ренные склоны волн становятся более пологими, а наветренные — более крутыми.

Ветровая капиллярная волна. Вариант 3: $W = 3{,}995$; $u = -1$; $\zeta(a,\ 0) = a + i0{,}2\pi \sin a$; $\Gamma(a,\ 0) = 2 - 0{,}4\pi \sin a$. Счет ведется до момента $t = 1$ с шагом $\Delta t = 1/90$ без учета производных Γ_{tt} и ζ_{ttt}. Эволюция волны, приведенная на фиг. 4 (вершины и впадины волн также соединены отрезками штриховых прямых), подобна эволюции гравитационных волн и дополнительно характеризуется тем, что вершина волны становится более пологой, а впадина — более глубокой.

При уменьшении чисел Фруда и Вебера от значений, указанных в вариантах 1—3, эволюция волны замедляется, в то время как критический шаг Δt_* остается почти неизменным. Последнее обстоятельство приводит к тому, что даже большие затраты машинного времени при расчете волн ряби не выявляют роли нелинейных эффектов, обусловленных конечностью амплитуды волны. Это означает, что линейная теория хорошо описывает движение волн ряби конечной амплитуды.

Поступила 22 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kinsman B.** Wind Waves. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1965.
2. **Barnett T. P., Kenyon K. E.** Recent advances in the study of wind waves.—«Reports on Progress in Physics», 1975, vol. 38, N 6.
3. **Куляев Р. Л.** Исследование внутренних волн конечной амплитуды.— ПМТФ, 1975, № 1.
4. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.

УДК 532.51 : 532.135

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО ВЯЗКИМ ЯДРОМ В ОХЛАЖДАЕМОМ КАНАЛЕ

А. С. Романов

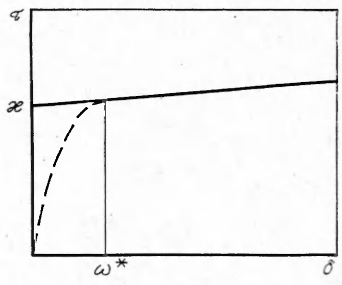
(Москва)

Среди неньютоновских жидкостей важное место занимают вязкопластические жидкости [1, 2], гидродинамическая устойчивость плоского пуазейлева течения которых исследовалась в работах [3, 4]. Механические свойства вязкопластических сред определяются безразмерным реологическим уравнением, связывающим девиатор тензора напряжений σ_{ij} с тензором скоростей деформации f_{ij} [1]:

$$\sigma_{ij} = 2\left(1 + \frac{\varkappa}{\sqrt{2f_{ij}f_{ij}}}\right) f_{ij} \quad \text{при} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}} \geqslant \varkappa, \tag{1}$$

$$f_{ij} = 0 \qquad \text{при} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}} \leqslant \varkappa,$$

где $\varkappa = \tau_0 L/\mu U$ — параметр пластичности; μ — пластическая динамическая вязкость; τ_0 — предельное напряжение сдвига; L — характерный размер — полуширина канала; U — характерная скорость. Из-за наличия у вязкопластической жидкости предельного напряжения сдвига τ_0 при течении ее в каналах могут образовываться зоны, в которых среда движется как квазитвердое тело, и зоны вязкого течения [2].



Фиг. 1

Для условий одномерного сдвигового течения вязкопластической жидкости (1) зависимость безразмерных касательного напряжения τ от скорости сдвига δ представлена на фиг. 1. Реологическое уравнение (1) для многих реальных жидкостей является приближенным, и на малых скоростях сдвига кривая течения существенно нелинейна [5] (штриховая линия на фиг. 1). Реологический закон в этом случае целесообразно записать в виде

$$\sigma_{ij} = 2\eta(\omega) f_{ij}, \tag{2}$$

где $\omega \equiv \sqrt{2 f_{ij} f_{ij}}$; $\eta(\omega)$ — непрерывная, монотонная и ограниченная при $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$ функция, $1 \leqslant \eta(\omega) \leqslant \eta(0)$. Если интенсивность тензора скоростей деформации ω больше или равна некоторому значению $\omega \geqslant \omega^* \ll \ll 1$, то реологический закон (2) совпадает с (1). Области течения, в которых $\omega < \omega^*$, назовем сильно вязкими зонами течения.

