

УДК 532.5:532.517.4

КРИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ДВУХАТОМНОГО ГАЗА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,

630008 Новосибирск

E-mails: grigor@ict.nsc.ru, i_ershov@ngs.ru

В рамках нелинейной энергетической теории гидродинамической устойчивости выведено уравнение энергетического баланса для плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного двухатомного газа, описываемых двухтемпературной релаксационной моделью. Для этого уравнения рассмотрена вариационная задача вычисления критических значений числа Рейнольдса Re_{cr} , определяющих нижнюю границу возможного начала ламинарно-турбулентного перехода. Получены асимптотические оценки Re_{cr} , показывающие, что критические числа Рейнольдса зависят от числа Маха, объемной вязкости, времени релаксации. С помощью метода коллокаций численно решена задача для произвольных волновых чисел. Показано, что в реальном для двухатомных газов диапазоне параметров режима течения минимальные критические значения числа Рейнольдса достигаются на модах продольных возмущений и с ростом указанных параметров увеличиваются в пределе приблизительно в 2,5 раза.

Ключевые слова: энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной газовой динамики, критическое число Рейнольдса.

Введение. В работах [1, 2] на основе энергетической теории в рамках модели Навье — Стокса исследовано влияние умеренного термического возбуждения на устойчивость сжимаемого течения Куэтта. В [1] с использованием сформулированной спектральной задачи получены асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса Re_{cr} в пределе малых волновых чисел возмущений, содержащие характерную зависимость Re_{cr} от объемной вязкости (степени возбуждения). В [2] спектральная задача решена численно в достаточно широком диапазоне значений волновых чисел. Показано, что увеличение объемной вязкости в реальных пределах приводит к увеличению значения Re_{cr} более чем на 30 %. Вместе с тем анализ полученных результатов позволил сделать вывод о том, что дальнейшее возрастание термической неравновесности, сопровождающееся возбуждением колебательных уровней молекул и не описываемое использованной моделью, может привести к еще более существенному увеличению критических чисел Рейнольдса.

В настоящей работе на основе энергетической теории аналитически и численно исследуется влияние глубокого термического возбуждения на критические числа Рейнольд-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00116, 11-01-00064).

© Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., 2012

са Re_{cr} . Рассматривается течение Куэтта возбужденного газа, описываемое системой уравнений двухтемпературной газовой динамики. В соответствии с физическими представлениями [3–5] эта система является общепринятой математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

1. Исходные уравнения. Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа рассматривается в расчетной области Ω , представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3) , а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2 .

В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны полуширина канала L по оси x_2 , модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного потока, время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной газовой динамики записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{Re} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{Re Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\rho \gamma_v (T_v - T)}{\tau} + \\ + \frac{\gamma(\gamma - 1) M_0^2}{2 Re} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right], \quad (1) \\ \gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_v}{\partial x_j} \right) = \frac{\gamma \alpha_2}{Re Pr} \frac{\partial^2 T_v}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}, \quad \gamma M_0^2 p = \rho T, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где ρ , u_i , p , T , T_v , τ — плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа, время колебательной релаксации соответственно. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается, что теплоемкости, диссипативные коэффициенты и время τ в системе (1) не зависят от статической и колебательной температур потока и постоянны.

Параметры, входящие в уравнения (1), определяются следующим образом: $\alpha_1 = \eta_b/\eta$ (η_b , η — объемная и сдвиговая вязкости), $\alpha_2 = \lambda_v/(\lambda_t + \lambda_r)$ (λ_t , λ_r , λ_v — коэффициенты теплопроводности, описывающие перенос энергии соответственно поступательными и вращательными степенями свободы молекул, а также квантами колебательной энергии), $\gamma_v = c_{V,v}/(c_{V,t} + c_{V,r})$ — параметр, характеризующий степень неравновесности колебательной моды ($c_{V,t}$, $c_{V,r}$, $c_{V,v}$ — удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод соответственно), $\gamma = (c_{V,t} + c_{V,r} + R)/(c_{V,t} + c_{V,r})$ — показатель адиабаты (R — газовая постоянная), $Re = U_0 L \rho_0/\eta$, $M_0 = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$, $Pr = \eta(c_{V,tr} + c_{V,rot} + R)/(\lambda_{tr} + \lambda_{rot})$ — числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока соответственно.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [3, 4]

$$\tau_{tt} \sim \tau_{rt} \ll \tau_{vv} \ll \tau_{vt} \sim \tau_0.$$

В этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми измеримыми временами релаксации $\tau_{tt} \sim \tau_{rt}$ на временах порядка характерного времени

течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T . В подсистеме колебательных уровней энергии по истечении промежутка времени τ_{vv} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_v . Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау — Теллера с характерным временем $\tau_{vt} \equiv \tau$.

Такое представление позволяет уменьшить число независимых параметров в системе (1) следующим образом. Используя соотношения Эйкена [3, 4]

$$\lambda_t = (5/2)\eta c_{V,t}, \quad \lambda_r = (6/5)\eta c_{V,r}, \quad \lambda_v = (6/5)\eta c_{V,v},$$

связывающие парциальные коэффициенты теплопроводности с коэффициентом сдвиговой вязкости, выражение для параметра α_2 можно записать следующим образом:

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_v}{\lambda_t + \lambda_r} = \frac{(6/5)c_{V,v}}{(5/2)c_{V,t} + (6/5)c_{V,r}} = \frac{12\gamma_v(c_{V,t} + c_{V,r})}{25c_{V,t} + 12c_{V,r}}.$$

Так как поступательные и вращательные степени свободы молекул находятся в состоянии квазиравновесия, их внутренняя энергия равномерно распределена по степеням свободы. Поэтому значения соответствующих теплоемкостей равны $c_{V,t} = (3/2)R$, $c_{V,r} = R$. В результате получается выражение

$$\alpha_2 = 20\gamma_v/33.$$

В качестве несущего потока рассматривается плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур:

$$\mathbf{U}_s(x_2) = (x_2, 0, 0), \quad T_s(x_2) = T_{v,s}(x_2) = \rho_s(x_2) = 1, \quad p_s(x_2) = 1/(\gamma M_0^2).$$

Представление мгновенных значений гидродинамических величин возмущенного течения в виде

$$\rho = 1 + \rho', \quad u_i = U_{s,i} + u'_i, \quad T = 1 + T', \quad T_v = 1 + T'_v, \quad p = 1/(\gamma M_0^2) + p'$$

позволяет получить уравнения для возмущений ρ' , u'_i , T' , T'_v , p' основного течения без ограничения на их амплитуды:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0; \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) M_0^2 p \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_v \rho (T'_v - T')}{\tau} + \\ &+ \frac{\gamma(\gamma - 1) M_0^2}{2\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 \right]; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\gamma_v \rho \left(\frac{\partial T'_v}{\partial t} + u'_j \frac{\partial T'_v}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial T'_v}{\partial x_j} \right) = \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T'_v}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_v \rho (T'_v - T')}{\tau}; \quad (5)$$

$$\gamma M_0^2 p' = \rho T' + \rho', \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Предполагается, что при $x_1 = \pm x_0/2$ и $x_3 = \pm z_0/2$ возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. В расчетах размеры области Ω по периодическим (однородным) координатам x_1, x_3 полагались равными длине волны возмущения по соответствующей координате: $x_0 = 2\pi/\beta, z_0 = 2\pi/\delta$ (β, δ — модули проекций волнового вектора возмущения \mathbf{k} на оси координат x_1, x_3).

