

УДК 537.527

**Нестационарная трехмерная модель  
электрической дуги.  
Часть 1. Математическая модель  
и результаты тестирования**

**Р.М. Урусов, И.Р. Урусова**

*Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР,  
Бишкек, Кыргызстан*

E-mail: urusov\_rus@mail.ru

Представлена нестационарная трехмерная математическая модель электрической дуги постоянного тока в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы. С целью тестирования модели и компьютерной программы выполнен расчет обтекания кругового цилиндра изотермическим ламинарным потоком вязкой жидкости (тестирование динамической части системы уравнений) и расчет осесимметричной электрической дуги с контрагированной анодной привязкой. Удовлетворительное согласование результатов расчета с данными эксперимента свидетельствует в целом о корректности математической модели и методики численного решения.

**Ключевые слова:** численное моделирование, нестационарная трехмерная математическая модель электрической дуги.

**Введение**

Возрастающие масштабы разработки и применения электродуговых устройств и аппаратов [1–3] требуют дальнейшего изучения теплофизических процессов и свойств дуговой плазмы. Наряду с экспериментальными методами исследования, большое значение имеют теоретические методы, в частности, вычислительный эксперимент. Широко используемые аналитические, одно- и двухмерные стационарные математические модели [4–6] позволили существенно расширить и углубить знания о физике электродуговых процессов. Вместе с тем, во многих электродуговых установках имеют место нестационарные процессы, не обладающие осевой симметрией, и в этой связи развитие нестационарной трехмерной математической модели является актуальной задачей.

Математическая сложность и вычислительная ресурсоемкость подобного класса задач до недавнего времени сдерживали разработку их решений, и лишь в последнее время с дальнейшим развитием теории численных методов и компьютерных технологий количество исследований стало возрастать (см., например, [7–11]).

В настоящей статье представлена нестационарная трехмерная математическая модель электрической дуги в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы и приведены результаты тестирования модели и компьютерной программы расчета. Выполнен расчет обтекания цилиндра изотермическим ламинарным потоком

вязкой жидкости и расчет осесимметричной электрической дуги с контрагированной анодной привязкой.

### 1. Система уравнений электродуговой плазмы

Основные уравнения магнитной газовой динамики и математические модели электрической дуги, включая принятые допущения, детально излагаются в работах [2–6]. Стационарная модель столба электрической дуги в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы развита в работе [7] на трехмерный случай, и в настоящей работе система уравнений дополняется нестационарным слагаемым. В декартовой системе координат  $x, y, z$  уравнения электрической дуги могут быть записаны в следующем виде [3, 5, 7]:

– уравнение неразрывности газа —

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

– уравнение неразрывности электронного газа —

$$\partial N_e / \partial t + \operatorname{div}[N_e(\mathbf{U} + \mathbf{U}_d + \mathbf{U}_t + \mathbf{U}_a)] = R_e, \quad (2)$$

– уравнения баланса энергии электронного газа —

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} k T_e + U_i \right) N_e + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{5}{2} k T_e + U_i \right) N_e \mathbf{U}_e \right] = \operatorname{div}(\lambda_e \operatorname{grad} T_e) + \mathbf{j}^2 / \sigma - \psi - B(T_e - T), \quad (3)$$

– уравнение баланса энергии тяжелых частиц —

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} k T (N_i + N_a) + \operatorname{div} \left[ \frac{5}{2} k T (N_i + N_a) \mathbf{U} \right] = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + B(T_e - T), \quad (4)$$

– уравнения движения газа в направлениях осей  $x, y, z$  соответственно:

$$\partial \rho u / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} u) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) - \partial P / \partial x + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_x + s_x + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\partial \rho v / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} v) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) - \partial P / \partial y + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_y + s_y, \quad (6)$$

$$\partial \rho w / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} w) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) - \partial P / \partial z + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_z + s_z, \quad (7)$$

– уравнения Максвелла —

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

– обобщенный закон Ома —

$$\mathbf{E} + \mu_0(\mathbf{U} \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} / \sigma + (\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \operatorname{grad} P_e) / q_e N_e, \quad (9)$$

– закон Дальтона —

$$P / k T = N_i + N_a + N_e T_e / T. \quad (10)$$

Принято, что электродуговая плазма аргона атмосферного давления является однократно ионизованной, квазинейтральной, течение ламинарное, дозвуковое, излучение объемное; вязкой диссипацией энергии пренебрегается, приэлектродные процессы не рассматриваются. В рамках нестационарной математической модели переменное во времени магнитное поле дуги обуславливает индуцированное электрическое поле. Однако его величина в рассматриваемом диапазоне параметров дуги весьма незначительна и это позволяет использовать модель квазистационарного (низкочастотного) приближения.

При записи уравнений (1–10) использованы следующие обозначения:  $t$  — время,  $\rho$ ,  $\lambda_e$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\psi$  — соответственно плотность газа, теплопроводность электронного газа

и газа тяжелых частиц, вязкость, электропроводность, излучение,  $m$  — масса атома плазмообразующего газа,  $N_i$ ,  $N_a$ ,  $N_e$  — концентрации ионов, атомов и электронов соответственно,  $R_e = N_e (N_a K_i - N_e N_i K_r)$  — скорость генерации электронов, где  $K_i$ ,  $K_r$  — константы ударной ионизации и трехчастичной рекомбинации соответственно,  $U_i$  — потенциал ионизации плазмообразующего газа,  $P_e = N_e k T_e$  — парциальное давление электронов,  $k$  — постоянная Больцмана,  $B$  — коэффициент энергообмена между электронами и тяжелыми частицами,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения,  $q_e$  — заряд электрона,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{H}$ , — соответственно векторы скорости, напряженности электрического поля, плотности электрического тока, напряженности магнитного поля,  $T$ ,  $T_e$  — температура тяжелых частиц и электронов,  $P$  — давление,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — соответственно компоненты вектора скорости в направлениях осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\mathbf{U}_d$ ,  $\mathbf{U}_t$ ,  $\mathbf{U}_a$  — векторы скоростей дрейфа электронов, термо- и амбиполярной диффузии, определяемые по формулам:  $\mathbf{U}_d = \mathbf{j}/(q_e N_e)$ ,  $\mathbf{U}_t = -D_a/T_e \text{grad} T_e$ ,  $\mathbf{U}_a = -D_a/N_e \text{grad} N_e$ , где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_z$  — дополнительные к  $\text{div}(\mu \text{grad} u)$ ,  $\text{div}(\mu \text{grad} v)$ ,  $\text{div}(\mu \text{grad} w)$  вязкие слагаемые:

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$s_y = \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$s_z = \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].$$

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства неравновесной аргонной плазмы рассчитываются в соответствии с методикой [5].

