

12. **Зубов Л. М.** Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 4.
 13. **Зеленин А. А., Зубов Л. М.** Поведение толстой круглой плиты после потери устойчивости // ПММ.— 1988.— Т. 52, вып. 4.
 14. **Хатгер К., Вильямс Ф.** Теория плавающих ледяных пластин // Физика и механика льда.— М.: Мир, 1983.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 12/VII 1989 г.
 в окончательном варианте — 22/I 1990 г.

УДК 539.214; 539.374; 539.375

М. А. Леган

К ВОПРОСУ О НАЧАЛЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ЗОНЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

В практике расчетов элементов конструкций на прочность в настоящее время широко используют классические критерии пластичности, считая при этом, что пластическое течение начинается тогда, когда в соответствии с принятым критерием достигается предельное напряженное состояние хотя бы в одной (самой опасной) точке элемента конструкции. Однако эти критерии не учитывают влияния неравномерности распределения напряжений в окрестности самой опасной точки тела на начало пластического течения.

Вопрос о влиянии неравномерности напряженного состояния на предел текучести в зоне максимальных напряжений давно привлекал внимание исследователей [1—3]. В дальнейшем обычно использовался предложенный в [1] градиентный подход к оценке этой неравномерности и ее влияния на локальный предел текучести в самой опасной точке тела [4—6]. Признаками пластического течения в зоне максимальных напряжений считали появление линий Людерса в образцах из мягкой стали [1], а также отклонения от законов упругого деформирования, фиксируемые, например, тензодатчиками [4, 5]. При этом было замечено, что указанные признаки пластического течения появляются при напряжениях в самой опасной точке, превышающих предел текучести при однородном напряженном состоянии σ_T . В последнее время проведены эксперименты, в которых отклонения от законов упругого деформирования фиксировались высокочувствительным методом голографической интерферометрии [7, 8]. Эти эксперименты также подтвердили повышение локального предела текучести в самой опасной точке тела. На основании полученных результатов предложен градиентный критерий начала пластического течения при неоднородном напряженном состоянии [9—11].

В данной работе на примере задачи о растяжении пластины с эллиптическим отверстием рассмотрен вопрос о границах применимости градиентного критерия и модели сплошной среды в случае очень малых отверстий, отмечается взаимосвязь данного критерия и структуры материала, а также показано, что в достаточно широком диапазоне коэффициентов концентрации напряжений и размеров отверстия этот критерий фактически отражает энергетическую закономерность начала пластического течения.

1. О границах применимости градиентного критерия и модели сплошной среды в случае очень малых отверстий. При неоднородном напряженном состоянии, согласно градиентному критерию, пластические деформации появляются только тогда, когда эквивалентное напряжение, пусть это будет интенсивность напряжений σ_i , в самой опасной точке тела σ_i^{\max} превысит σ_T и достигнет локального предела текучести σ_T^* :

$$(1.1) \quad \sigma_T^* = \sigma_T \left(1 + \sqrt{L_0 G / \sigma_i^{\max}} \right).$$

Здесь $G = |\text{grad } \sigma_i|$ — модуль градиента σ_i в самой опасной точке тела; L_0 — константа материала, имеющая размерность длины. При однородном напряженном состоянии $G = 0$ и $\sigma_T^* = \sigma_T$. Данный критерий хорошо подтверждается экспериментами, проведенными при растяжении широких плоских образцов с центральным эллиптическим отверстием и образцов с боковыми вырезами [9—11]. При этом значения коэффициента концентрации напряжений K изменялись от 3 до 10, а размер эллиптического отверстия в направлении, перпендикулярном направлению растяжения, составлял 10 либо 20 мм. Однако необходимо заметить, что при меньших размерах отверстия по опасному сечению меньше будут и зна-

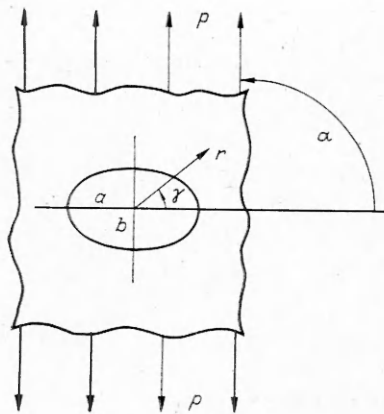


Рис. 1

чения радиуса кривизны в вершине концентратора, в то время как, согласно [10], при конечных значениях K радиус кривизны в вершине концентратора не может быть меньше определенной величины, иначе не обойтись без противоречий.

