}, \qquad \operatorname{Re} A_{2k+1} = 0; \tag{7}$$

$$A_{2k+1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} if_2(\theta)\,\mathrm{e}^{-(2k+1)i\theta}\,d\theta \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив в последнее соотношение (7) выражение для $if_2(\theta)$ и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим

$$A_{2k+1} = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_L g(t) f_{2k+1}(t)\,dt. \tag{8}$$

В соотношении (8) функции $f_{2k+1}(t)$ определяются соотношениями

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\,\zeta^{2k}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!}\,\zeta^{(2k+2)}(t).$$

Подставляя в левую часть краевого условия (6) вместо функций $F_1(\tau)$, $\overline{F_1(\tau)}$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z = 0$, а в правую часть (6) вместо функции $if_2(\theta)$ — ряд Фурье (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях

$\exp(i\theta)$ в обеих частях, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2j+2}

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2}\lambda^{2j+2} r_{0,j} + \alpha_0 - \alpha_2 = A_1,\\ \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+2}\lambda^{2j+2} r_{n,j}\lambda^{2n} - \alpha_{2j+2} = A_{2n+1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь

$$r_{n,j} = \frac{(2n+2j+1)!}{(2n)!(2j+1)!}\,\frac{g_{n+j+1}}{2^{2n+2j+2}}, \qquad r_{0,0} = 0,$$

$$g_{n+j+1} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{T^{2n+2j+2}}, \qquad T = \frac{1}{2}\,P_{mn},$$

штрих означает, что при суммировании исключаются индексы $m = n = 0$.

Требуя, чтобы функции (4) удовлетворяли краевому условию на берегах зоны предразрушения L, для определения неизвестной функции $g(x)$, характеризующей разрыв смещений зоны предразрушения при переходе через линию L, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_L g(t)\zeta(t-x)\,dt - \operatorname{Im}\left[A + F_1(x)\right] = q_y(x) \quad \text{на} \quad L, \tag{10}$$

где t — аффикс точек берегов зоны предразрушения L, направленных по оси абсцисс.

Система алгебраических уравнений (9) и сингулярное уравнение (10) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить искомую функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k+2}. Определив функции $F_1(z)$, $g(x)$, можно найти напряженно-деформированное состояние перфорированного тела при наличии зон предразрушения.

Методика численного решения и анализ. Используя в основном параллелограмме периодов разложение

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1} z^{2j+1}}{2^{2j+1}},$$

сингулярное интегральное уравнение (10) после ряда преобразований представим в форме

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t-x} + \frac{1}{\pi}\int_L g(t)K_0(t-x)\,dt - \operatorname{Im}\left[A + F_1(x)\right] = q_y(x); \tag{11}$$

$$K_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{j+1}\,\frac{t^{2j+1}}{2^{2j+1}}.$$

Преобразуем интегральное уравнение (11) к виду, более удобному для нахождения приближенного решения. Учитывая, что $g(x) = -g(-x)$, и используя замену переменных, уравнение (11) представим в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{\lambda_1}^{1} \frac{\xi p(\xi)}{\xi^2 - \xi_0^2}\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{1} K_0^0(\xi,\xi_0)p(\xi)\,d\xi = \operatorname{Im}\left[A + F_1(\xi_0)\right] + q_y(\xi_0),$$

где

$$\xi_0 = \frac{x}{l}, \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda}{l}, \qquad p(\xi) = g(t), \qquad \xi = \frac{t}{l}, \qquad \lambda_1 \leqslant \xi_0 \leqslant 1,$$

$$K_0^0(\xi, \xi_0) = K_0(\xi - \xi_0) + K_0(\xi + \xi_0).$$

Проведем еще одну замену переменных:

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\tau + 1) + \lambda_1^2, \qquad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При такой замене переменных отрезок интегрирования переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное интегральное уравнение (11) принимает стандартную форму

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{p(\tau)\,d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau)B(\eta, \tau)\,d\tau = \operatorname{Im}[A + F_1(\eta)] + q_y(\eta), \tag{12}$$

где

$$B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2}\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1}\Big(\frac{l}{2}\Big)^{2j+2} u_0^j A_j,$$

$$A_j = \Big[(2j + 1) + \frac{(2j + 1)(2j)(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Big(\frac{u}{u_0}\Big) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2j + 1)(2j)(2j - 1)\cdots[(2j + 1) - (2j + 1 - 1)]}{1 \cdot 2 \cdots (2j + 1)}\Big(\frac{u}{u_0}\Big)^j\Big].$$

Поскольку в перфорированном теле напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (12) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим это решение в виде

$$p(\eta) = p_0(\eta)\sqrt{1 - \eta^2},$$

где $p_0(\eta)$ — новая неизвестная регулярная функция.

