УДК 532.517

М. Б. Зельман, И. И. Масленникова

ГЕНЕРАЦИЯ СПЕКТРА ПУЛЬСАЦИЙ ПРИ СУБГАРМОНИЧЕСКОМ ПЕРЕХОДЕ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Как показано в [1—5], при малых начальных интенсивностях возмущений в пограничном слое универсально осуществляется s-тип ламинарно-турбулентного перехода. Существенные черты режима находят объяснение в рамках нелинейной теории устойчивости [6]. Ведущую роль играет механизм резонансного взаимодействия волн Толлмина — Шлихтинга (Т — Ш), который на начальной стадии приводит к селекции из фоновых пульсаций пары трехмерных волн [7]. Параметры последних (частота ω и волновые векторы $(\alpha, \pm\beta)$) соответствуют максимуму скорости параметрического усиления в поле вводимого двумерного возмущения Т — Ш с $\omega_0 = 2\omega$ и $(\alpha_0, 0)$. Выделенная симметричная триада образует фундаментальную структуру s-перехода. При выравнивании интенсивностей компонент триады параметрическая стадия трансформируется в нелинейную, на которой имеет место взрывное усиление всех взаимодействующих волн. Согласно экспериментам [2, 4, 5], выход на взрывной режим сопровождается быстрым уширением низкочастотной (НЧ) части спектра пространственных пульсаций. В дальнейшем отмечается стабилизация уровня амплитуд и турбулизация движения.

Из теории нелинейных систем известна тесная связь процессов стохастизации с механизмом заполнения спектра при ограничении роста колебаний. Предполагалось, что такие процессы в пограничном слое могут реализоваться вследствие резонансной каскадной передачи энергии по спектру в область сильно диссипирующих НЧ «существенно» трехмерных волн.

В данной работе изучаются возможность и следствия резонансной каскадной трансформации спектра. Механизм заполнения спектра анализируется в сопоставлении с экспериментами.

Рассмотрим каскадный процесс возбуждения фоновых пульсаций $\omega_n = \omega_0/2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в поле задающего колебания ω_0. Модель включает систему волн: плоскую индуцированную с параметрами $(\omega_0, \alpha_0, 0)$ амплитуды A_0, пару симметричных субгармоник $(\omega_0/2, \alpha_1, \pm\beta_1)$ A_1 и две пары вторых субгармоник $(\omega_0/4, \alpha_2, \pm\beta_2)$ A_2 и $(\omega_0/4, \alpha_3, \pm\beta_3)$ A_3. Возмущение поля скорости потока $\varepsilon u = \varepsilon(u_1, u_2, u_3)$ можно представить как

$$u(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^{m} B_j u_j \exp i\theta_j(x, z, t) + \varepsilon\Psi(x, y, z, t),$$

где $\theta_j = -\omega_j t + \beta_j z + \int \alpha_j\, dx$, $u_j(y)$ $\left(\max\limits_{0\leqslant y<\infty} |u_j| = 1\right)$ и дисперсионное соотношение $\omega_j + i\gamma_j = \Omega(\alpha_j, \beta_j)$ определяются локально-параллельной задачей Орра — Зоммерфельда [8]; Ψ — квазипериодическая по (x, z, t)-переменным функция; параметр $\varepsilon \ll 1$. В условиях стационарности и трансверсальной однородности система уравнений для комплексных амплитуд $A_j = B_j e^{\gamma_j t}$ принимает вид

$$(v_0 d/dx - \gamma_0) A_0 = S A_1^2 e^{-i\int\Delta_0 dx}, \tag{1}$$

$$(v_1 d/dx - \gamma_1) A_1 = S_0 A_0 A_1^* e^{i\int\Delta_0 dx} + C_1 a_2^2 e^{-i\int\Delta_1 dx} + $$
$$+ C_2 a_3^2 e^{-i\int\Delta_2 dx} + C_3 a_2 a_3 e^{-i\int\Delta_3 dx},$$

$$(v_{2,3} d/dx - \gamma_{2,3} - i w_{2,3}\delta_{2,3}) a_{2,3} = S_{2,3} A_1 a_{2,3}^* e^{i\int\Delta_{1,2} dx} + D_{2,3} A_1 a_{3,2}^* e^{i\int\Delta_3 dx}.$$

Здесь $\delta_{2,3} = \beta_1/2 - \beta_{2,3}$; $\Delta_0 = \alpha_0 - 2\alpha_1$; $\Delta_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2$; $\Delta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_3$; $\Delta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$; проведена замена $A_{2,3} = a_{2,3} e^{i\delta_{2,3} z}$. Коэф-