2. Функционалы энергетического баланса возмущений. Для системы (2)–(6) в качестве исходного уравнения энергетического баланса возмущений рассматривалось полученное в [1] уравнение энергетического баланса кинетической энергии возмущений

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{\rho u_i'^2}{2} d\Omega,$$

которое имеет вид

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho u_i'^2}{2} d\Omega = J_1 + J_2 - \frac{1}{\text{Re}} \left[J_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) J_4 \right]. \quad (7)$$

Здесь

$$J_1 = - \int_{\Omega} \rho u_i' u_j' \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} d\Omega, \quad J_2 = \int_{\Omega} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} d\Omega, \quad J_3 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega, \quad J_4 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

Слагаемое J_1 описывает обмен энергией между напряжениями Рейнольдса и основным потоком, интеграл J_2 интерпретируется как работа при пульсационном сжатии или расширении газа, а интегралы J_3, J_4 соответствуют процессам механической диссипации энергии. Уравнение (7) имеет универсальный характер, так как при его выводе в модели Навье — Стокса [1] использовались только уравнение неразрывности и уравнения импульсов системы уравнений для возмущений, совпадающие с уравнениями (2), (3).

Чтобы учесть особенности энергетического баланса возмущений в колебательно-возбужденном газе, преобразуем интеграл J_2 в правой части уравнения (7). С использованием уравнений неразрывности (2), состояния (6), энергии (4) и уравнения Ландау — Теллера (5) выражение для J_2 принимает вид

$$\begin{aligned} J_2 = \int_{\Omega} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} d\Omega &= \frac{1}{\gamma M_0^2} \int_{\Omega} (\rho T' + \rho') \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} d\Omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\rho (T'^2 + \gamma_v T_v'^2) + \frac{\rho'^2}{\gamma M_0^2} \right) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \left[\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{20\gamma_v}{33} \left(\frac{\partial T_v'}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \frac{\gamma_v \rho (T_v' - T')^2}{\tau} + \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2} \right) \rho T' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right\} d\Omega + \\ &+ \frac{\gamma(\gamma - 1) M_0^2}{2\text{Re}} \int_{\Omega} T' \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right)^2 \right] d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \left(\frac{\rho'}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \rho' u_i'}{\partial x_i} + (\gamma - 1) \rho T'^2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right) d\Omega. \quad (8) \end{aligned}$$

После подстановки выражения (8) в уравнение (7) в его левой части выделяется производная по времени от следующей квадратичной формы:

$$E_t(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho (u_i'^2 + T'^2 + \gamma_v T_v'^2) + \frac{\rho'^2}{\gamma M_0^2} \right) d\Omega.$$

Преобразованное таким образом уравнение энергетического баланса записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dE_t}{dt} \equiv \Phi = & - \int_{\Omega} \left\{ (1 + \rho') u'_i u'_j \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\gamma_v}{\tau} (1 + \rho') (T'_v - T')^2 + \frac{\rho'}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \rho' u'_i}{\partial x_i} + \right. \\ & + \left((\gamma - 1)(1 + T') - \frac{1}{\gamma M_0^2} \right) (1 + \rho') T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} - \frac{\gamma(\gamma - 1) M_0^2 T'}{2 \text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 \left. \right] + \\ & \left. + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{20\gamma_v}{33} \left(\frac{\partial T'_v}{\partial x_i} \right)^2 \right) \right] \right\} d\Omega. \quad (9) \end{aligned}$$

Квадратичная форма E_t определяет полную пульсационную энергию возмущений. В последней строке уравнения (9) содержится группа положительно определенных слагаемых, поэтому с уменьшением числа Рейнольдса (начиная с некоторого критического значения Re_{cr}) правая часть этого уравнения становится отрицательной. При этом $dE_t/dt < 0$ и любые возмущения затухают. Критическое число Рейнольдса Re_{cr} соответствует условию нейтральных возмущений $dE_t/dt = 0$ и вычисляется как минимум функционала в правой части энергетического уравнения.

Для дальнейшего упрощения уравнения (9) будем считать, что корреляции четвертого порядка по возмущениям малы и ими можно пренебречь. Аналогично [1, 2] в уравнении (9) выполняется частичное разделение переменных. При этом зависимости возмущений скорости, плотности и температур от периодической координаты x_3 представляются в виде

$$\begin{aligned} u'_1 = u''_1(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad u'_2 = u''_2(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad u'_3 = u''_3(x_1, x_2) \sin(\delta x_3), \\ \rho' = \rho''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad T' = T''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad T'_v = T''_v(x_1, x_2) \cos(\delta x_3). \end{aligned} \quad (10)$$

С использованием представления (10) в уравнении (9) проводится интегрирование по переменной x_3 в интервале $[-\pi/\delta; \pi/\delta]$. В результате энергетическое уравнение для функций переменных x_1, x_2 принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dE''_t}{dt} \equiv \Phi'' = & - \int_S \left\{ u''_1 u''_2 + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u''_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u''_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u''_3}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial u''_3}{\partial x_2} \right)^2 + \delta^2 (u''_1{}^2 + u''_2{}^2 + u''_3{}^2) + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u''_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} + \delta u''_3 \right)^2 + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left\{ \left(\frac{\partial T''}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial T''}{\partial x_2} \right)^2 + \delta^2 T''{}^2 + \frac{20\gamma_v}{33} \left[\left(\frac{\partial T''_v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T''_v}{\partial x_2} \right)^2 + \delta^2 T''_v{}^2 \right] \right\} - 2\gamma(\gamma - 1) M_0^2 T'' \left(\frac{\partial u''_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u''_2}{\partial x_1} \right) \left. \right] + \\ & \left. \frac{\gamma_v (T''_v - T'')^2}{\tau} + \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2} \right) T'' \left(\frac{\partial u''_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} + \delta u''_3 \right) \right\} dS. \end{aligned}$$

В [5] показано, что операции варьирования и частичного интегрирования по однородным координатам перестановочны и изменение порядка их выполнения не приводит к изменению исходной вариационной задачи. Вместе с тем варьируемый функционал Φ'' в правой части становится квадратичным по функциям возмущений u''_i, T'', T''_v и их производным.