Это обстоятельство требует дополнительного исследования, целью которого является определение границ применимости градиентного критерия текучести в случае малых отверстий. Дело в том, что при уменьшении размеров отверстия по опасному сечению вплоть до бесконечно малых значения G и σ_T^{π} неограниченно возрастают. Поэтому в случае очень малых отверстий σ_i^{\max} , не превышая локаль-

ного предела текучести, может принимать такие завышенные значения, что номинальное напряжение вдали от отверстия, связанное с σ_i^{\max} упругим решением, будет превосходить σ_T , т. е. градиентный критерий начала пластического течения теряет физический смысл.

Рассмотрим указанное противоречие на примере задачи о растяжении пластины с эллиптическим отверстием (рис. 1) при $\alpha = 0$ и $\pi/2$. На рис. 1 a, b — большая и малая полуоси эллипса, α — угол между большой осью эллипса и направлением растяжения. Зная упругое решение [12], можно получить выражение для модуля градиента σ_i в вершине концентратора:

$$(1.2) \quad G = \sigma_i^{\max} (1,25 + 0,5/K)(K - 1)^2/C.$$

Здесь K — коэффициент концентрации напряжений ($K = 1 + 2a/b$ при $\alpha = \pi/2$, $K = 1 + 2b/a$ при $\alpha = 0$); C — размер отверстия по опасному сечению ($C = 2a$ при $\alpha = \pi/2$, $C = 2b$ при $\alpha = 0$). При достаточно малых C и $K \neq 1$, согласно (1.1) и (1.2), будем иметь такое завышенное значение локального предела текучести σ_T^{π} , что при нагружении пластины интенсивность напряжений, еще не достигнув в вершине концентратора величины σ_T^{π} , на бесконечности поднимется до величины σ_T . Так как пластическое течение до этого момента еще не началось, то можно воспользоваться упругим решением и записать условие недопустимости такой ситуации:

$$(1.3) \quad \sigma_T^{\pi} \leq K\sigma_T.$$

По существу это есть условие того, что пластическое течение в вершине концентратора должно начаться не позже, чем вдали от отверстия. Из этого условия и уравнения (1.1) вытекает $\sqrt{L_0 G / \sigma_i^{\max}} \leq K - 1$, возведя обе части этого неравенства в квадрат и подставив выражение (1.2) для G , получим $L_0(1,25 + 0,5/K)(K - 1)^2/C \leq (K - 1)^2$, откуда находим искомое ограничение $C \geq (1,25 + 0,5/K)L_0$ либо $K = 1$.

Следовательно, при растяжении пластины с эллиптическим отверстием градиентный критерий можно применять, не нарушая условие (1.3), только в случае, если размер отверстия по опасному сечению не меньше, чем

$$(1.4) \quad C_* = (1,25 + 0,5/K)L_0.$$

При изменении K от 1 (для трещины, вытянутой в направлении растяжения) до бесконечно большой величины (для трещины, перпендикулярной направлению растяжения) C_* изменяется незначительно (от $1,75L_0$ до $1,25L_0$). Для круглого отверстия $K = 3$ и $C_* = (4,25/3)L_0$. Заметим, что из экспериментов, согласно [9—11], для материалов Д19АТ, В95, Ст.3

найденно $L_0 = 0,16$ мм. Так что для указанных материалов условие (1.3) нарушается только при очень малых размерах отверстия по опасному сечению, меньших $0,20 \dots 0,28$ мм в зависимости от формы отверстия.

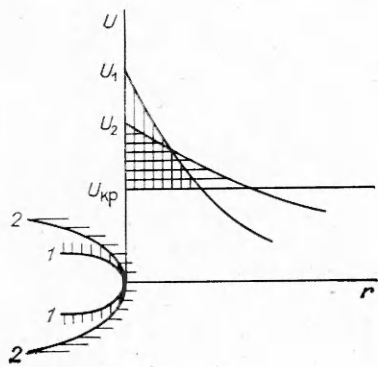
Допустим, что рассмотренное выше противоречие является следствием применения модели сплошной среды для описания свойств материала при выяснении вопроса о начале пластического течения в теле, имеющем отверстия столь малого размера. Если же предположить, что при наличии искусственно созданных отверстий, размер которых по опасному сечению меньше S_* , в материале имеются и естественные нарушения структуры типа микротрещин длиной $1,25L_0$ либо другие дефекты, эквивалентные им по локальному пределу текучести, то, согласно критерию, при достижении номинальным напряжением величины σ_T пластическое течение начнется в окрестностях вершин многочисленных естественных концентраторов, что приведет к обычному пластическому деформированию материала при однородном напряженном состоянии. Таким образом, исходное противоречие снимается. Подобная гипотеза, объясняющая реальную прочность хрупких материалов наличием в них микротрещин, имеется в классической работе по механике разрушения [13].