Электромагнитная часть задачи решается в переменных  $\varphi - \mathbf{A}$  [7–11], где  $\varphi$  — скалярный потенциал электрического поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля, связанный с  $\mathbf{H}$  соотношением  $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ . Используя обобщенный закон Ома, условие сохранения электрического тока  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  и уравнения Максвелла, приведем уравнения для расчета  $\varphi$  и компонент  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  к следующему виду:

$$\text{div}(\sigma \text{grad} \varphi) = \text{div}[\sigma \mu_0 (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) - \sigma (\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \text{grad} P_e)/q_e N_e], \quad (11)$$

$$\text{div}(\text{grad} A_x) = -j_x, \text{div}(\text{grad} A_y) = -j_y, \text{div}(\text{grad} A_z) = -j_z. \quad (12)$$

По рассчитанным значениям  $\varphi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  путем численного дифференцирования вычисляются компоненты векторов плотности электрического тока, напряженности электрического и магнитного полей.

Использование скалярного потенциала  $\varphi$  позволяет избежать вычисления трех компонент вектора  $\mathbf{E}$ , а введение векторного потенциала  $\mathbf{A}$  позволяет избежать вычисления вектора  $\mathbf{H}$  через тройной интеграл (закон Био–Савара–Лапласа), что существенно уменьшает время расчета. Дело в том, что исходная система дифференциальных уравнений решается численно итерационным методом. В рамках трехмерной модели вычисление в итерационном процессе напряженности  $\mathbf{H}$  (либо индукции  $\mathbf{B}$ ) магнитного поля непосредственно по формуле Био–Савара–Лапласа потребует чрезмерно много компьютерного времени счета. По оценкам работ [7, 8], время счета одного варианта может составлять многие сотни часов, что выходит за границы разумного.

В ряде работ (см., например, [12, 13]) вычисление индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  проводится по формуле Био–Савара–Лапласа. В целях экономии времени счета, как

Таблица 1

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства материала электродов

Параметры	Вольфрам	Сталь	Графит
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$2 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$
Теплоемкость $c$ , Дж/(кг·К)	200	650	$2 \cdot 10^3$
Теплопроводность $\lambda$ , Вт/(м·К)	100	25	100
Электропроводность $\sigma$ , (Ом·м) <sup>-1</sup>	$10^6$	$7 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$

поясняют авторы [12, 13], вычисление **B** исключается из общей схемы решения на некоторое число итераций. Вместе с тем, проведенный в работе [7] анализ показал, что подобная методика приводит к существенному ослаблению воздействия электромагнитных сил на потоки дуговой плазмы и, как следствие, не позволяет получить реалистичный результат.

Температуры неплавящихся катода и анода (для краткости обозначенные  $T_a^k$ ) определяются из уравнения теплопроводности

$$\partial \rho c T_a^k / \partial t = \text{div}(\lambda \text{grad } T_a^k) + \mathbf{j}^2 / \sigma \quad (13)$$

где  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  — плотность, удельная теплоемкость, теплопроводность и электропроводность материала электродов. Теплофизические свойства материала электродов (средние значения) определялись по справочным данным [14, 15, 16], приняты не зависящими от температуры и приведены в табл. 1.

## 2. Метод решения уравнений

Следуя методике [17], система уравнений (1–13) для рассчитываемых переменных после несложных преобразований может быть записана в виде обобщенного уравнения

$$\partial \alpha \rho \Phi / \partial t + \text{div}(\beta \rho \mathbf{U} \Phi) = \text{div}(\gamma \text{grad} \Phi) + \delta, \quad (14)$$

дифференциальная форма записи которого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \alpha \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \beta \rho u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \beta \rho v \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \beta \rho w \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta, \quad (15)$$

где  $\Phi$  — одна из неизвестных:  $N_e$ ,  $T_e$ ,  $T$ ,  $T_a^k$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\varphi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ . Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  зависят от смысла переменной  $\Phi$  и приведены в табл. 2. Поясним, что в левой части уравнения (14) при расчете температуры электронного газа  $T_e$  к вектору

Таблица 2

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  обобщенного уравнения (15)

$\Phi$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$N_e$	$1/\rho$	$1/\rho$	$D_a$	$R_e$
$T_e$	$1,5 k N_e / \rho$	$2,5 k N_e / \rho$	$\lambda_e$	$[\mathbf{j}^2 / \sigma - \psi - B(T_e - T) - R_e U_i]$
$T$	$1,5 k / m$	$2,5 k / m$	$\lambda$	$B(T_e - T)$
$T_a^k$	$\rho c$	0	$\lambda$	$\mathbf{j}^2 / \sigma$
$u$	1	1	$\mu$	$-\partial P / \partial x + \mu_0 [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_x + s_x + (\rho - \rho_e) \mathbf{g}$
$v$	1	1	$\mu$	$-\partial P / \partial y + \mu_0 [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_y + s_y$
$w$	1	1	$\mu$	$-\partial P / \partial z + \mu_0 [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_z + s_z$
$A_x$	0	0	1	$j_x$
$A_y$	0	0	1	$j_y$
$A_z$	0	0	1	$j_z$
$\varphi$	0	0	$\sigma$	$\text{div}[\sigma \mu_0 (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) - \sigma \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \text{grad} P_e] / q_e N_e$

скорости  $\mathbf{U}$  добавляются величины  $U_d$ ,  $U_t$  и  $U_a$ , а при расчете концентрации электронов  $N_e$  добавляется величина  $U_i$ .

Численное решение обобщенного дифференциального уравнения проводится методом конечных разностей, конечно-разностная аппроксимация осуществляется методом контрольного объема по неявной разностной схеме [17, 18], динамические переменные «скорость–давление» рассчитываются в рамках алгоритма SIMPLE'R [17]. В результате интегрирования по контрольному объему исходная система дифференциальных уравнений приводится к системе алгебраических уравнений, которая затем решается итерационным методом Зейделя–Гаусса с применением нижней релаксации.

Для расчета характеристик в нерегулярной области, включающей в себя дуговую плазму и электроды, используется метод фиктивных областей [19], адаптированный для расчета электрической дуги [20]. Вычисления проводятся на прямоугольной сетке с постоянным и одинаковым в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  сеточным шагом  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ ; аппроксимация криволинейных границ электродов осуществляется ступенчатым образом. Следует признать, что вследствие ограниченных вычислительных ресурсов приходится использовать довольно грубый сеточный шаг  $\Delta = 0,2\text{--}0,5$  мм, соизмеримый с радиальными размерами электродов. Это не позволяет аппроксимировать криволинейные границы электродов с высокой точностью.