3. Спектральная задача. Из условия экстремума функционала Φ'' на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера — Лагранжа, определяющие обобщенную дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re :

$$\Delta u''_1 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial D}{\partial x_1} - \gamma(\gamma - 1) M_0^2 \frac{\partial T''}{\partial x_2} - \frac{\text{Re}}{2} \left[u''_2 - \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2} \right) \frac{\partial T''}{\partial x_1} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta u_2'' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial D}{\partial x_2} - \gamma(\gamma - 1)M_0^2 \frac{\partial T''}{\partial x_1} - \frac{\text{Re}}{2} \left[u_1'' - \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2}\right) \frac{\partial T''}{\partial x_2} \right] &= 0, \\ \Delta u_3'' - \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) D - \frac{\text{Re}}{2} \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2}\right) \delta T'' &= 0, \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \Delta T'' + \gamma(\gamma - 1)M_0^2 \left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_1}\right) - \frac{\text{Re}}{2} \left[2\gamma_v \frac{T'' - T_v''}{\tau} + \left(\gamma - \frac{1 + \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2}\right) D \right] &= 0, \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \Delta T_v'' - \frac{\text{Re}}{2} \frac{33(T_v'' - T'')}{10\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$D = \frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3'', \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \delta^2,$$

амплитудные функции u_i'' , ρ'' , T'' , T_v'' при $x_1 = \pm\pi/\beta$ удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения.

3.1. *Качественный анализ.* После подстановки в систему (11) выражения для вектора возмущений $\varphi'' = (u_1'', u_2'', u_3'', T'', T_v'')$ в виде

$$\varphi''(x_1, x_2) = \varphi(x_2) \exp(i\beta x_1),$$

где $\varphi = (u, v, w, \theta, \theta_v)$; β — проекция вещественного волнового вектора на координатную ось x_1 ; i — мнимая единица, спектральная задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пульсаций $u, v, w, \theta, \theta_v$:

$$\begin{aligned} u'' + i\beta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) v' - \left[\beta^2 \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) + \delta^2\right] u + i\beta \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) w - \gamma(\gamma - 1)M_0^2 \theta' &= \\ &= \frac{\text{Re}}{2} \left[v + \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma M_0^2}\right) i\beta \theta \right], \\ \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) v'' + i\beta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) u' + \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) w' - k^2 v - \gamma(\gamma - 1)M_0^2 i\beta \theta &= \\ &= \frac{\text{Re}}{2} \left[u + \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma M_0^2}\right) \theta' \right], \\ w'' - \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) v' - i\beta \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) u - \left[\delta^2 \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) + \beta^2\right] w &= \\ &= -\frac{\text{Re}}{2} \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma M_0^2}\right) \delta \theta, \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} (\theta'' - k^2 \theta) + \gamma(\gamma - 1)M_0^2 (u' + i\beta v) &= \\ &= \frac{\text{Re}}{2} \left[\frac{2\gamma_v}{\tau} (\theta - \theta_v) - \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma M_0^2}\right) (v' + i\beta u + \delta w) \right], \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} (\theta_v'' - k^2 \theta_v) &= -\frac{\text{Re}}{2} \frac{33(\theta - \theta_v)}{10\tau}, \quad k^2 = \beta^2 + \delta^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и далее штрихи у неизвестных функций означают их производные соответствующего порядка по переменной x_2 . Задача (12) замыкается граничными условиями

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_v|_{x_2=\pm 1} = 0. \quad (13)$$

Спектральная задача (12), (13) имеет следующие свойства.

1. Вещественность спектра собственных значений Re задачи (12), (13). Это свойство следует из энергетического тождества для системы (12), (13), которое получается умножением уравнений (12) на комплексно-сопряженные функции u^* , v^* , w^* , θ^* , θ_v^* , суммированием их и интегрированием по интервалу $x_2 \in [-1, 1]$. С учетом однородных граничных условий (13) имеет место выражение

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Re}}{2} \int_{-1}^1 \left\{ u^* v + uv^* + \frac{2\gamma v}{\tau} |\theta - \theta_v|^2 + \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma M_0^2}\right) \left[2\beta(\theta_r u_i - \theta_i u_r) - \delta(\theta^* w + \theta w^*) + \right. \right. \\ & \left. \left. + v_r \frac{d\theta_r}{dx_2} + v_i \frac{d\theta_i}{dx_2} - \theta_r \frac{dv_r}{dx_2} - \theta_i \frac{dv_i}{dx_2} \right] \right\} dx_2 + \int_{-1}^1 \left\{ \left| \frac{du}{dx_2} \right|^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) \left| \frac{dv}{dx_2} \right|^2 + \left| \frac{dw}{dx_2} \right|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\left| \frac{d\theta}{dx_2} \right|^2 + k^2 |\theta|^2 + \frac{20\gamma v}{33} \left(\left| \frac{d\theta_v}{dx_2} \right|^2 + k^2 |\theta_v|^2 \right) \right] + \left(\beta^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) + k^2 \right) |u|^2 + k^2 |v|^2 + \right. \\ & \left. + \left(\delta^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) + k^2 \right) |w|^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left[\beta \left(u_r \frac{dv_i}{dx_2} + v_r \frac{du_i}{dx_2} - u_i \frac{dv_r}{dx_2} - v_i \frac{du_r}{dx_2} \right) - \delta \left(v_r \frac{dw_r}{dx_2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + v_i \frac{dw_i}{dx_2} - w_r \frac{dv_r}{dx_2} - w_i \frac{dv_i}{dx_2} \right) + 2\beta \delta (u_r w_i - u_i w_r) \right] - \gamma(\gamma - 1) M_0^2 \left[\delta \left(\theta_r \frac{du_r}{dx_2} + \theta_i \frac{du_i}{dx_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - u_r \frac{d\theta_r}{dx_2} - u_i \frac{d\theta_i}{dx_2} \right) - 2\beta(\theta_r v_i - \theta_i v_r) \right] \left. \right\} dx_2 = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь индексы r , i обозначают вещественную и мнимую части соответствующих комплекснозначных функций. Вещественность спектрального параметра Re определяется вещественностью всех слагаемых тождества (14). Вместе с тем квадратичная форма, которую определяет энергетическое тождество (14), не является положительно определенной. Это означает, что собственные значения могут быть также отрицательными, поэтому в расчетах следует искать минимальное по модулю собственное значение $\min |\text{Re}|$.