Если применительно к хрупким материалам говорить о локальном пределе прочности, а не текучести, то в свете этой гипотезы представляют интерес экспериментальные данные по статической прочности образцов с надрезами из чугунов, имеющих различную степень неоднородности внутренней структуры [14]. На основании этих данных в [14] делается вывод о том, что влияние концентрации напряжений на статическую прочность оказывается сильнее у более прочных и однородных чугунов. Следовательно, чем меньше размер внутренних неоднородностей, тем меньше при прочих равных условиях проявляется эффект повышения локального предела прочности.

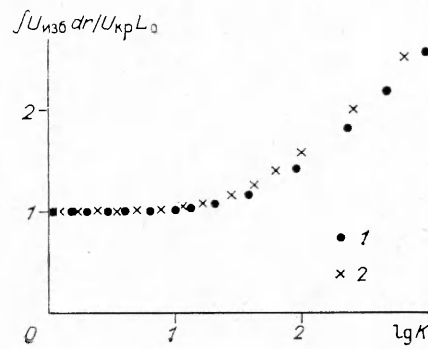
Поскольку в [14] изучалось хрупкое разрушение, то повышение локального предела прочности представлено в зависимости от модуля градиента первого главного напряжения σ_1 , деленного на σ_1^{\max} . Таким образом, чем меньше размер внутренних неоднородностей, тем меньше значения аналогичного L_0 параметра L_1 при модуле градиента σ_1 . Заметим, что среднее разрушающее напряжение для чугунных образцов с надрезами слабо зависит от K и близко к разрушающему напряжению для гладких образцов, так что для описания экспериментальных данных по прочности элементов конструкций из чугунов с помощью градиентного критерия необходимо принимать значения L_1 существенно большие, чем L_0 , найденное для материалов Д19АТ, В95, Ст. 3. Это является следствием большей неоднородности внутреннего строения чугунов по сравнению с указанными материалами.

В отличие от чугуна прочность такого однородного материала, как стекло, очень сильно зависит от наличия концентраторов напряжений (даже от небольших царапин), т. е. с точки зрения градиентного подхода L_1 очень мало, но, как показал еще Гриффитс [13], очень тонкие царапины (глубиной примерно 10^{-3} мм) на поверхности стекла не вызывают ослабляющего действия, хотя концентрация напряжений на дне царапины очень высока. Гриффитс объяснял это наличием в стекле в его естественном состоянии множества микроскопических трещинок, сравнимых по размеру с глубиной царапин.

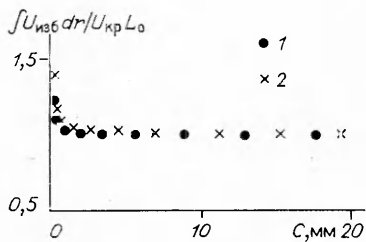
Таким образом, наблюдается определенная взаимосвязь градиентного критерия и структуры материала, что позволяет получить конкретные размеры концентраторов напряжений, при которых можно без противоречий решить вопрос о начале пластического течения или разрушения конструкций из реальных материалов, используя модель сплошной среды и неклассическое градиентное условие предельного состояния материала при неоднородном напряженном состоянии. При достаточно малых размерах концентраторов, меньших конкретной величины, определяемой с помощью градиентного критерия из экспериментов на образцах с



Р и с. 2



Р и с. 4



Р и с. 3

концентраторами больших размеров, применение градиентного критерия в рамках модели сплошной среды противоречиво.