Значения временного шага задавались в диапазоне  $\tau = 10^{-5} - 10^{-4}$  с, что обеспечивает приемлемый уровень детализации физических процессов. Итерационная погрешность  $\varepsilon = |(\Phi_k - \Phi_{k-1})/\Phi_{k-1}|$  для тепловых и динамических характеристик задавалась равной  $10^{-3}$  и  $10^{-4}$  соответственно, для электромагнитных характеристик принималась  $\varepsilon = 10^{-6} - 10^{-5}$  ( $\Phi_k$ ,  $\Phi_{k-1}$  — значения переменной на  $k$  и  $k-1$  итерациях внутреннего цикла в момент времени  $t$ ). Указанные значения  $\varepsilon$  обеспечивали достижение асимптотического характера изменения погрешности в итерациях внутреннего цикла.

### 3. Граничные и начальные условия

Нестационарное дифференциальное уравнение (15) является уравнением эллиптического типа по пространственным координатам и параболического типа по временной координате. Для рассчитываемых переменных граничные условия задаются по периметру расчетной области, а начальные условия в момент времени  $t = 0$ .

При обтекании цилиндра изотермическим ламинарным потоком вязкой жидкости расчетная область является прямоугольным параллелепипедом  $ABCDEFGH$  с открытыми внешними границами, не ограниченными твердыми поверхностями (рис. 1).

По нормали к боковой границе  $ADGH$  в направлении оси  $y$  движется поток жидкости со скоростью  $v^0$  и для компонент вектора скорости задаются условия  $u = 0$ ,  $v = v^0$ ,  $w = 0$ . Массоперенос в направлении оси  $x$  отсутствует и компонента  $u$  вектора скорости на всех границах расчетной области полагается равной нулю. В целях экономии вычислительных ресурсов расчетная область в направлении оси  $x$  ограничена тремя сеточными слоями.

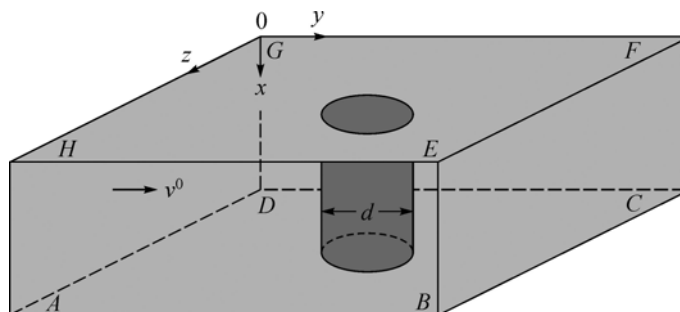


Рис. 1. Схема расчетной области обтекания цилиндра.

Для компонент  $v$ ,  $w$  вектора скорости на остальных границах ставятся условия гладкого сопряжения  $\partial/\partial n = 0$  ( $n$  — нормаль к поверхности границы). Боковые вертикальные границы располагаются от кругового цилиндра на достаточном удалении: 5–15 диаметров  $d$  цилиндра, обеспечивающем выполнение указанных условий. Давление на границах расчетной области определяется из условия  $\partial^2 P/\partial n^2 = 0$ .

При задании начальных условий принято, что в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость неподвижна.

Для электрической дуги с контрагированной анодной привязкой расчетная область является прямоугольным параллелепипедом  $ABCDEFGH$  (рис. 2, *a*) от среза катодного насадка в сечении  $HGFE$ . Катодный насадок в расчетную область не входит. На открытых боковых границах  $AHED$ ,  $CDEF$ ,  $BCFG$ ,  $ABGH$  ставятся условия гладкого сопряжения  $\partial/\partial n = 0$  ( $n$  — нормаль к поверхности) рассчитываемых характеристик с окружающей средой, течение электрического тока отсутствует.

Значения температуры и концентрации электронов для холодного не ионизованного газа полагаются равными  $T_e = T_e^{\min} = 3,5 \text{ кК}$ ,  $N_e = N_e^{\min} = 10^{17} \text{ м}^{-3}$ .

На срезе катодного насадка  $S_c$  радиусом  $R_c$  полагается полностью развитое течение плазмы с расходом  $G^*$ , по величине которого задается аксиальная скорость потока плазмы  $u_0$ . Для остальных рассчитываемых переменных ставятся условия гладкого сопряжения  $\partial/\partial x = 0$ . При расчете потенциала электрического поля  $\varphi$  принято, что на срезе катодного насадка электрический ток величиной  $I$  течет по нормали к сечению. На непроницаемой поверхности  $HGFE$  значения температуры и концентрации электронов полагаются равными  $T_e = T_e^{\min}$ ,  $N_e = N_e^{\min}$ , температура поверхности полагается равной  $T = T^0 = 300 \text{ К}$ , течение тока отсутствует, скорость газа равна нулю. Давление газа задается равным относительному значению  $P = P_0 = 1 \text{ Па}$ , компоненты векторного потенциала  $\mathbf{A}$  определяются из условия  $\partial \mathbf{A}/\partial x = 0$ .

Радиус привязки дуги на поверхности анода задается по результатам экспериментов [21]. На внешней границе анода  $ABCD$  потенциал электрического поля  $\varphi$  определяется из условия протекания электрического тока  $I$  по нормали к поверхности, для остальных переменных граничные условия совпадают с таковыми для твердой поверхности границы  $HGFE$ .

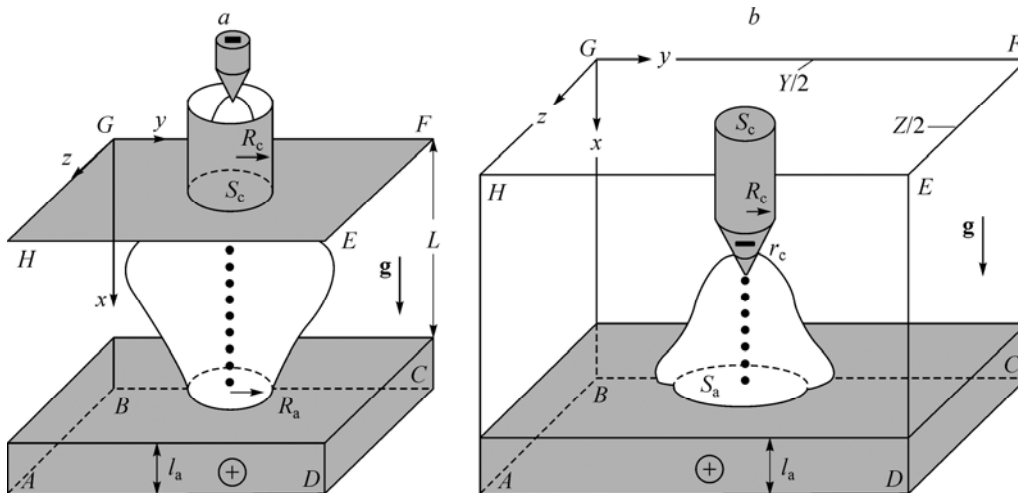


Рис. 2. Схема расчетной области.