2. Симметрия спектра собственных значений $\text{Re}(\beta, \delta)$ относительно осей $\beta = 0$, $\delta = 0$ на плоскости волновых чисел (β, δ) . Действительно, из уравнений системы (12) следует, что каждому собственному значению $\text{Re}(\beta, \delta)$ с собственными функциями u , v , w , θ , θ_v соответствует равное ему собственное значение $\text{Re}(-\beta, \delta)$ с собственными функциями u^* , v^* , w^* , θ^* , θ_v^* . То же собственное значение $\text{Re}(\beta, \delta)$ соответствует также паре волновых чисел $(\beta, -\delta)$ и набору собственных функций u , v , $-w$, θ , θ_v .

3. Асимптотика собственных значений для частных мод возмущений. Рассматриваются два предельных случая, когда от спектральной задачи (12), (13) можно перейти к скалярному полиномиальному спектральному пучку обыкновенных дифференциальных операторов. Для нахождения асимптотики собственных значений этого пучка используется метод, развитый в работе [6], где рассматривался спектральный пучок операторов вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0, \quad (15)$$

коэффициенты которого являются полиномами от спектрального параметра λ :

$$p_i(x, \lambda) = \lambda^i \sum_{j=0}^i \lambda^{-j} p_{ij}(x).$$

Уравнение (15) дополняется системой однородных граничных условий, которые также могут содержать полиномы по λ степени не выше n . Для получения асимптотики собственных значений вне некоторого круга на комплексной плоскости спектрального параметра вместо (15) рассматривается упрощенное уравнение

$$y^{(n)} + \lambda p_{10} y^{(n-1)} + \dots + \lambda^k p_{k0} y^{(n-k)} + \dots + \lambda^n p_{n0} y = 0. \quad (16)$$

Это означает, что при замене (15) на (16) в последнем уравнении необходимо оставить только те слагаемые, в которых сумма старшей степени спектрального параметра и порядка производной совпадает с порядком уравнения (15).

Подстановка в (16) выражения $y \sim \exp(\mu x)$ приводит к характеристическому уравнению

$$\mu^n + \lambda p_{10} \mu^{n-1} + \dots + \lambda^k p_{k0} \mu^{n-k} + \dots + \lambda^n p_{n0} = 0,$$

которое с помощью автомодельной замены переменной $\mu = \lambda z$ сводится к виду

$$z^n + p_{10} z^{n-1} + \dots + p_{k0} z^{n-k} + \dots + p_{n0} = 0. \quad (17)$$

После нахождения корней (17) система решений (16) $y_i = \exp(\lambda z_i x)$, $i = 1, \dots, n$ подставляется в граничные условия и находятся асимптотические собственные значения исходной спектральной задачи.

На основе изложенного подхода ниже исследованы две предельные моды возмущений.

Постоянная мода $\beta = \delta = 0$. В этом случае система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} u'' - a\theta' - \lambda v = 0, \quad b v'' + \lambda(c\theta' - u) = 0, \quad w'' = 0, \\ d\theta'' + a u' - \lambda(c v' + f\vartheta) = 0, \quad g\theta'' + \lambda f\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Здесь a, b, c, d, f, g — коэффициенты:

$$\begin{aligned} a = \gamma(\gamma - 1)M_0^2, \quad b = \alpha_1 + 4/3, \quad c = \gamma - 1 - 1/(\gamma M_0^2), \\ d = \gamma/\text{Pr}, \quad f = 2\gamma\gamma_v/\tau, \quad g = (20/33)\gamma_v\gamma^2/\text{Pr}. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, введены обозначения $\lambda = \text{Re}/2$, $\vartheta = \theta - \theta_v$.

Уравнение для функции w интегрируется отдельно и имеет общее решение

$$w = c_1 x_2 + c_2,$$

которое с учетом однородных граничных условий (13) тождественно равно нулю, что понижает порядок системы на единицу. Из сокращенной таким образом системы путем последовательного исключения неизвестных получается скалярная спектральная задача для функции $\vartheta(x_2)$. Чтобы свести задачу к задаче для спектрального пучка вида (16), на промежуточных этапах из уравнений удалялись все слагаемые, не удовлетворяющие необходимому требованию. В результате получено уравнение

$$\vartheta^{(6)} + \lambda r \vartheta^{(4)} + \lambda^2 s \vartheta^{(2)} + \lambda^3 t \vartheta = 0, \quad (19)$$

где r, s, t — коэффициенты:

$$\begin{aligned} r = -\frac{f(d+g)}{dg}, \quad s = \frac{c^2 - ac - d}{bd}, \\ t = \frac{f}{bd} \left[\frac{1}{g} \left(\frac{ac}{d} + 1 \right)^2 (d+g) + \left(\frac{ac}{d} + 1 \right) \frac{a^2}{d} - c^2(d+g) + \frac{ac}{d} \right]. \end{aligned}$$

Заменой переменной $y^{(k)} = \vartheta^{(2k)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ уравнение (19) преобразуется к уравнению вида (16):

$$y''' + \lambda r y'' + \lambda^2 s y' + \lambda^3 t y = 0. \quad (20)$$

В данном случае соответствующим (17) характеристическим уравнением является полное кубическое уравнение

$$z^3 + rz^2 + sz + t = 0. \quad (21)$$

Для анализа его корней используется стандартный подход [7]. С помощью линейной замены переменной $z = x - r/3$ осуществляется переход к приведенному кубическому уравнению

$$x^3 + px + q = 0,$$

где

$$p = (3s - r^2)/3, \quad q = 2r^3/27 - sr/3 + t.$$

Для исследования корней этого уравнения рассматривается его дискриминант

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

Проведенные оценки показывают, что во всем диапазоне значений коэффициентов в исходном уравнении (19) справедливы неравенства $p < 0$, $q < 0$ и

$$|(p/3)^3| \ll (q/2)^2. \quad (22)$$

Следовательно, дискриминант $D > 0$, поэтому уравнение (21) (или (20)) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, которые определяются через вспомогательные функции u, v по формулам Кардано [7]

$$x_1 = u + v, \quad x_{2,3} = \frac{u + v}{2} \pm \frac{u - v}{2} i\sqrt{3}.$$

Здесь $u = (-q/2 + \sqrt{D})^{1/3}$; $v = (-q/2 - \sqrt{D})^{1/3}$. В силу (22) для получения асимптотической оценки можно принять $\sqrt{D} \simeq |q/2|$. Тогда $u \simeq |q|^{1/3}$, $v \simeq 0$. В результате

$$x_1 = |q|^{1/3}, \quad x_{2,3} = -|q|^{1/3}(1 \mp i\sqrt{3})/2.$$

Таким образом, корни уравнения (21) имеют вид

$$z_1 = |q|^{1/3} + \frac{\text{Pr}}{2\tau\gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma v \gamma\right), \quad z_{2,3} = -\frac{\text{Pr}}{2\tau\gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma v \gamma\right) |q|^{1/3} \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, характеристическое уравнение, соответствующее исходному уравнению (19), имеет пару вещественных корней

$$\delta_{1,2} = \pm \sqrt{\left| \frac{\text{Re}}{2} \left[|q|^{1/3} + \frac{\text{Pr}}{2\tau\gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma v \gamma\right) \right] \right|} \equiv \pm \delta$$