Как показывают эксперименты, неньютоновские свойства многих вязкопластических сред существенно зависят от температуры [6]. При некоторой температуре $T = T^*$ они вообще исчезают ($\tau_0 = 0$ при $T \geqslant T^*$). Поэтому в дальнейшем учитывается, что $\tau_0 = \tau_0(T)$, $\eta = \eta(T, \omega)$.

Симметричное распределение скорости движения жидкости в плоском, симметрично относительно оси охлаждаемом канале под действием постоянного безразмерного градиента давления $\partial p/\partial x = -2/\mathrm{Re}$ ($\mathrm{Re} = \rho U L/\mu$ — число Рейнольдса, ρ — плотность среды) при условии, что параметры течения слабо меняются вдоль канала ($\partial/\partial x \approx 0$), определяется в виде

$$u(y) = \begin{cases} (1-\zeta)^2 + \int\limits_{-\zeta}^{-1} \varkappa dy + \varkappa(-\zeta)(1-\zeta) + O(\omega^*) \text{ при } -\zeta \leqslant y \leqslant 0, \\ y^2 - 2\zeta y + 1 - 2\zeta + \int\limits_{y}^{-1} \varkappa dy + \varkappa(-\zeta)(1+y) + O(\omega^*) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } -1 \leqslant y \leqslant -\zeta, \end{cases} \tag{3}$$

где величина $\zeta = \varkappa/2 + O(\omega^*)$ — полуширина сильно вязкого ядра потока, которая находится из условия равновесия, причем $\omega(-\zeta) = \omega^* \ll 1$. Распределение скорости (3) справедливо лишь при $\varkappa[T(y)]|_{y=-1} \leqslant 2$, так как иначе у стенок канала образуется сильно вязкая зона и распределение (3) не имеет места.

Рассмотрим гидродинамическую устойчивость течения (3) относительно плоских периодических по времени и длине канала бесконечно малых безразмерных возмущений функции тока

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp i\alpha(x - ct)$$

и температуры

$$\theta(x, y, t) = \gamma(y) \exp i\alpha(x - ct),$$

где α и αc — безразмерные волновое число и комплексная частота возмущения. Хотя отсутствие теоремы Сквайра в общем случае неньютоновских сред показано в [7], однако вопрос о влиянии трехмерности возмущающего движения на гидродинамическую устойчивость плоского градиентного течения неньютоновской жидкости с реологическим законом (2) и функцией $\eta = \eta(\omega)$ произвольного вида должен составить предмет самостоятельного исследования.

Из системы уравнений движения и энергии, пренебрегая выделением тепла за счет вязкой диссипации, с точностью до бесконечно малых высших порядков для $\varphi(y)$ и $\gamma(y)$ можно получить

(4) $$(u - c)\gamma + T_0'\varphi = \frac{1}{i\alpha \operatorname{Re} \Pr}(\gamma'' - \alpha^2\gamma);$$

(5) $$(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi = \frac{1}{i\alpha \operatorname{Re}}\{\eta_0(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) + 2\eta_0'(\varphi''' - \alpha^2\varphi') + \eta_0''(\varphi'' + \alpha^2\varphi) + \left[u'\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)_0(\varphi'' + \alpha^2\varphi) + u'\left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_0\gamma\right]'' + u'\alpha^2\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)_0(\varphi'' + \alpha^2\varphi) + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_0\gamma\right]\},$$

где $\Pr = \mu C/\lambda$ — число Прандтля, C — теплоемкость среды, λ — коэффициент теплопроводности; индекс нуль означает невозмущенное течение; штрих — дифференцирование по y.