*a* — дуга с контрагированной анодной привязкой, *b* — дуга со стержневым катодом,  $\bullet\bullet\bullet$  — центральная ось.

Таблица 3

Граничные условия (см. рис. 2, а)

Граница	Переменная
<i>AHED, CDEF, BCFG, ABGH</i>	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, \partial T / \partial \mathbf{n} = 0,$ $\partial U / \partial \mathbf{n} = 0, \partial P / \partial \mathbf{n} = 0, \partial \varphi / \partial \mathbf{n} = 0, \partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{n} = 0,$
<i>EFGH</i> кроме $S_c$	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, T = T^0,$ $\mathbf{U} = 0, P = P_0, \partial \varphi / \partial x = 0, \partial \mathbf{A} / \partial x = 0,$
Сечение катодного насадка $S_c$	$\partial N_e / \partial x = 0, \partial T_e / \partial x = 0, \partial T / \partial x = 0, \partial P / \partial x = 0, u = u_0,$ $\varphi_1 = \frac{I \cdot \Delta x + \int_0^y \int_0^z \sigma^{1,2} \varphi_2 dy dz}{\int_0^y \int_0^z \sigma^{1,2} dy dz}, \partial \mathbf{A} / \partial x = 0,$
<i>ABCD</i>	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, T = T^0, \mathbf{U} = 0, P = P_0,$ $\varphi_N = \frac{I \cdot \Delta x - \int_0^y \int_0^z \sigma^{N-1,N} \varphi_{N-1} dy dz}{\int_0^y \int_0^z \sigma^{N-1,N} dy dz}, \partial \mathbf{A} / \partial x = 0,$

Граничные условия приведены в табл. 3, где индексы 1, 2, ...,  $N-1, N$  означают нумерацию сеточных линий в аксиальном направлении,  $\sigma^{1,2}$  и  $\sigma^{N-1,N}$  — соответственно коэффициенты электропроводности на грани контрольного объема между линиями 1 и 2,  $N-1$  и  $N$ .

При постановке граничных условий для дуги со стержневым катодом (рис. 2, *b*) размер катодной привязки задается по результатам экспериментов. Например, в работе [2] для цилиндрического катода из вольфрама приведены эмпирические зависимости диаметра катодного пятна  $d$  от силы тока  $I$  дуги в различных газах, в частности, для аргона атмосферного давления имеет место соотношение  $d$  (см) =  $1,3 \cdot 10^{-2} I^{0,5}$  (А). Для сварочных электродов из смеси графита с углем, горящих в атмосфере воздуха, эмпирическая зависимость диаметра электрода от силы тока имеет вид  $I$  (А) =  $(40 \div 45) \cdot d$  (мм) [22].

В случае отсутствия опытных данных размер катодной привязки задавался таким образом, чтобы рассчитанная максимальная плотность тока на поверхности вольфрамового катода составляла, согласно результатам экспериментов (см., например, [1–3]), около  $\mathbf{j} \approx 5 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>. Размеры и положение анодного пятна привязки дуги определяются непосредственно в процессе численного счета из следующего условия: вблизи поверхности анода на расстоянии сеточного шага  $\Delta x$  поперечное сечение, внутри которого выполняется условие  $T_e > T_e^{\min}$ , приравнивается к размеру и положению анодного пятна ( $T_e^{\min} = 3,5$  кК — значение температуры холодного неионизованного газа). Отметим, что подобные методы определения размеров привязки дуги на электродах, а также определение размеров по следам эрозии или световому диаметру пятна являются в ряде случаев недостаточно точными, и поэтому результаты расчетов имеют в большей степени характер качественных оценок.

На внешних границах расчетной области условия являются аналогичными рассмотренным выше условиям и приведены в табл. 4.

При постановке начальных условий следует учесть, что используемая в настоящей работе математическая модель не может описать физические явления непосредственно с момента зажигания дуги. В этой связи интервал времени  $\Delta t$ , когда между электродами формируется высокотемпературный токопроводящий канал, не входит в вычислительный

Таблица 4

Граничные условия для дуги со стержневым катодом (см. рис. 2, б)

Граница	Переменная
<i>AHED, DEFC, BGFC, AHGB</i>	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, \partial T / \partial n = 0,$ $\partial U / \partial n = 0, \partial P / \partial n = 0, \partial \varphi / \partial n = 0, \partial A / \partial n = 0,$
<i>HGFE</i>	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, \partial T / \partial x = 0,$ $\partial U / \partial x = 0, P = P_0, \partial \varphi / \partial x = 0, \partial A / \partial x = 0,$
Поверхность катода $S_c$	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}, T = T^0, U = 0, P = P_0, \varphi_1 = \frac{I \cdot \Delta x + \int_0^y \int_0^z \sigma^{1,2} \varphi_2 dy dz}{\int_0^y \int_0^z \sigma^{1,2} dy dz},$ $\partial A / \partial x = 0,$
<i>ABCD</i>	$N_e = N_e^{\min}, T_e = T_e^{\min}; T = T^0, U = 0, P = P_0,$ $\varphi_N = \frac{I \cdot \Delta x - \int_0^y \int_0^z \sigma^{N-1,N} \varphi_{N-1} dy dz}{\int_0^y \int_0^z \sigma^{N-1,N} dy dz}, \partial A / \partial x = 0.$

процесс. Как показывают эксперименты, продолжительность  $\Delta t$  может составлять от нескольких десятков микросекунд при токах в несколько сотен ампер [1] до нескольких сотен микросекунд при токах в несколько килоампер [23].

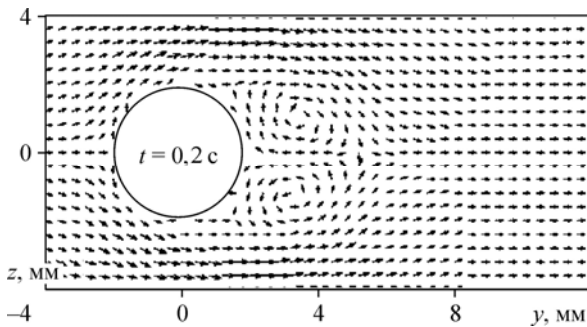
С учетом сказанного в вычислительном алгоритме принято, что между электродами существует токопроводящая высокотемпературная ( $T = 9$  кК) зона в форме цилиндра радиусом  $R_c$  с неподвижным газом. В течение первых  $\Delta t \approx 50-70$  мкс при значениях временного шага  $\tau = 10^{-6}$  с и погрешности  $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-2}$  формируются распределения рассчитываемых переменных, после этого начинается отсчет реального времени.