и две пары комплексно-сопряженных корней

$$\delta_{3,4} = \pm \sqrt{|\mu|} \exp\left(\frac{i}{2} \arg \mu\right), \quad \delta_{5,6} = \pm \sqrt{|\mu|} \exp\left(-\frac{i}{2} \arg \mu\right).$$

При этом

$$|\mu| = \frac{|\text{Re}|}{4} \sqrt{\left[|q|^{1/3} - \frac{\text{Pr}}{\tau\gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma v \gamma\right) \right]^2 + 3|q|^{2/3}},$$

$$\arg \mu = \arctg \frac{|q|^{1/3} \sqrt{3}}{|q|^{1/3} - \text{Pr} [1 + (20/33)\gamma v \gamma]/(\tau\gamma)}.$$

Чтобы не усложнять граничные условия для уравнения (19), можно ограничиться попарным рассмотрением решений при граничных условиях $\vartheta(\pm 1) = 0$. Для пары вещественных корней $\delta_{1,2}$ решение ищется в виде

$$\vartheta(x_2) = C_1 \exp(\delta x_2) + C_2 \exp(-\delta x_2).$$

После подстановки решения в граничные условия получается однородная система уравнений для произвольных постоянных

$$C_1 \exp(\delta) + C_2 \exp(-\delta) = 0, \quad C_1 \exp(-\delta) + C_2 \exp(\delta) = 0.$$

При $\delta \neq 0$ эта система имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

В силу вещественности коэффициентов уравнения (19) для анализа комплексно-сопряженных корней достаточно рассмотреть отдельно вещественную и мнимую части решения

$$\vartheta(x_2) = C_3 \exp[\sqrt{|\mu|}(\cos \varphi + i \sin \varphi)x_2] + C_4 \exp[-\sqrt{|\mu|}(\cos \varphi + i \sin \varphi)x_2], \quad (23)$$

где $\varphi = (1/2) \arg \mu$.

Подстановка вещественной части (23) в граничные условия дает выражения

$$\begin{aligned} [C_3 \exp(\sqrt{|\mu|} \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi)) + C_4 \exp(-\sqrt{|\mu|} \cos \varphi)] \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) &= 0, \\ [C_3 \exp(-\sqrt{|\mu|} \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi)) + C_4 \exp(\sqrt{|\mu|} \cos \varphi)] \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы полученная система имела нетривиальные решения, должно выполняться условие

$$\cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) = 0,$$

из которого следуют уравнения для собственных значений Re

$$\sqrt{|\mu|} \sin \varphi = (2n - 1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$|\text{Re}| = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{\sin^2 \varphi} \left\{ \left[|q|^{1/3} - \frac{\text{Pr}}{\tau \gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma_v \gamma \right) \right]^2 + 3|q|^{2/3} \right\}^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

В результате подстановки мнимой части (23) в граничные условия получается система уравнений

$$\begin{aligned} [C_3 \exp(\sqrt{|\mu|} \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi)) - C_4 \exp(-\sqrt{|\mu|} \cos \varphi)] \sin(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) &= 0, \\ [C_3 \exp(-\sqrt{|\mu|} \cos(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi)) - C_4 \exp(\sqrt{|\mu|} \cos \varphi)] \sin(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае условие существования нетривиальных решений определяется уравнением

$$\sin(\sqrt{|\mu|} \sin \varphi) = 0,$$

корни которого равны $\sqrt{|\mu|} \sin \varphi = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$. Этим корням соответствует множество собственных значений

$$|\text{Re}| = \frac{\pi^2 n^2}{\sin^2 \varphi} \left\{ \left[|q|^{1/3} - \frac{\text{Pr}}{\tau \gamma} \left(1 + \frac{20}{33} \gamma_v \gamma \right) \right]^2 + 3|q|^{2/3} \right\}^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

При $n = 1$ множества собственных значений (24), (25) имеют один и тот же минимум, соответствующий критическому числу Рейнольдса Re_{cr} . Выражая в (25) значение $|q|$ через коэффициенты (18) исходной системы, получаем асимптотическую формулу

$$\text{Re}_{cr} = \pi^2 \left(\frac{a}{\tau^3} + \frac{b}{\tau M_0^4 (\alpha_1 + 4/3)} \right)^{-1/3}, \quad (26)$$

где a, b — некоторые положительные постоянные порядка $O(1)$.

Продольная мода $\beta \ll 1$, $\delta = 0$. В данном случае, пренебрегая в системе (12) слагаемыми порядка $O(\beta^2)$, можно получить

$$\begin{aligned} u'' + (\alpha_1 + 1/3)i\beta v' - a\theta' + \lambda(i\beta\theta' - v) &= 0, \\ bv'' + (\alpha_1 + 1/3)i\beta u' - ai\beta\theta + \lambda(c\theta' - u) &= 0, \\ w'' = 0, \quad d\theta'' + a(u' + i\beta v) - \lambda[c(v' + i\beta u) + f\vartheta] &= 0, \quad g\theta''_v + \lambda f\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d, f, g определяются соотношениями (18). Уравнение для функции w интегрируется отдельно и при однородных граничных условиях (13) имеет только нулевое решение $w = 0$.

Сокращенная система преобразуется следующим образом. В соответствии с подходом [8] к асимптотическому анализу спектральных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений из приведенной выше системы удаляются все слагаемые низшего порядка, не содержащие спектральный параметр λ . Дальнейшие преобразования, аналогичные преобразованиям для постоянной моды, привели к уравнению вида (20), в котором, в отличие от (18), коэффициенты определяются соотношениями

$$r = -f \frac{d+g}{dg}, \quad s = \frac{c^2}{d} \left(\frac{1}{b} - \beta^2 \right), \quad t = \frac{c^2}{d} f \left(\frac{\beta^2}{g} - \frac{1}{b} \right).$$

Эти выражения содержат слагаемые с β^2 , которыми, как и в исходной системе, следует пренебречь. Анализ полученной спектральной задачи совпадает с проведенным выше анализом для постоянной моды. В результате для критического числа Рейнольдса получается асимптотическая формула, аналогичная (26), в которой коэффициенты a и b имеют несущественные различия.