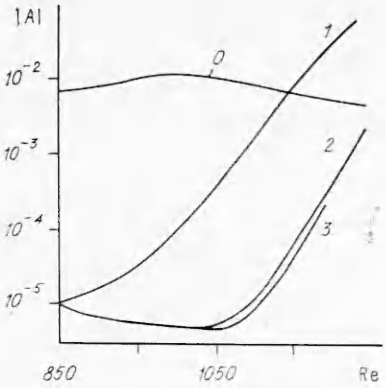

Рис. 1

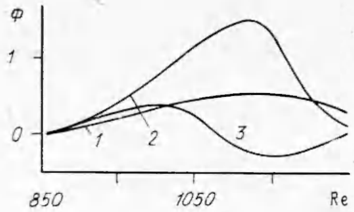

Рис. 2

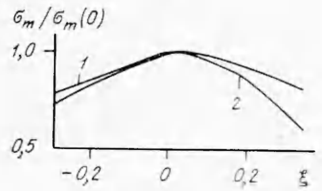

Рис. 3

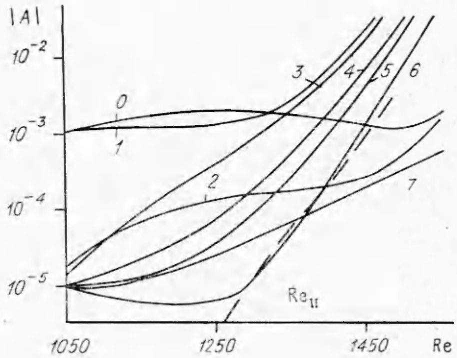

Рис. 4

фициенты v, w, S, C, D строятся из решений однородного и неоднородного уравнений Орра — Зоммерфельда для профиля Блазиуса [6].

Исследуется поведение системы (1) для различных β_2, β_3, при этом β_1 выбрано в области максимальных параметрических инкрементов ($\beta_1/\alpha_1 \approx 2$) [7]. На рис. 1 представлена эволюция $|A_j(\mathrm{Re})|$ (здесь и далее номер кривой соответствует индексу волны) при $F_0 = \omega_0 \mathrm{Re} = 122 \cdot 10^{-6}$, $b_2 = (\beta_2/\mathrm{Re}) \cdot 10^3 = 0{,}217$, $b_3 = 0{,}254$, Re определено по толщине вытеснения. Наблюдается параметрический рост первой $\omega_0/2$ и второй $\omega_0/4$ субгармоник. При этом вторая субгармоника находится вне синхронизма с двумерной волной Т — Ш частоты ω_0 и накачивается трехмерной $\omega_0/2$. В рассматриваемом диапазоне Re волны частоты ω_n ($n > 1$) находятся в зоне линейного затухания. С увеличением n декременты растут. Это приводит к проявлению порогового характера резонансной накачки НЧ-волн: волна частоты ω_{n+1} параметрически усиливается лишь после достижения амплитудой n-й волны надпорогового значения. Как показали расчеты, с увеличением n растет отношение $(\beta/\alpha)_{2,3}$, отвечающее максимальным параметрическим инкрементам (кривые *2*, *3* соответствуют $\beta_2/\alpha_2 = 2{,}8$, $\beta_3/\alpha_3 = 3{,}44$ в начальной точке).

Таким образом, осуществляется каскадный процесс последовательного возбуждения все «более трехмерных» субгармоник. Взаимодействие носит взрывной характер, фазы ($\varphi_j = \arg A_j$) $\Phi_1 = \varphi_0 - 2\varphi_1 + \int \Delta_1 dx$, $\Phi_2 = \varphi_1 - 2\varphi_2 + \int \Delta_2 dx$, $\Phi_3 = \varphi_1 - 2\varphi_3 + \int \Delta_3 dx$ (рис. 2, кривые *1—3*) синхронизуются. Стабилизации роста в каскадном процессе не происходит.

Сценарий перехода к турбулентности в пограничном слое через удвоение периода наблюдался в эксперименте [5]. Отмечены последовательное возбуждение трех субгармоник $\omega_0/2$, $\omega_0/4$, $\omega_0/8$ с уширением и заполнением НЧ-полосы спектра и дальнейшая трансформация его в сплошной. Уширение и заполнение НЧ-спектра могут происходить вследствие параметрического взаимодействия в несимметричных триплетах, когда $\omega_{k,l} \neq \omega_0/2$. При этом особенно эффективное взаимодействие сохраняется при синхронизме частот $\omega_k + \omega_l = \omega_0$. Примеры взаимодействий в таких конфигурациях в условиях, когда они формируют доминирующую структуру поля возмущений, приведены в [9]. Остановимся на этом подробнее.