#### 4. Обсуждение результатов

##### Расчет обтекания кругового цилиндра

Ламинарный изотермический поток вязкой жидкости движется со скоростью  $v^0 = 3,15$  см/с и обтекает цилиндр диаметром  $d = 4$  мм. Число Рейнольдса  $Re = \rho v d / \mu$ , определяемое по диаметру цилиндра, равно  $Re = 140$ . Плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости (вода) при температуре  $20^\circ$  С приняты равными  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\mu = 9 \cdot 10^{-4}$  кг/(м·с) соответственно. Расчет выполнен при значениях сеточного шага  $\Delta = 0,1$  мм и временного шага  $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$  с.

Как показывают наблюдения и теоретические исследования (см., например, [24–28]), в диапазоне  $Re \approx 60-5000$  за цилиндром формируется вихревая дорожка (дорожка Кармана).



На рис. 3, 4 представлены расчетные векторные поля скорости в плоскости  $Y-Z$  в среднем сечении  $x = X/2$  для различных моментов времени  $t$ . Поясним, что на рисунках масштаб векторов

Рис. 3. Фрагмент векторного поля скорости  $V$  при обтекании цилиндра в момент времени  $t = 0,2$  с,  $Re \approx 60$ .



Рис. 4. Фрагменты векторного поля скорости  $V$  при обтекании цилиндра в различные моменты времени  $t$ .  $Re = 140$ .

скорости не выдержан, а в целях экономии места представлены только центральные фрагменты течения.

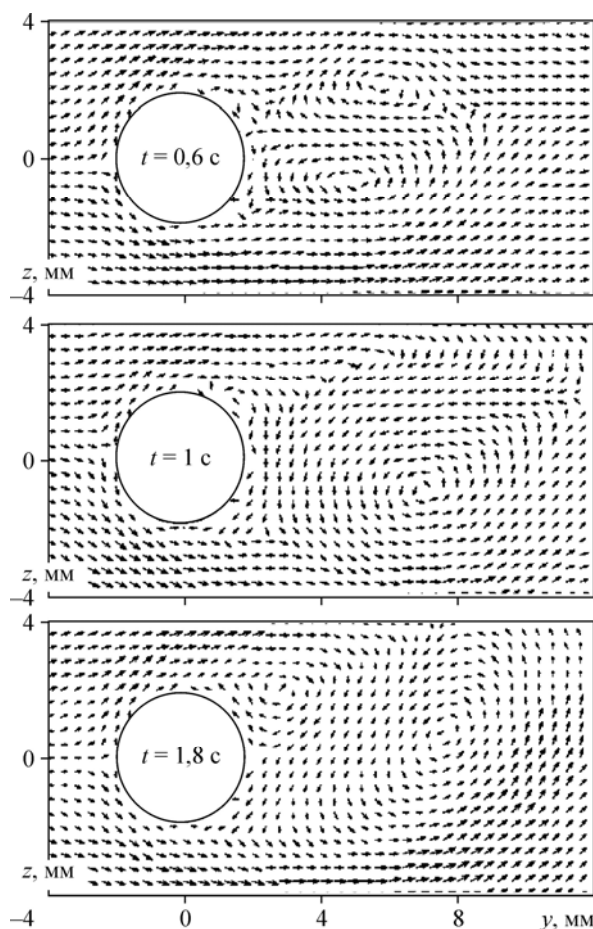
Анализ результатов показывает, что до момента времени  $t \approx 0,2$  с скорость потока вблизи цилиндра еще не достигает значения  $v^0 = 3,15$  см/с и составляет около  $v \approx 1,5$  см/с. В этом случае за цилиндром формируется картина течения, состоящая из двух симметрично расположенных вихрей с противоположным направлением вращения (рис. 3). Подобная картина течения характерна для чисел Рейнольдса  $Re < 60$  [24, 25].

К моменту времени  $t \approx 0,6$  с симметричное расположение вихрей случайным образом нарушается (рис. 4), а сами вихри смещаются вниз по потоку. В верхней области за цилиндром начинает формироваться новый вихрь ( $t \approx 1$  с), который к моменту времени  $t \approx 1,8$  с близок к отрыву от цилиндра.

В дальнейшем наблюдается периодическое формирование и отрыв вихрей, и к моменту  $t = 4$  с формируется вихревая дорожка (рис. 5). Следует сказать, что используемая математическая модель не учитывает случайные флуктуации физических величин и должна давать решение в виде двух симметрично расположенных вихрей. Однако в роли случайных флуктуаций выступают, по-видимому, схемные эффекты, которые обуславливают асимметрию течения.

Если из рассчитанного значения  $v$  компоненты вектора скорости вычесть значение скорости  $v^0$ , получим картину течения за цилиндром в системе отсчета, движущейся с набегающим потоком жидкости (рис. 6).

Экспериментальная зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса (см. ссылки в работе [24]) позволяет определить частоту  $n$  отрыва вихрей, которая при значении  $Re = 140$  равна  $n \approx 1,53$  с<sup>-1</sup>. По результатам расчета период отрыва вихрей равен  $\Delta t \approx 0,75$  с, что соответствует частоте отрыва  $n \approx 1,33$  с<sup>-1</sup>, то есть расчетное значение  $n$  достаточно близко к опытным данным. Известно, что наиболее устойчивыми являются вихревые дорожки с таким взаимным расположением вихрей, которому удовлетворяет соотношение  $h/l \approx 0,28$  (обозначения  $h$  и  $l$  указаны на рис. 6). Результаты расчета дают значения  $h \approx 6$  мм,  $l \approx 18$  мм и  $h/l = 0,3$ , что также близко к опытным данным.