3.2. *Численное решение.* В данной работе при произвольных конечных значениях волновых чисел спектральная задача (12), (13) решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций [9], ранее примененный в работе [2]. Задача записывалась в матричном представлении:

$$A \frac{d^2 \varphi}{dx_2^2} + B_1 \frac{d\varphi}{dx_2} + C_1 \varphi = \text{Re} \left(B_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + C_2 \varphi \right), \quad \varphi|_{x_2=\pm 1} = 0. \quad (27)$$

Здесь A, B_1, C_1, B_2, C_2 — матрицы размером 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\beta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & -b & 0 \\ i\beta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & \delta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & 0 \\ 0 & -\delta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -[\beta^2(\alpha_1 + 1/3) + k^2] & 0 & i\beta\delta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 & -i\beta b & 0 \\ -i\beta\delta(\alpha_1 + 1/3) & 0 & -[\delta^2(\alpha_1 + 1/3) + k^2] & 0 & 0 \\ 0 & i\beta b & 0 & -ak^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ak^2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & i\beta c/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta c/2 & 0 \\ -i\beta c/2 & 0 & -\delta c/2 & \gamma v/\tau & -\gamma v/\tau \\ 0 & 0 & 0 & -33/(20\tau) & 33/(20\tau) \end{pmatrix},$$

$$a = \gamma/\text{Pr}, \quad b = \gamma(\gamma - 1)M_0^2, \quad c = 1 - \gamma + 1/(\gamma M_0^2).$$

В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса — Лобатто $x_{2,n} = \cos(\pi n/N)$, $n = 0, 1, \dots, N$, в которых полином Чебышева N -й степени $T_N(x_2)$ имеет экстремумы на отрезке $[-1, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данной сетке матрицей коллокационных производных D_N^1 [9] размером $(N + 1) \times (N + 1)$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$.

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (27) к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \text{Re}$:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{ij} - \lambda F_{ij})q_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5N + 4. \quad (28)$$

Здесь вектор неизвестных \mathbf{q} размером $5(N + 1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{q} = (u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, w_0, w_1, \dots, w_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

матрицы G , F размером $5(N + 1) \times 5(N + 1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^2 + B_1 \otimes D_N^1 + C_1 \otimes I_N, \quad F = B_2 \otimes D_N^1 + C_2 \otimes I_N,$$

знак “ \otimes ” обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [10]; I_N — единичная матрица размером $(N + 1) \times (N + 1)$.

Однородные граничные условия для уравнения (27) учитываются неявно через оператор D_N^1 [9] и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^l ($l = 1, 2$) на окаймленные матрицы размером $(N - 1) \times (N - 1)$. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^l = D_{N,j}^l = 0, \quad D_{i,0}^l = D_{i,N}^l = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N, \quad l = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и собственных функций обобщенной спектральной задачи (28) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [11], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме.

В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M_0 , объемной вязкости α_1 , степени неравновесности колебательной энергии γ_v , времени колебательной релаксации τ и каждой пары волновых чисел (β, δ) получался набор $N + 1$ собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\text{Re}(\beta, \delta) = |\lambda_{\min}(\beta, \delta)|$. Значение критического числа Рейнольдса Re_{cr} для данных $M_0, \alpha_1, \gamma_v, \tau$ принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\text{Re}(\beta, \delta): \text{Re}_{cr} = \min_{(\beta, \delta)} [\text{Re}(\beta, \delta)]$. Затем вычислялись соответствующие Re_{cr} собственные функции $u, v, w, \theta, \theta_v$.

Расчеты спектров собственных значений $\lambda(\beta, \delta, M_0, \alpha_1, \gamma_v, \tau)$ проводились в диапазоне волновых чисел $\beta = 0 \div 5, \delta = 0 \div 5$ при следующих значениях параметров: $\gamma_v = 0,111 \div 0,667, \tau = 1 \div 4, \alpha_1 = 0 \div 2, M_0 = 0,1 \div 1,0, \text{Pr} = 3/4, \gamma = 7/5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\beta = h_\delta = 0,1$. В большинстве расчетов число узлов коллокации в интервале $[-1, 1]$ принималось равным $N + 1 = 50$. Для проверки точности расчетов на основе симметрии спектра выполнялись расчеты в диапазоне волновых чисел $\beta = -5 \div 5, \delta = -5 \div 5$ и варьировалось число узлов коллокации: $N + 1 = 32 \div 100$.

4. Результаты расчетов и обсуждение. Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях степени неравновесности колебательной энергии γ_v , времени колебательной релаксации τ , объемной вязкости α_1 и числа Маха M_0 минимальные по модулю собственные значения $\text{Re}(\beta, \delta) = |\lambda_{\min}(\beta, \delta)|$ достигаются на оси $\beta \neq 0$ (при $\delta = 0$) в плоскости волновых чисел (β, δ) . Изолинии $\text{Re}(\beta, \delta)$ приведены на рис. 1.

Как и в случае умеренного возбуждения, рассмотренном в [2], наиболее “опасными” являются возмущения продольной моды. С учетом периодичности полученного решения по продольной координате x_1 эти возмущения представляют собой пары двумерных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях, с осями, трансверсальными несущему потоку. Распределение завихренности в этих вихрях вычисляется по формуле

$$\omega(x_1, x_2) = -\left(\beta v_i + \frac{du_r}{dx_2}\right) \cos \beta x_1 - \left(\beta v_r - \frac{du_i}{dx_2}\right) \sin \beta x_1.$$

Здесь $u_r(x_2), u_i(x_2), v_r(x_2), v_i(x_2)$ — вещественные и мнимые части собственных функций u, v . На рис. 2 представлены изолинии завихренностей $\omega(x_1, x_2)$ при различных критических числах Рейнольдса $\text{Re}_{cr}(\beta, \alpha_1, \gamma_v, \tau, M_0)$ и значениях амплитуд возмущений скорости, составляющих 10 % значения модуля скорости несущего потока на непроницаемых границах.

Зависимость числа Рейнольдса для продольных мод возмущений от волнового числа β представлена на рис. 3. Штрихпунктирные линии соединяют значения абсолютных минимумов на параметризованных по γ_v и τ кривых $\text{Re}(\beta)$, что позволяет проследить эволюцию Re_{cr} .

На рис. 4 приведена зависимость Re_{cr} от степени неравновесности γ_v . На рис. 1, 3, 4 видно, что с увеличением значений параметров $\alpha_1, \gamma_v, \tau, M_0$ критические числа Рейнольдса Re_{cr} и соответствующие им значения волнового числа β возрастают. Таким образом, результаты расчетов показывают, что полученные выше асимптотические выражения (26) качественно правильно описывают зависимость Re_{cr} от параметров течения.