Исследована зависимость инкрементов нарастания НЧ-возмущений $\sigma_{k,l} = \frac{1}{|A_{k,l}|}\frac{d|A_{k,l}|}{dx}$ от частотных параметров ω_k, ω_l. Для удобства введена величина $\pm\xi = \frac{\omega_0/2 - \omega_{k,l}}{\omega_0/2}$, характеризующая частотную отстройку от субгармонического триплета. Модель включает основную волну $(\omega_0, \alpha_0, 0)$ и трехмерные пары волн $(\omega_1, \alpha_1, \pm\beta_1)$, $(\omega_2, \alpha_2, \pm\beta_2)$ фоновой интенсивности, где $\omega_{1,2} = (\omega_0/2)(1 - \xi)$. Система амплитудных уравнений для этого случая $(m = 5)$ с учетом перекрестных связей дана в [9]. Для фиксированных ω_0, $|\xi|$ инкременты $\sigma_{1,2}$ зависят от начальной амплитуды волны накачки $|A_0(\mathrm{Re}_0)|$ и параметров β_1, β_2. Проведенные расчеты инкрементов $\sigma_{1,2}$ для различных ориентаций волновых векторов $(\beta/\alpha)_{1,2}$ показали, что аналогично субгармоническому триплету [7] инкремент $\sigma_{1,2}$ имеет максимум при некоторых (β_1^+, β_2^+): $\sigma_m(|A_0|, \xi) = \sigma_{1,2}(\beta_1^+, \beta_2^+, |A_0|, \xi)$. Зависимость $\sigma_m(\xi)/\sigma_m(0)$ приведена на рис. 3 для $|A_0(\mathrm{Re}_{II})| = 0{,}67$; $0{,}5$ % (кривые *1* и *2*, Re_{II} — число Рейнольдса на верхней ветви кривой нейтральной устойчивости) и $F_0 = 115 \cdot 10^{-6}$. Для фиксированного $|A_0(\mathrm{Re}_{II})|$ максимальный инкремент $\sigma_m(0)$ отвечает симметричным субгармоникам и при $\xi \neq 0$ медленно уменьшается с увеличением отстройки ξ. Возмущение меньшей частоты $(\xi > 0)$ имеет больший инкремент. Ширина эффективно возбуждаемой частотной полосы увеличивается с ростом интенсивности волны накачки $|A_0(\mathrm{Re}_{II})|$. Можно заключить, что большая ширина резонанса способствует возбуждению резонансных частот в широком диапазоне спектра.

Полученные результаты позволяют интерпретировать экспериментальные данные [10], где в пограничном слое пластины возбуждались волны: двумерная частоты ω_0 и пары симметричных трехмерных частоты $\omega_1 < \omega_0$ $(F_0 = 88 \cdot 10^{-6}$, $F_1 = 39{,}5 \cdot 10^{-6})$ с начальными интенсивностями порядка 0,1 %. Вниз по потоку наблюдался широкий набор НЧ пространственных мод, уровень интенсивности которых достигал уровня индуцированных. На начальном этапе доминирующими являлись, кроме индуцированных ω_0 и ω_1, также волны частот $2\omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$. Отмечалась трансформация первоначально двумерной волны частоты $2\omega_1$ в трехмерную в области $\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{Re}_{II}$. Установлено, что НЧ пространственные моды находились в синхронизме с доминирующими ω_1 и $2\omega_1$. Последние, как утверждается в [10], являлись главными передатчиками энергии к низким частотам.

Объяснить указанные результаты эксперимента можно в рамках развитых выше представлений. Согласно им, введение плоского колебания частоты ω_0 и трехмерного частоты $\omega_1 < \omega_0$ прежде всего должно привести к выделению из затравочных фоновых колебаний резонансных пространственных мод $\omega_7 = \omega_0/2$, $\omega_3 = \omega_0 - \omega_1$, а также плоской моды $\omega_2 = 2\omega_1$ вследствие нелинейного взаимодействия в симметричном триплете $(\omega_1, \alpha_1, \beta_1) + (\omega_1, \alpha_1, -\beta_1) = (2\omega_1, \alpha_2, 0)$. Это положит начало процессу каскадного возбуждения резонансных частот $\omega_4 = \omega_2 - \omega_3$, $\omega_5 = \omega_0 - \omega_4$, $\omega_6 = \omega_2 - \omega_5$ и т. д.