Используя квадратурные формулы, интегральное уравнение (12) можно свести к системе $M + 1$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{p_0(\tau_m)}{M + 1}\sin^2\frac{\pi m}{M + 1}\Big(\frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r)\Big) = \pi[H(\eta_r) + q_y(\eta_r)]$$
$$(r = 1, 2, \ldots, M + 1). \tag{13}$$

Здесь

$$\tau_m = \cos\frac{\pi m}{M + 1} \quad (m = 1, 2, \ldots, M), \qquad H(\eta_r) = \operatorname{Im}[A + F_1(\eta_r)],$$

$$\eta_r = \cos\frac{2r - 1}{2(M + 1)}\,\pi \qquad (r = 1, 2, \ldots, M + 1).$$

Алгебраическая система $M + 1$ уравнений (13) для определения неизвестных $p_0(\tau_1), p_0(\tau_2), \ldots, p_0(\tau_m)$ и $(l - \lambda)/\lambda$ удовлетворяет дополнительному условию, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций (см. [3. С. 75]).

В правую часть системы (13) входят неизвестные значения напряжений $q_y(\eta_r)$ в узловых точках, принадлежащих зоне предразрушения L. Неизвестное напряжение в связях, возникающее на берегах зоны предразрушения L, определяется из дополнительного условия (2). Используя полученное решение, соотношение (2) можно записать в виде

$$g(x) = \frac{\mu}{2}\frac{d}{dx}\left[C(x, q_y(x))q_y(x)\right]. \tag{14}$$

Уравнение (14) позволяет определить усилия $q_y(x)$ в связях в зоне предразрушения L. Представим данное соотношение в виде

$$-\frac{2}{\mu}\int\limits_l^x g(x)\,dx = C(x, q_y(x))q_y(x). \tag{15}$$

Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (15) в узловых точках, содержащихся в зоне предразрушения (λ, l). В результате получаем алгебраическую систему M уравнений для нахождения приближенных значений $q_y(\eta_m)$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$:

$$\begin{gathered}
C_0 p_0(\eta_1) = C(\eta_1, q_y(\eta_1))q_y(\eta_1),\\
C_0(p_0(\eta_1) + p_0(\eta_2)) = C(\eta_2, q_y(\eta_2))q_y(\eta_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_0\sum_{m=1}^{M} p_0(\eta_m) = C(\eta_M, q_y(\eta_M))q_y(\eta_M),
\end{gathered} \tag{16}$$

где $C_0 = -2\pi(l - \lambda)/(\mu M)$.

Поскольку размер зоны предразрушения l не известен, объединенная алгебраическая система уравнений (9), (13), (16) является нелинейной даже при линейных связях. Для ее решения используется метод последовательных приближений [4], суть которого заключается в следующем. Решаем объединенную алгебраическую систему при некотором определенном значении l_* относительно остальных неизвестных, которые входят в объединенную систему линейным образом. Значения l_* и соответствующие значения остальных неизвестных, вообще говоря, не удовлетворяют последнему уравнению системы (13). Поэтому, подбирая значения параметра l, будем многократно повторять вычисления, до тех пор пока последнее уравнение (13) не будет удовлетворяться с заданной точностью. В каждом приближении объединенная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

В случае нелинейного закона деформирования связей при определении усилий в зоне предразрушения используется итерационный метод, подобный методу упругих решений [5]. Считается, что при $w^+ - w^- \leqslant w_*$ закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения является линейным. Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются только в случае, если на части зоны предразрушения справедливо неравенство $w^+ - w^- > w_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов зоны предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливостью, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится по аналогии с определением секущего модуля с использованием метода переменных параметров упругости [6]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда действующие вдоль

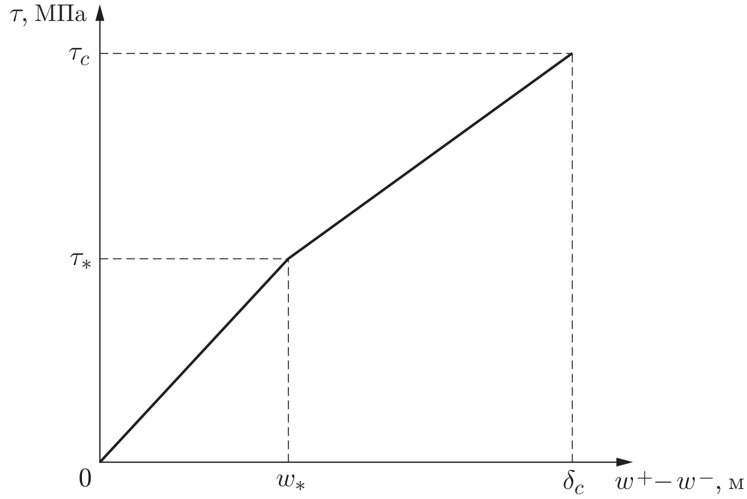

Рис. 2. Зависимость усилий сдвига связи $\tau(x)$ от разрыва смещений $w^+ - w^-$ зоны предразрушения