В табл. 1 приведены критические значения числа Рейнольдса $\text{Re}_{cr}(\alpha_1, \gamma_v, \tau, M_0)$, в табл. 2 — соответствующие им значения волнового числа β . В рассмотренном диапазоне

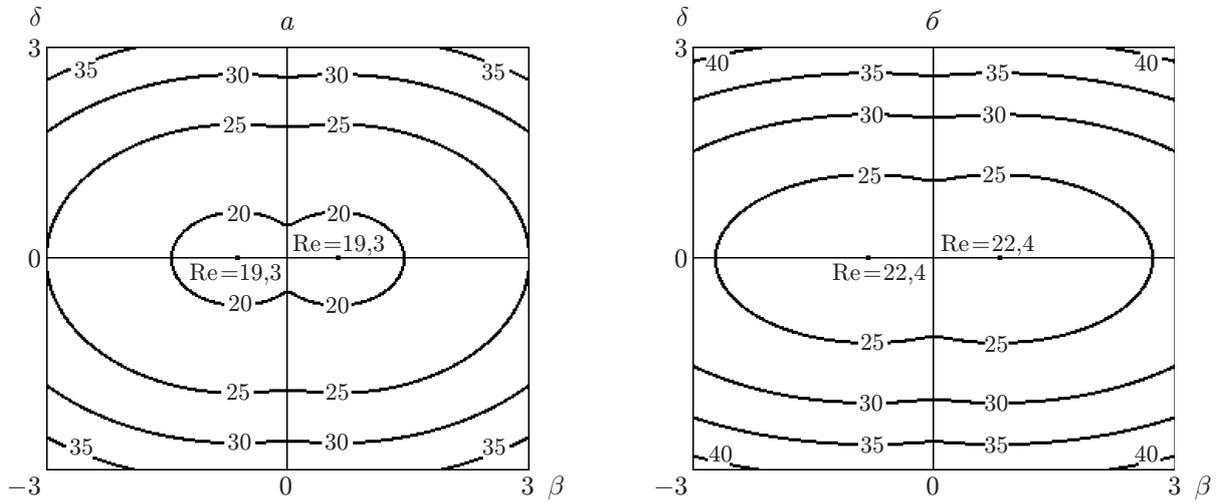


Рис. 1. Изолинии поверхностей $\text{Re}(\beta, \delta)$ при $M_0 = 0,5$, $\alpha_1 = 0$, $\tau = 2$:
 а — $\gamma_v = 0,250$, б — $\gamma_v = 0,667$; точки на линии $\delta = 0$ — критические значения числа Рейнольдса для данного режима

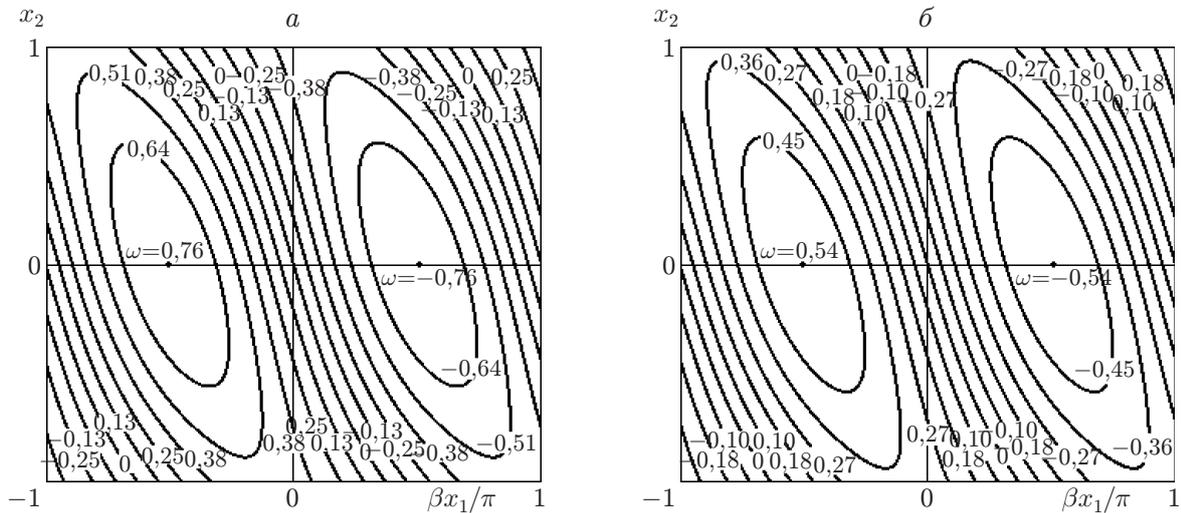


Рис. 2. Изолинии завихренности критических возмущений $\omega(x_1, x_2)$ при $M_0 = 0,5$, $\alpha_1 = 0$, $\tau = 2$:
 а — $\gamma_v = 0,250$, $\text{Re}_{cr} = 19,31$, б — $\gamma_v = 0,667$, $\text{Re}_{cr} = 22,41$; точки на линии $x_2 = 0$ — максимальное и минимальное значения ω для данного режима

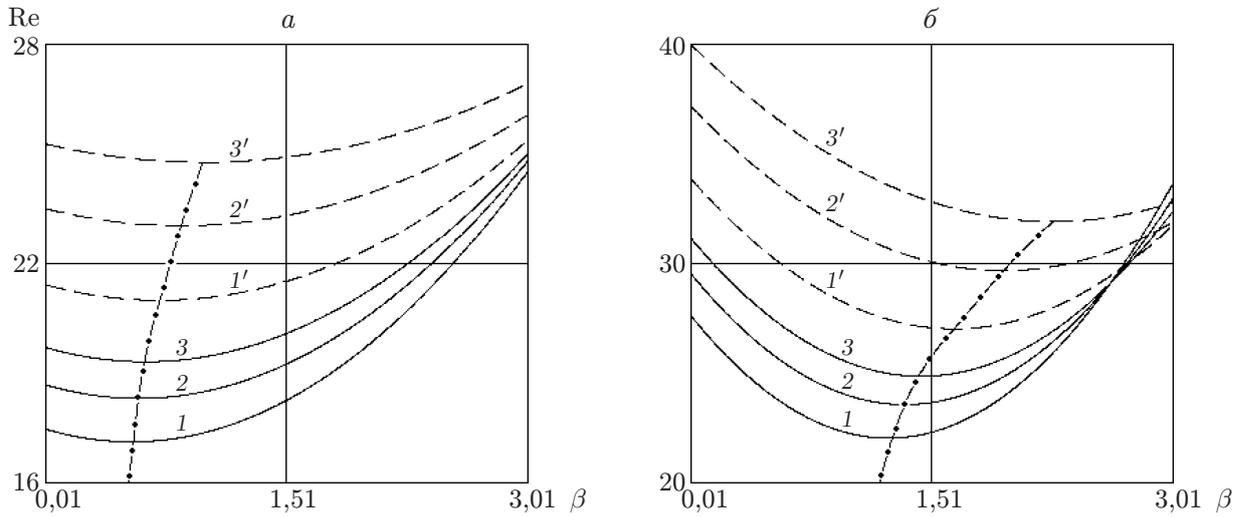


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(\beta)$ для продольных мод возмущений при $M_0 = 0,5$:
 а — $\alpha_1 = 0$, б — $\alpha_1 = 2$; 1, 1' — $\gamma_v = 0,250$, 2, 2' — $\gamma_v = 0,429$, 3, 3' — $\gamma_v = 0,667$;
 сплошные линии — $\tau = 1$, штриховые — $\tau = 3$, штрихпунктирные — зависимость
 критического числа Рейнольдса Re_{cr} от волнового числа β