Результаты расчета амплитуд соответствующей многоволновой системы представлены на рис. 4. Сравнения с экспериментом [10] подтверждают справедливость предложенной модели. На начальном этапе $\mathrm{Re} \leqslant 1250$ доминируют моды с частотами ω_0, ω_1, ω_2 и ω_3, причем интенсивности $|A_2|$, $|A_3|$ резонансно возбуждаемых из фона волн частот ω_2, ω_3 в этой области практически не связаны с их начальными значениями $(|A_2(x_0)|, |A_3(x_0)|) \leqslant 10^{-4}$. В области $\mathrm{Re} \geqslant 1350$ интенсивности $|A_j|$ возбуждаемых на частотах ω_j $(j = 4—6)$ волн достигают уровня индуцированных и совпадают с полученными в эксперименте. Интенсивность субгармоники $(j = 7)$ оказывается заметно меньшей, что также согласуется с данными [10].

Подчеркнем, что обнаруженное в эксперименте уменьшение скоростей роста колебаний при увеличении частотной расстройки $\omega_0 - \omega_1$ полностью соответствует представлению о том, что максимум взаимодействия осуществляется в субгармонических (симметричных) триадах (см. рис. 3) [7]. В условиях же парных взаимодействий скорость нарастания биений определяется индивидуальными параметрами связанных волн. Отметим, что в этой модели речь идет о резонансном возбуждении собственных Т — Ш волновых возмущений. Генерация колебания ω_n (n-й ступени каскада) не сопряжена в случае резонанса с повышением порядка взаимодействия: $A(\omega_n) \sim \varepsilon A$. В то же время для нелинейных гармоник (биений) вместе с увеличением их номера n должно иметь место возрастание порядка: $A(\omega_n) \sim (\varepsilon A)^n$ ($n \geqslant 2$), чего не наблюдалось в [10].

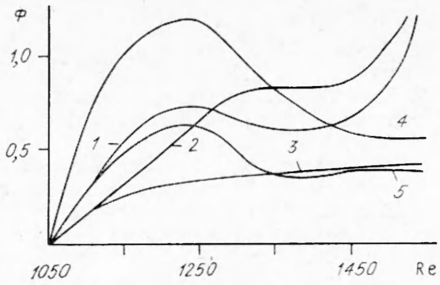

Рис. 5

Конкурентоспособный вклад «нерезонансных» колебаний в спектр возмущений может быть внесен только биениями исходных волн (ω_0, ω_1), описываемыми функцией Ψ в квадратичном порядке теории. Поведение амплитуды несобственной трехмерной волны ($2\omega_1$, $2\alpha_1$, $\pm 2\beta$) представлено штриховой линией на рис. 4. Как видно, в области Re $\geqslant$ 1350 эта трехмерная волна превосходит по интенсивности плоскую волну частоты $2\omega_1$ (кривая *2*), что и объясняет результаты [10].

Расчеты показали, что двумерная волна частоты $2\omega_1$ играет важную роль в процессе передачи энергии в низкие частоты. В нашей модели все НЧ-волны параметрически связаны с двумя плоскими ω_0 и ω_1. Как видно из поведения фаз на рис. 5, связь с ω_2 определяющая. Фазы $\Phi_3 = \varphi_2 - 2\varphi_1$, $\Phi_4 = \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$, $\Phi_5 = \varphi_2 - \varphi_5 - \varphi_6$ (кривые *3—5*) демонстрируют нелинейный синхронизм НЧ-возмущений с фазой φ_2 (локализация фаз) в отличие от поведения фаз $\Phi_1 = \varphi_0 - \varphi_3 - \varphi_6$, $\Phi_2 = \varphi_0 - \varphi_4 - \varphi_5$ (кривые *1*, *2*), где такого синхронизма с φ_0 не наблюдается. Особая роль волны частоты ω_2 подчеркнута в [10].

Характер кривых на рис. 4 свидетельствует, что в процессе передачи энергии в низкие частоты стабилизации роста амплитуд не происходит. Возбуждение последующих колебаний ω_n слабо сказывается на поведении волн частоты ω_{n-1}, что позволяет считать поведение приведенных кривых инвариантным относительно дальнейшего увеличения ступеней каскада.