В области $-1 \leqslant y \leqslant -\zeta$ уравнение (5) упрощается

(6) $$(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi = \frac{1}{i\alpha \operatorname{Re}}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) + \frac{4}{i\alpha \operatorname{Re}}\left[\left(\frac{d\varkappa_0}{dT}\gamma\right)' + \alpha^2\left(\frac{d\varkappa}{dT}\right)_0\gamma - \alpha^2\left(\frac{\varkappa}{u'}\varphi'\right)'\right].$$

Появление гидродинамической неустойчивости течения связывается с наличием в канале вязкого критического слоя толщиной порядка $(\alpha\operatorname{Re})^{-1/3}$ вокруг критической точки $y = y_c$, $u(y_c) = \operatorname{Real} c$ [8]. После замены независимой переменной $z = (y - y_c)\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon = [\alpha\operatorname{Re}\, u'(y_c)]^{-1/3}$, в области критического слоя уравнения (4), (6) преобразуются к виду

(7) $$-\frac{1}{u'(y_c)}\left[\left(\frac{dT_0}{dy}\right)_c + O(\varepsilon)\right]\varphi + \varepsilon\left(\gamma - \frac{1}{i\Pr}\frac{d^2\gamma}{dz^2}\right) = O(\varepsilon^2),$$
$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - iz\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 4\varepsilon^3\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{d\varkappa_0}{dT}\right)_c\gamma\right] = O(\varepsilon).$$

Из уравнений (7) следует, что если $\Pr \ll \varepsilon^{-2}\left(\frac{d\varkappa_0}{dy}\right)_c^{-1}$, то возмущения скорости можно считать не зависимыми от возмущений температуры, индекс c означает, что данная величина вычисляется в критической точке $y = y_c$. При выполнении этого условия возмущение функции тока при $-1 \leqslant y \leqslant -\zeta$ определяется из уравнения (6) в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} C_k\varphi_k,$$

где $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{3,4}$ — «невязкие» и «вязкие» интегралы уравнения (6) [7, 9] записываются в виде

$$\varphi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - y_c)^{k+1}, \quad \varphi_2 = 2a_1\varphi_1 \ln (y - y_c) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (y - y_c)^k,$$

$$\varphi_{3,4} = \int_{\pm\infty}^{z} dz \int_{\pm\infty}^{z} \sqrt{z} H_{1/3}^{(1,2)} \left[\frac{2}{3} (iz)^{2/3} \right] dz.$$

Здесь $H_{1/3}^{(1,2)}$ — функции Ханкеля порядка 1/3 первого и второго рода.

В области сильно вязкого ядра $-\zeta \leqslant y \leqslant 0$ общее решение для возмущения функции тока можно определить непосредственно из уравнения (5)

$$\varphi^{(\mathrm{I})} = \sum_{k=1}^{4} C_k^{(\mathrm{I})} \varphi_k^{(\mathrm{I})},$$

где $\varphi_k^{(\mathrm{I})}$ в предположении, что $[\eta(0)(\alpha \mathrm{Re})^{-1}]^{1/2} \ll 1$, находятся из уравнения (5) в виде

$$\varphi_{1,2}^{(\mathrm{I})} = \exp (\pm \alpha y) + \mathrm{O} \left[(\alpha \, \mathrm{Re})^{-1} \right],$$

$$\varphi_{3,4}^{(\mathrm{I})} = \exp \left\{ \pm \sqrt{i\alpha \, \mathrm{Re}} \int_0^y \sqrt{(u - c) \Big/ \left[\eta_0 + u' \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right)_0 \right]} \, dy \right\} \{1 + \mathrm{O} \left[(\alpha \, \mathrm{Re})^{-1/2} \right] \}.$$

Граничными условиями для возмущений функции тока являются условия «прилипания» жидкости к стенкам и условия симметрии относительно оси канала

$$\varphi(-1) = \varphi'(-1) = \varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0. \tag{8}$$

Условие нетривиальности решений φ и $\varphi^{(\mathrm{I})}$ с граничными условиями (8) и условиями сшивки решений φ и $\varphi^{(\mathrm{I})}$ при $y = y_c$