зоны предразрушения усилия, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [7] (рис. 2). При $w^+ - w^- > w_*$ закон деформирования описывался линейной зависимостью, определяемой точками (w_*, τ_*) и (δ_c, τ_c), причем при $\tau_c \geqslant \tau_*$ имела место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей). В численных расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Расчеты выполнены для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались случаи расположения отверстий в вершинах треугольной ($h = 1$, $\alpha = \pi/3$) и квадратной ($h = 1$, $\alpha = \pi/2$) сеток. В результате численного расчета найдены зависимости длины зоны предразрушения, усилия в связях и раскрытия противоположных берегов зоны предразрушения от параметра нагружения τ_y^∞. При этом параметры $\tau_* = 50$ МПа, $\tau_c = 2\tau_*$, $w_* = 10^{-7}$ м, $\delta_c = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м принимались в качестве постоянных. На рис. 3 представлена зависимость относительной длины зоны предразрушения $d = (l - \lambda)/\lambda$ от безразмерного значения интенсивности нагружения τ_y^∞/τ_* для треугольной сетки отверстий.

На рис. 4 приведена зависимость усилий в связях q_y/τ_y^∞ вдоль зоны предразрушения от безразмерной координаты $x' = (x - \lambda)/l$ для треугольной сетки отверстий.

Для определения предельно равновесного состояния зоны предразрушения, при котором появляется трещина, используется условие (3).

Предельная внешняя нагрузка, при которой в точке $x = \pm\lambda$ образуется трещина, с использованием полученного решения определяется следующим условием:

$$C(\lambda, q_y(\lambda))q_y(\lambda) = \delta_c. \tag{17}$$

Решение объединенной алгебраической системы (9), (13), (16), (17) позволяет определить критическое значение внешней нагрузки, размер зон предразрушения и усилия в связях в состоянии предельного равновесия, при котором в перфорированном теле образуются трещины.

Анализ предельно равновесного состояния перфорированного тела, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы (9), (13), (16) и критерия появления трещины (17) при различных законах де-

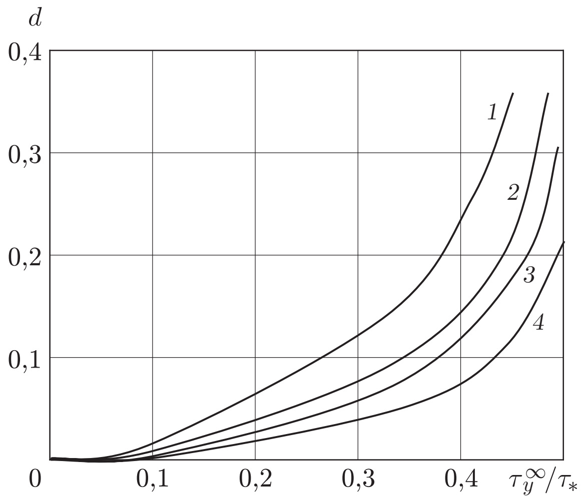

Рис. 3

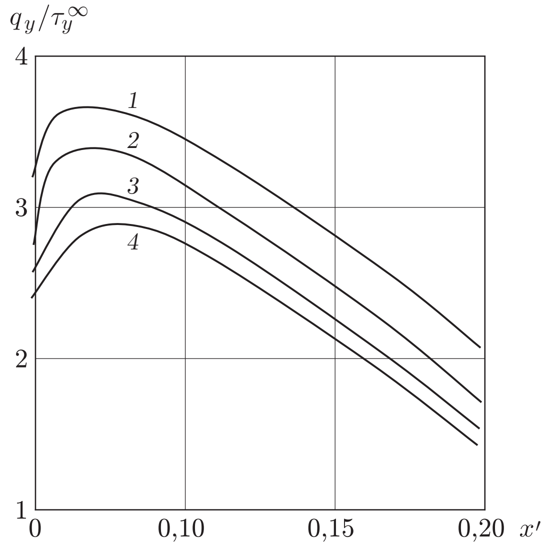

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость относительной длины зоны предразрушения d от интенсивности нагружения τ_y^∞/τ_* при различных значениях радиуса отверстия: *1* — $\lambda = 0{,}2$; *2* — $\lambda = 0{,}3$; *3* — $\lambda = 0{,}4$; *4* — $\lambda = 0{,}5$

Рис. 4. Зависимость усилий в связях q_y/τ_y^∞ вдоль зоны предразрушения от безразмерной координаты x' при различных значениях радиуса отверстия: *1* — $\lambda = 0{,}2$; *2* — $\lambda = 0{,}3$; *3* — $\lambda = 0{,}4$; *4* — $\lambda = 0{,}5$

формирования связей, упругих характеристиках материалов и геометрических параметрах перфорированного тела. Из решения полученных алгебраических систем непосредственно определяются усилия в связях и разрыв смещений зон предразрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
2. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970.
3. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976.
4. **Мирсалимов В. М.** Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
5. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
6. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
7. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычисл. механика сплош. сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 22–39.

Поступила в редакцию 22/VI 2010 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2011 г.