Данная работа показала, что в рамках слабонелинейной теории находит объяснение процесс заполнения спектра, предшествующий переходу. С ростом интенсивности происходят как резонансное возбуждение низких частот, так и генерация высокочастотных пространственных гармоник [11]. Этот процесс, однако, не ведет непосредственно к стохастизации движения, так как сохраняет неизменным рост интенсивностей и фазовую синхронизацию возмущений. Механизм стабилизации последних, по-видимому, обусловлен существенно нелинейной генерацией высших гармоник, транспортом и диссипацией энергии в области высокочастотной части спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Нелинейное развитие волны в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 3.
2. **Kachanov Yu. S., Levchenko V. Ya.** The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138, N 1.
3. **Saric W. S., Thomas A. S. W.** Experiments on the subharmonic route to turbulence in boundary layers // Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
4. **Corke T. C., Mangano R. A.** Resonant growth of three-dimensional modes in transitioning Blasius boundary layers // J. Fluid Mech.— 1989.— V. 209, N 1.
5. **Yan Dachun, Zhu Qiankan, Yu Dacheng et al.** Resonant interaction of Tollmien —

Schlichting waves in the boundary layer on a flat plate // Acta Mech. Sinica.— 1988.— V. 4, N 2.
6. **Зельман М. Б.** О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1974.— № 13, вып. 3.
7. **Зельман М. Б., Масленникова И. И.** О формировании пространственной структуры субгармонического режима перехода в потоке Блазиуса // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1989.— № 3.
8. **Зельман М. Б., Масленникова И. И.** Об эффектах резонансных взаимодействий волновых возмущений в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 4.
9. **Зельман М. Б., Масленникова И. И.** О резонансном взаимодействии пространственных возмущений в пограничном слое // ПМТФ.— 1985.— № 1.
10. **Corke T. C.** Effect of controlled resonant interactions and mode detuning on turbulent transition in boundary layers // Laminar-Turbulent Transition.— Berlin et al: Springer-Verlag, 1990.
11. **Maslennikova I. I., Zelman M. B.** On subharmonic-type laminar-turbulent transition in boundary layer // Laminar-Turbulent Transition.— Berlin et al: Springer-Verlag, 1985.

г. Новосибирск *Поступила 5/II 1991 г.*

УДК 531/534

А. И. Весницкий, А. В. Метрикин

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Развитие высокоскоростного наземного транспорта, а также увеличение скорости работы машин и механизмов резко повысили интерес к вопросам взаимодействия упругих конструкций с движущимися объектами (см., например, [1, 2]). Однако, несмотря на обилие работ, остаются фактически не изученными волновые процессы, возникающие в несущих конструкциях, в частности эффекты волнообразования и сопутствующий им эффект давления волн на движущийся объект [3]. Наиболее интересным с практической точки зрения является случай, когда конструкция существенно неоднородна. Равномерное движение объекта по такой конструкции сопровождается возбуждением упругих волн. Это явление по аналогии с впервые описанным в [4] применительно к электромагнитным волнам естественно называть переходным излучением.

В настоящей работе приводится общая постановка задачи о взаимодействии движущегося сосредоточенного объекта с неоднородной упругой направляющей [3]. Подробно исследуется равномерное движение тела по полубесконечной струне на упругом основании. Показано, что при движении тела вблизи области неоднородности (точки закрепления) в струне возникает переходное излучение, в процессе которого на тело действует сила давления волн со стороны струны. Получено выражение, связывающее работу этой силы и энергию излучения.

1. Рассмотрим одномерную упругую систему, движение которой определено в области D: $\{\alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ a \leqslant x \leqslant b\}$ и характеризуется функционалом Лагранжа

$$L = \int_a^b \lambda(x, t)\, dx,$$

где $\lambda = \lambda(t, x, \mathbf{U}(x, t); U_t, U_x)$ — плотность функции Лагранжа; $\mathbf{U}(x, t)$ — вектор обобщенных координат с компонентами $U_1, U_2, \ldots, U_n$, в предположении, что при $x = d$ $(a < d < b)$ происходит конечный скачок параметров этой системы (например, погонной плотности, упругости основания и т. п.).

Пусть вдоль упругой системы по некоторому закону $x = l(t)$ движется сосредоточенный объект, характеризующийся функцией Лагранжа $L^0 = L^0(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}, l(t), \dot{l})$ и вектором обобщенных координат с компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_m$.