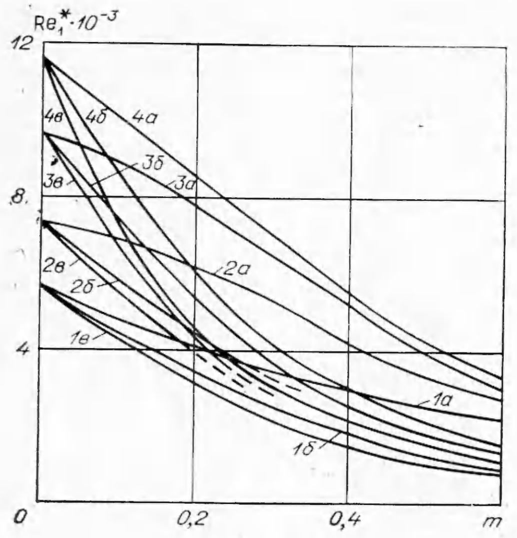
$$\frac{d^k \varphi}{dy^k} = \frac{d^k \varphi^{(\mathrm{I})}}{dy^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

(с точностью до величин порядка $(\alpha \mathrm{Re})^{-1/2}$) приводит к вековому уравнению для определения собственных значений фазовой скорости возмущения

$$\frac{\varphi_3(-1)}{\varphi_3'(-1)} = \frac{\varphi_2(-1) \left[\varphi_1'(-\zeta) + \alpha \varphi_1(-\zeta) \operatorname{th} \alpha\zeta \right] - \varphi_1(-1) \left[\varphi_2'(-\zeta) + \alpha \varphi_2(-\zeta) \operatorname{th} \alpha\zeta \right]}{\varphi_2'(-1) \left[\varphi_1'(-\zeta) + \alpha \varphi_1(-\zeta) \operatorname{th} \alpha\zeta \right] - \varphi_1'(-1) \left[\varphi_2'(-\zeta) + \alpha \varphi_2(-\zeta) \operatorname{th} \alpha\zeta \right]}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что на устойчивость в принятом приближении влияет распределение скорости $u = u(y)$ лишь в области $-1 \leqslant y \leqslant -\zeta$, которое зависит от функции $\varkappa = \varkappa[T(y)]$, определяющей изменение неньютоновских свойств среды.

В качестве примера функцию $\varkappa = \varkappa[T(y)]$ в области изменения независимой переменной $y[-1; -\zeta]$ зададим в виде $\varkappa = 2\zeta + m(1 - \zeta)^{1-n} \times$



Фиг. 2

$\times(-y-\zeta)^n$, аппроксимирующем изменение неньютоновских свойств среды поперек канала с охлаждаемыми стенками.

На фиг. 2 зависимость критического числа Рейнольдса Re_1^* ($Re_1 = Re/(1-\zeta)^3$) от параметров m и n, характеризующих переменность неньютоновских свойств среды поперек канала, при различных размерах сильно вязкого ядра потока ζ. Кривые *1 — 4* соответствуют $\zeta = 0$; 0,3; 0,6; 0,9, а с буквами *а*, *б*, *в*—значениям параметра $n = 2$, 3, 4. Из анализа полученных данных следует, что охлаждение стенок сильно дестабилизирует течение неньютоновской жидкости (2). Этот факт качественно подтверждается известными экспериментальными данными, полученными для вязкопластической нефти [10].

Автор выражает благодарность К. Б. Павлову за обсуждение работы.

Поступила 18 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шульман З. П.** Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
2. **Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.** Нестационарные движения вязкопластичных сред. М., изд. Моск. ун-та, 1970.
3. **Павлов К. Б., Романов А. С., Симхович С. Л.** Гидродинамическая устойчивость пуазейлева течения неньютоновской вязкопластической жидкости.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 6.
4. **Павлов К. Б., Романов А. С., Симхович С. Л.** Устойчивость пуазейлева течения вязкопластической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1975, № 5.
5. **Philipoff W.** Zur Theorie der Strukturviskosität.—«Kolloid Z.», 1935, S. 71.
6. **Губин В. Е., Скрипников Ю. В., Абрамзон Л. С.** О статическом напряжении сдвига вязкопластичных нефтей.—«Труды Уфим. НИИтранснефти», 1970, вып. 7.
7. **Листров А. Т.** Об устойчивости параллельных течений неньютоновских сред.—«Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 5.
8. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
9. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
10. **Абрамзон Л. С., Белозеров В. А.** Методика расчета «горячих» трубопроводов при установившемся режиме перекачки высокозастывающих нефтей и нефтепродуктов. М., изд. ВНИИОЭНГ, 1970.