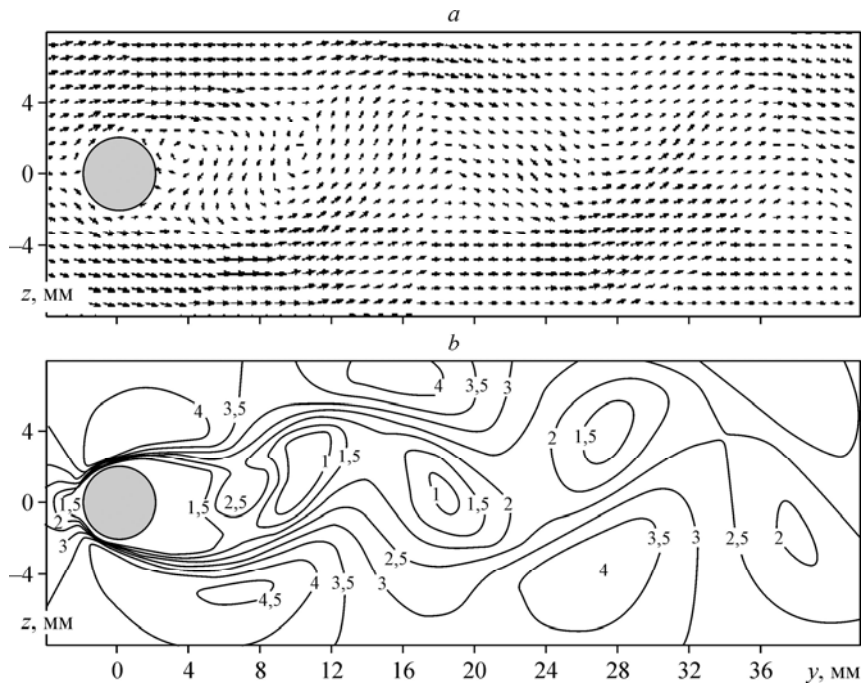


Рис. 5. Фрагменты векторного  $V$  (a) и скалярного  $V = \sqrt{w^2 - v^2}$  (см/с) (b) полей скорости при обтекании цилиндра.  
 $t = 4$  с,  $Re = 140$ .

Далее приведены результаты расчета обтекания цилиндра в потоке при значении числа Рейнольдса  $Re = 250$  ( $d = 10$  мм,  $v^0 = 2,25$  см/с). Вычисления выполнены при значениях  $\Delta = 0,5$  мм,  $\tau = 10^{-3}$  с. Временная эволюция течения качественно аналогична рассмотренному выше варианту при  $Re = 140$ , во избежание повторения на рис. 7 представлена уже сформированная вихревая дорожка в момент  $t = 20$  с.

Поясним, что вследствие большой протяженности расчетной области, поле течения в данном случае удобнее представить не в векторной форме, а в виде изолиний тока в плоскости  $Y-Z$ , определяемых по формуле  $G = \rho \Delta x \int_0^z v dz$ . Картина течения согласуется с экспериментально наблюдаемой (рис. 8). Расчетная величина  $h/l$  при  $Re = 250$

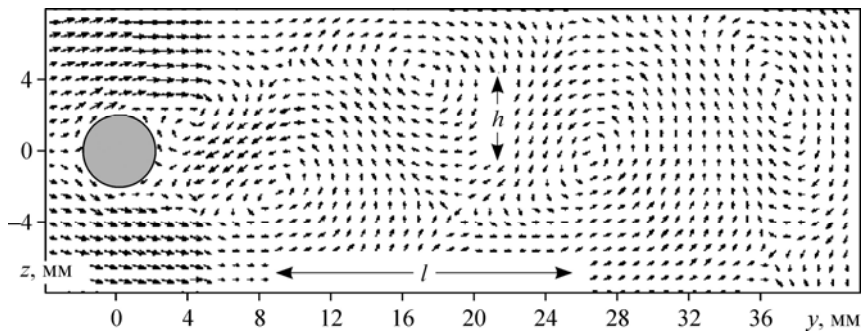


Рис. 6. Фрагмент векторного поля скорости  $V$  при обтекании цилиндра.  
 $t = 4$  с,  $Re = 140$ . Наблюдатель движется в направлении оси  $y$  со скоростью  $\approx v^0$ .

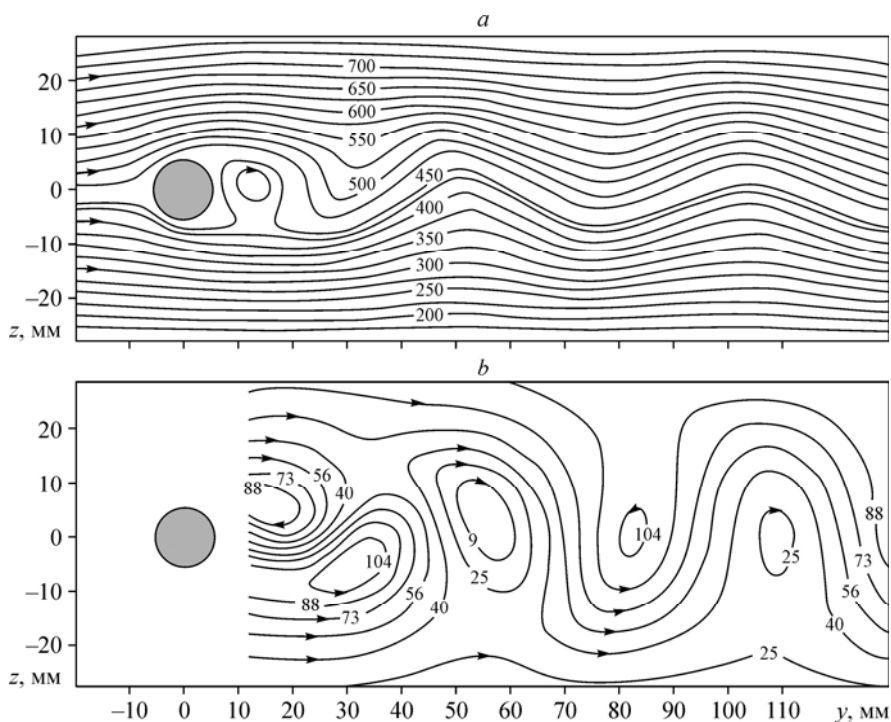


Рис. 7. Изолинии тока  $G$  (мг/с) при обтекании цилиндра в момент времени  $t = 20$  с,  $Re = 250$ .  
 а — наблюдатель неподвижен относительно цилиндра, б — наблюдатель движется в направлении оси  $y$  со скоростью  $\approx v^0$ .

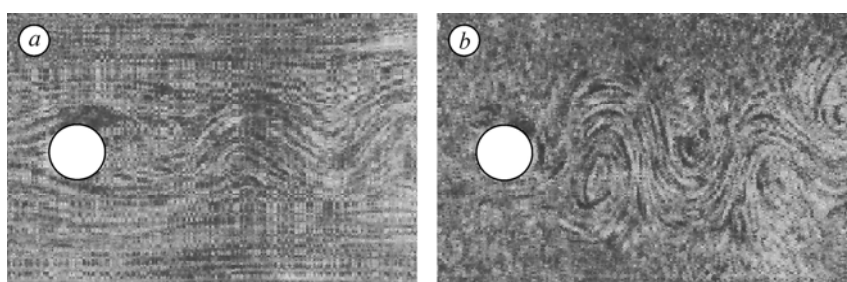


Рис. 8. Фотографии [26] обтекания цилиндра в потоке с числом  $Re = 250$ .  
 а — фотокамера покоится относительно цилиндра, б — фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости.