2. Энергетический анализ начала пластического течения. Согласно градиентному критерию (1.1), к моменту начала пластического течения в тех точках вблизи вершины концентратора, где $\sigma_i > \sigma_T$, удельная упругая энергия формоизменения будет больше ее критического значения, отвечающего условию $\sigma_i = \sigma_T$. Удельная энергия формоизменения выражается формулой [15] $U = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2$ (μ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга). При $\sigma_i = \sigma_T$ она имеет критическое значение $U_{кр} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$. Тогда удельная избыточная энергия при $\sigma_i > \sigma_T$ будет

$$U_{изб} = U - U_{кр} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_i^2 - \sigma_T^2).$$

В задаче о растяжении пластины с эллиптическим отверстием (см. рис. 1) при $\alpha = 0$ и $\pi/2$ вычисление интеграла удельной избыточной энергии в той части опасного сечения, где к моменту начала пластического течения $\sigma_i > \sigma_T$, привело к интересным результатам. Оказалось, что в достаточно широких пределах изменения размеров и формы отверстия значения интеграла практически равны постоянной величине, представляющей собой произведение двух констант материала, т. е. также являющейся константой материала:

$$(2.1) \quad \int_{\sigma_i > \sigma_T} U_{изб} dr = \frac{1+\mu}{3E} \int_{\sigma_i > \sigma_T} (\sigma_i^2 - \sigma_T^2) dr \approx T_{кр} L_0.$$

Полученные результаты подтвердили исходное предположение о том, что поскольку в реальных телах пластическое течение возникает не в точке, а в некотором объеме материала, то и математическое условие его начала нужно также искать в некоторой окрестности самой напряженной точки тела. Графически на эпюрах распределения удельной избыточной энергии по опасному сечению для двух различных концентраторов (рис. 2) уравнение (2.1) можно представить так: площадь, заштрихованная вертикально (значение интеграла в (2.1) для концентратора 1) практически равна площади, заштрихованной горизонтально (значение интеграла для концентратора 2).

О точности и границах выполнимости уравнения (2.1) можно судить по рис. 3 и 4, на которых представлены результаты вычислений норми-

рованного интеграла удельной избыточной энергии

$$\int_{\sigma_i > \sigma_T} U_{изб} dr / U_{кр} L_0.$$

В этих расчетах фигурировало значение $L_0 = 0,16$ мм, полученное из экспериментов. Из рис. 3, где приведены значения нормированного интеграла для круглых ($K = 3$) и эллиптических ($K = 6$) отверстий (точки 1 и 2) различного размера, видно, что в целом уравнение (2.1) выполняется достаточно хорошо, однако при размерах отверстия по опасному сечению, близких к C_* , т. е. к границе выполнимости условия (1.3), значения интеграла превышают номинальную величину, что и следовало ожидать, так как при $C < C_*$ градиентный критерий дает явно завышенные значения номинальных напряжений, соответствующих началу пластического течения. Из рис. 4, где представлены зависимости нормированного интеграла от коэффициента концентрации K при двух фиксированных размерах по опасному сечению $C = 20$ и 10 мм (точки 1 и 2) следует, что при умеренных коэффициентах концентрации ($K < 10$) интеграл принимает практически постоянные значения, а при очень больших K значения интеграла существенно возрастают.

Приведенные результаты показывают, что в достаточно широком диапазоне коэффициентов концентрации и размеров отверстия градиентный критерий фактически отражает энергетическую закономерность начала пластического течения, согласно которой пластические деформации появляются только тогда, когда интеграл удельной избыточной энергии в той части опасного сечения, где $\sigma_i > \sigma_T$, достигнет предельной величины $U_{кр} L_0$.

Вместе с тем при концентраторах, по форме близких к трещине, а также при малых отверстиях значения интеграла удельной избыточной энергии, вычисленные согласно градиентному критерию, превышают $U_{кр} L_0$. Следовательно, в указанных случаях энергетической закономерности отвечают меньшие, чем градиентному критерию, значения номинальных напряжений, при которых начинается пластическое течение. Вопрос о соответствии градиентного критерия и энергетической модели начала пластического течения в указанных предельных случаях нуждается в дальнейшем изучении. Например, требование о постоянстве значений интеграла в случае малых отверстий приведет не только к уменьшению предельных номинальных напряжений, отвечающих началу пластического течения, но и к уменьшению по сравнению с (1.4) размеров C_* , при которых эти номинальные напряжения достигают σ_T . Таким образом, можно получить новые (меньшие) оценки размеров естественных концентраторов напряжений в материале. Превышение значений интеграла над номинальной величиной при очень больших K можно объяснить тем, что истинное распределение напряжений в реальном материале в окрестности вершины концентратора типа трещины далеко не соответствует классическому решению линейной теории упругости.