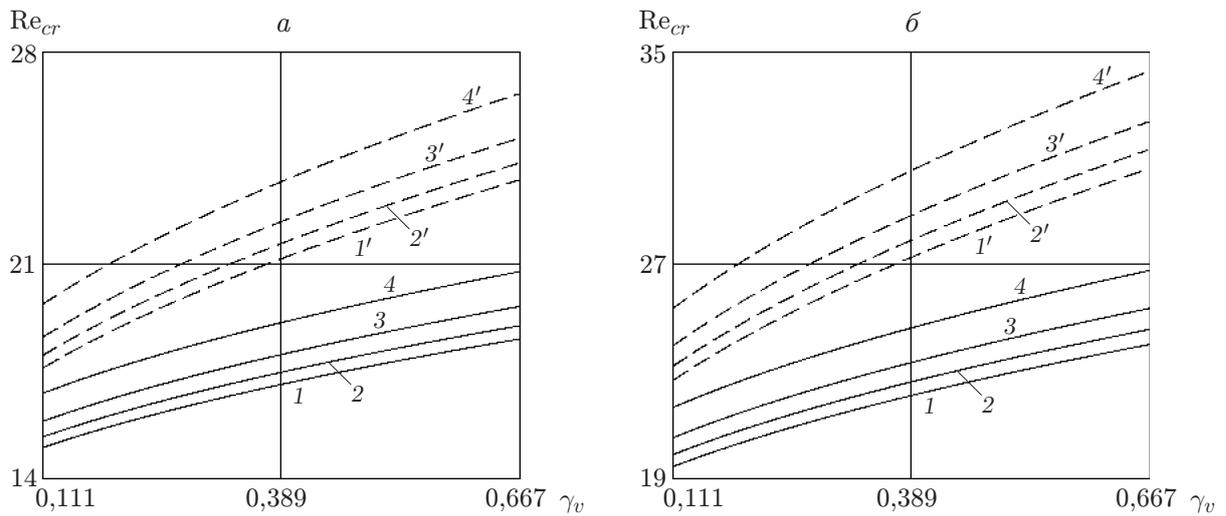


Рис. 4. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от степени неравно-
 весности колебательной моды γ_v :
 а — $\alpha_1 = 0$, б — $\alpha_1 = 2$; 1, 1' — $M_0 = 0,2$, 2, 2' — $M_0 = 0,4$, 3, 3' — $M_0 = 0,6$, 4, 4' —
 $M_0 = 0,8$; сплошные линии — $\tau = 1$, штриховые — $\tau = 3$

Таблица 1

Критические значения числа Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha_1, \gamma_v, \tau, M_0)$

M_0	Re_{cr}					
	$\tau = 1$			$\tau = 4$		
	$\gamma_v = 0,111$	$\gamma_v = 0,250$	$\gamma_v = 0,667$	$\gamma_v = 0,111$	$\gamma_v = 0,250$	$\gamma_v = 0,667$
	$\alpha_1 = 0$					
0,2	14,94	16,43	18,53	18,53	21,50	25,71
0,5	15,57	17,12	19,31	19,31	22,41	26,79
0,8	16,73	18,40	20,75	20,75	24,08	28,79
	$\alpha_1 = 1$					
0,2	17,56	19,31	21,78	21,78	25,28	30,22
0,5	18,30	20,12	22,70	22,70	26,34	31,50
0,8	19,67	21,63	24,40	24,39	28,30	33,84
	$\alpha_1 = 2$					
0,2	19,23	21,14	23,85	23,85	27,67	33,09
0,5	20,04	22,04	24,86	24,86	28,85	34,49
0,8	21,54	23,68	26,71	26,71	30,99	37,06

Таблица 2

Значения волнового числа β ,
соответствующие критическим значениям числа Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha_1, \gamma_v, \tau, M_0)$

M_0	β					
	$\tau = 1$			$\tau = 4$		
	$\gamma_v = 0,111$	$\gamma_v = 0,250$	$\gamma_v = 0,667$	$\gamma_v = 0,111$	$\gamma_v = 0,250$	$\gamma_v = 0,667$
	$\alpha_1 = 0$					
0,2	0,482	0,526	0,613	0,613	0,788	1,139
0,5	0,488	0,533	0,621	0,621	0,799	1,154
0,8	0,554	0,604	0,705	0,704	0,906	1,309
	$\alpha_1 = 1$					
0,2	1,038	1,133	1,321	1,321	1,699	2,454
0,5	1,052	1,148	1,339	1,339	1,722	2,487
0,8	1,194	1,302	1,519	1,519	1,953	2,821
	$\alpha_1 = 2$					
0,2	1,111	1,211	1,413	1,413	1,817	2,625
0,5	1,125	1,228	1,432	1,432	1,842	2,660
0,8	1,277	1,393	1,625	1,625	2,089	3,017

значений параметров задачи число Рейнольдса Re_{cr} в пределе увеличивается приблизительно в 2,5 раза. При этом влияние каждого параметра на Re_{cr} при фиксированных значениях остальных параметров существенно различается. Следует отметить, что наиболее значительное влияние на Re_{cr} оказывает степень неравновесности колебательной моды γ_v . Оценки, выполненные в [12], показывают, что возбуждение колебательной моды γ_v в рассмотренном диапазоне достаточно легко достигается с помощью лазера. Поэтому лазерная накачка колебательных мод может стать эффективным способом управления течениями молекулярных газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина — Гельмгольца // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 73–84.
2. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 59–67.
3. **Жданов В. М.** Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах / В. М. Жданов, М. Е. Алиевский. М.: Наука, 1989.
4. **Нагнибеда Е. А.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов / Е. А. Нагнибеда, Е. В. Кустова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2003.
5. **Гольдштик М. А.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
6. **Тамаркин Я. Д.** О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пг.: Типография М. П. Фроловой, 1917.
7. **Бронштейн И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М.: Наука, 1986.
8. **Наймарк М. Н.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
9. **Canuto C.** Spectral methods in fluid dynamics: Springer ser. in comput. phys. / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
10. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973.
11. **Moler C. B., Stewart G. W.** An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, N 2. P. 241–256.
12. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Ершова Е. Е.** Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 15–23.

Поступила в редакцию 18/X 2011 г.