равна  $\approx 0,24$ , а частота отрыва вихрей составляет  $n \approx 0,55 \text{ с}^{-1}$ . Эксперименты дают соответственно  $h/l = 0,28$  и  $n \approx 0,45 \text{ с}^{-1}$ . Сравнение показывает удовлетворительное совпадение результатов расчета с экспериментом, отличие не превышает 15 %.

#### Расчет электрической дуги

Форма (см. рис. 2, а) и внешние параметры разряда задаются в соответствии с условиями эксперимента [21]. Ток дуги — 200А (аргон атмосферного давления), радиус катодного насадка —  $R_c = 5$  мм, расстояние между срезом катодного насадка и охлаждаемым медным анодом толщиной  $l_a = 2$  мм равно  $L = 10$  мм. Расход газа через катодный насадок составляет  $G^* = 8,3 \cdot 10^{-3}$  г/с, что соответствует аксиальной скорости потока на оси  $u_0 \approx 5$  м/с. Радиус привязки дуги на аноде принят равным  $R_a = 4,25$  мм.

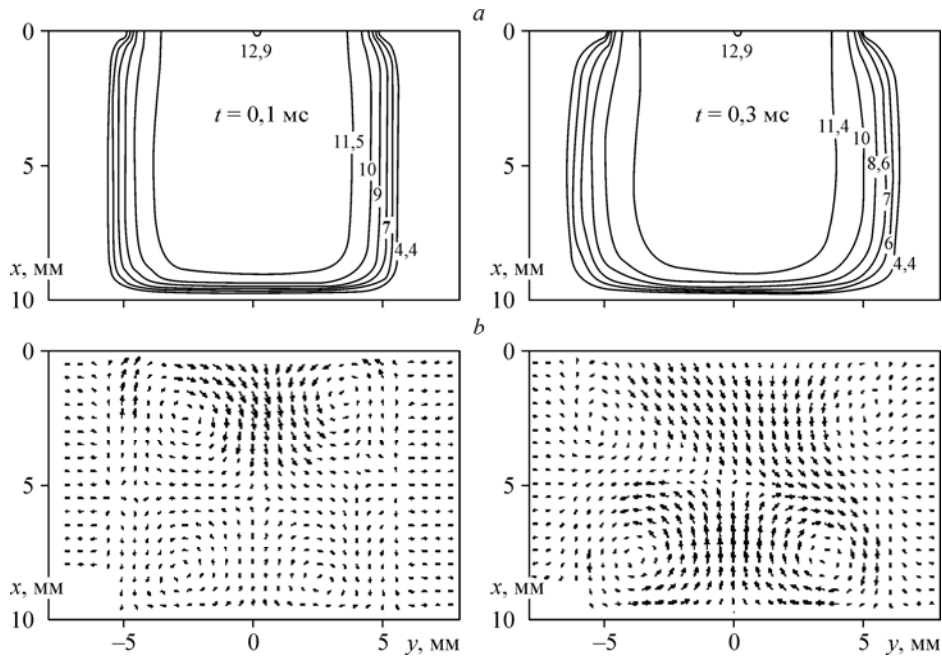


Рис. 9. Распределения температуры газа  $T$  [кК] (а), векторное поле течения плазмы  $V$  в плоскости  $Y-X$  в различные моменты времени  $t$  (б).

Разряд примечателен тем, что вследствие интенсивного охлаждения анодного узла реализуется контрагированная привязка дуги на аноде. В этих условиях, как показывает эксперимент [21], электромагнитные силы формируют анодную струю навстречу потоку плазмы из катодного насадка.

Поясним, что на представленных далее рисунках показаны центральные фрагменты, отсчет в направлении оси  $x$  ведется от среза катодного насадка, а в направлении оси  $y$  — от оси симметрии.

На рис. 9 приведены распределения температуры газа  $T$  и векторное поле скорости плазмы  $V$  в плоскости  $Y-X$  в моменты времени  $t = 0,1$  и  $0,3$  мс. Видно, что при  $t = 0,1$  мс

столб дуги сохраняет цилиндрическую форму, а аксиальный поток плазмы распространяется только на 4–5 мм от среза катодного насадка.

Вместе с тем, наблюдается формирование слабой анодной струи. К моменту времени  $t = 0,3$  мс столб дуги несколько расширяется, интенсивность анодной струи возрастает и к моменту времени  $t = 1$  мс доминирует в большей части области (рис. 10). Формирование структуры анодного потока и теплового поля дуги ко времени  $t = 3$  мс в целом заканчивается и далее происходит незначительное

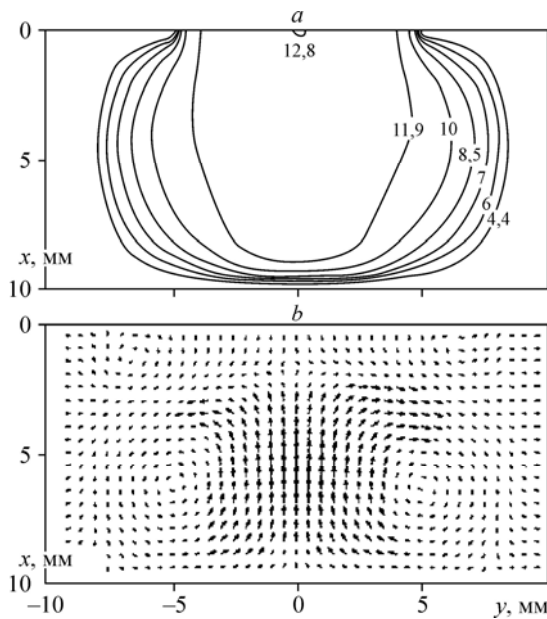


Рис. 10. Распределения температуры газа  $T$  [кК] (а), векторное поле течения плазмы  $V$  в плоскости  $Y-X$  в момент времени  $t = 1$  мс (б).