Так, согласно этому решению, при достаточно малой, но конечной номинальной нагрузке вблизи вершины концентратора типа трещины получаются колоссальные значения интенсивности напряжений и удельной энергии формоизменения. Однако учет геометрической нелинейности и отклонений от закона Гука в задаче о растяжении пластины с концентратором типа трещины приведет к снижению значений указанных величин в окрестности вершины концентратора при той же самой номинальной нагрузке [16]. Так что получающиеся при очень больших K значения интеграла удельной избыточной энергии, существенно превышающие $U_{кр} L_0$, не отвечают его действительному значению для реальных материалов.

Таким образом, анализ показал, что критерий начала пластического течения при неоднородном напряженном состоянии имеет энергетическую природу и может быть достаточно просто выражен в энергетических величинах при условии их корректного вычисления. В частности, при растя-

жении пластины с эллиптическим отверстием пластические деформации появляются только тогда, когда интеграл удельной избыточной энергии в той части опасного сечения, где $U > U_{кр}$, достигнет предельной величины, равной $U_{кр}L_0$.

В заключение автор выражает свою признательность за ценные замечания и поддержку в работе М. Д. Новопашины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденков И. Н., Зайцев Г. П. Механический анализ ударной хрупкости // ЖТФ.— 1932.— Т. 2, вып. 5.
2. Kuntze W. Ermittlung des Einflusses ungleichformiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze // Der Stahlbau.— 1933.— Jg. 6, N. 7.
3. Серенсен С. В. Прочность металла и расчет деталей машин.— М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1937.
4. Bascoul A., Maso J. C. Influence des gradients de contraintes ou de deformations sur le seuil d'écoulement plastique d'un acier // J. de Mec. Appl.— 1981.— V. 5, N. 4.
5. Балдин В. А., Потанов В. И., Фадеев А. А. О сопротивлении стали деформированию при неравномерном распределении напряжений // Строит. механика и расчет сооружений.— 1982.— № 5.
6. Геннев Г. А., Калашников С. Ю. Влияние градиентов напряжений, геометрии и масштабов сечений на переход изгибаемых элементов в пластическое состояние // Исследования по строительной механике: Сб. науч. тр.— М.: ЦНИИСК, 1985.
7. Иванов А. М., Новопашина М. Д. Методика исследования процесса формирования пластических зон у концентраторов при упругопластическом деформировании // Прочность материалов и элементов конструкций в условиях низких температур: Сб. науч. тр.— Якутск, 1985.
8. Новопашина М. Д., Иванов А. М. Расчет несущей способности элементов конструкций при неравномерном распределении напряжений // Повышение хладостойкости и несущей способности конструкций: Сб. науч. тр.— Якутск, 1987.
9. Новопашина М. Д., Сукнев С. В. Градиентный критерий текучести элементов конструкций с концентраторами напряжений // Моделирование в механике: Сб. науч. тр.— Новосибирск, 1987.— Т. 1(18), № 3.
10. Новопашина М. Д., Сукнев С. В. Градиентный критерий локального течения элементов металлоконструкций с концентраторами напряжений.— Якутск, 1987.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИФТПС).
11. Новопашина М. Д. Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.— Новосибирск, 1988.
12. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
13. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1921.— V. 221.— P. 163.
14. Серенсен С. В., Крамаренко О. Ю. Конструкционная прочность глобулярного чугуна // Вестн. машиностроения.— 1959.— № 1.
15. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.— Киев: Наук. думка, 1976.
16. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2.— М.: Наука, 1970.

г. Новосибирск

Поступила 9/1 1990 г.

УДК 539.374 : 621.91

Г. А. Королев

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В условиях высокоскоростной упругопластической деформации возникают неоднородности течения материала, связанные как с наличием упругих сил, которые могут вызвать автоколебательные процессы, так и с локализованным адиабатическим разогревом в узкой области наиболее высоких скоростей деформирования [1]. Математические исследования термопластического сдвига проводились в [2, 3], модель упруговязкой жидкости рассмотрена в [4]. В настоящей работе изучается случай плоского упругопластического течения с учетом тепловых эффектов, связанных с адиабатическими условиями, а также конвективного отвода тепла из зоны интенсивных деформационных процессов.