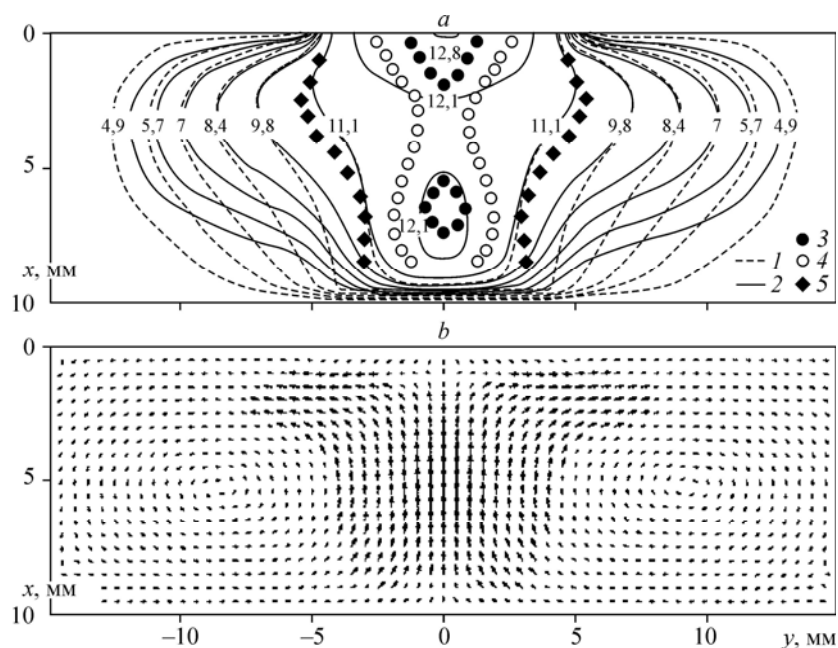


Рис. 11. Распределения температуры (кК) электронов  $T_e$  и газа  $T$  при  $t = 20$  мс (а), векторное поле скорости  $V$  плоскости  $Y-X$  после выхода на стационарный режим (б).

$T_e$  (1),  $T$  (2); 12,4 (3), 12,2 (4), 11 (5) кК — экспериментальные данные работы [21].

изменение характеристик — процессы вышли на стационарный режим, при  $t = 20$  мс счет был остановлен.

На рис. 11, а приведено сравнение расчетных и экспериментальных данных [21] для поля температуры  $T$ . Согласованность результатов расчета и опытных данных удовлетворительное — различие не превышает 10 %.

Отметим, что в электрической дуге поле температуры в значительной степени формируется потоками плазмы. Поэтому удовлетворительное согласие расчетных данных температуры с экспериментом свидетельствует также о достоверном расчетном поле течения.

Кроме сравнения с экспериментом, выполнено тестирование модели и методики расчета, основанное на условии осевой симметрии рассматриваемого дугового разряда. Поскольку расчетная область охватывает весь разряд, то в этом случае все рассчитываемые характеристики должны быть симметричными (в пределах погрешности) относительно центральной оси разряда. Сравнение результатов расчета показало, что распределения динамических, тепловых, электромагнитных характеристики действительно являются практически симметричными.

### Выводы

Представлена нестационарная трехмерная математическая модель электрической дуги в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы. Выполнено тестирование динамической части уравнений на примере задачи обтекания кругового цилиндра ламинарным потоком изотермической вязкой жидкостью. Рассчитаны характеристики осесимметричной электрической дуги с контрагированной анодной привязкой. Удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных свидетельствует в целом о корректности предложенной математической модели.

### Список литературы

1. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 370 с.
2. Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975. 178 с.
3. Чердниченко В.С., Аньшаков А.С., Кузьмин М.Г. Плазменные электротехнологические установки. Новосибирск: НГТУ, 2005. 508 с.
4. Математическое моделирование электрической дуги / Под ред. Энгельшта В.С. Фрунзе: Илим, 1983. 363 с.
5. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. Низкотемпературная плазма. Т. 1. Теория столба электрической дуги. Новосибирск: Наука, 1990. 374 с.
6. Лебедев А.Д., Урюков Б.А., Энгельшт В.С. и др. Низкотемпературная плазма. Т. 7. Сильноточный дуговой разряд в магнитном поле. Новосибирск: Наука, 1992. 267 с.
7. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Численный анализ неосесимметричных электрических дуг. Бишкек: Илим, 2001. 232 с.
8. Gonzalez J.J., Lago F., Freton P., Masquere M., Franceries X. Numerical modeling of an electric arc and its interaction with the anode: part II. The three-dimensional model — influence of external forces on the arc column // J. Phys. D: App. Phys. 2005. Vol. 38, No. 2. P. 306–318.
9. Васильев Е.Н., Нестеров Д.А. Численное моделирование взаимодействия дугового разряда с поперечным магнитным полем // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, № 2. С. 165–170.
10. Xu G., Hu J., Tsai H.L. Three-dimensional modeling of the plasma arc in arc welding // J. App. Phys. 2008. Vol. 104. P. 10330-1–10330-9.
11. Baeva M., Uhrlandt D. Non-equilibrium simulation of the spatial and temporal behavior of a magnetically rotating arc in argon // Plasma Sources Sci. Technol. 2011. Vol. 20, No. 3. P. 035008-1–035008-10.
12. Кулумбаев Э.Б. Развитие теплофизических моделей дугового, индукционного, свч и оптического разрядов. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. Бишкек, Кыргызско-Российский Университет, 1999. № 5. 42 с.
13. Кулумбаев Э.Б., Лелевкин В.М. Расчет открытой электрической дуги в поперечном магнитном поле // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, № 4. С. 539–543.
14. Tanaka M., Terasaki H., Ushio M., Lowke J.J. Numerical Study of a free-burning argon arc with anode melting // Plasma chemistry and plasma processing. 2003. Vol. 23, No. 3. P. 585–606.
15. Hu J., Tsai H.I. Effects of current on droplet generation and plasma in gas metal arc welding // J. Appl. Phys. 2006. Vol. 100, No. 5. P. 053304-1–053304-12.
16. Зиновьев В.Е. Кинетические свойства металлов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1984. 200 с.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146 с.
18. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. Смагулов Ш., Сироченко В.П., Орунханов М.К. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях. Алматы, 2001. 276 с.
20. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Применение метода фиктивных областей для расчета характеристик электрической дуги // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 3. С. 374–382.
21. Sanders N., Etemadi K., Hsu K.S., Pfender E. Studies of the anode region of a high-intensity argon arc // J. Appl. Phys. 1982. Vol. 53, No. 6. P. 4136–4145.
22. Васильев К.В. Газоэлектрическая резка металлов. М.: Машгиз, 1963. 175 с.
23. Аньшаков А.С., Назарук В.И., Фалеев В.А. Поведение контактного сопротивления перед зажиганием дуги в сильноточных неподвижных и скользящих контактах // Междунар. конф. «Физика и техника плазмы», 1994, Минск. Т. 1. С. 131–133.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
25. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М: Мир, 1986. 184 с.
26. Френкель Н.З. Гидравлика. Л.: Госэнергоиздат, 1956. 456 с.
27. Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. Detached-eddy simulation past a circular cylinder // J. Flow Turbulence and Combustion. 1999. Vol. 63. P. 293–313.
28. Исаев С.А., Баранов П.А., Кудрявцев Н.А., Жукова Ю.В. Численное моделирование нестационарного теплообмена при турбулентном обтекании кругового цилиндра // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 1. С. 27–39.

*Статья поступила в редакцию 6 ноября 2012 г.*