УДК 532.582

ДВИЖЕНИЕ ШАРА В ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ СТЕНКИ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

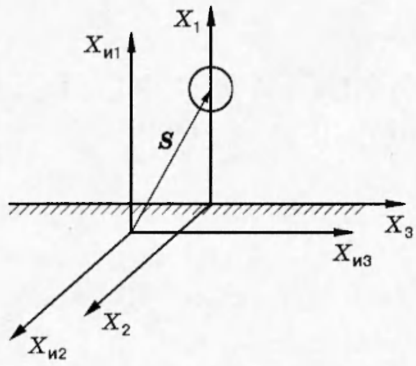
Получено решение задачи о движении шара в идеальной жидкости, ограниченной извне поверхностью стенки и совершающей заданные колебания вдали от шара.

Рассмотрению теоретических задач о движении твердого тела в колеблющейся жидкости с целью выявления и изучения эффектов среднего движения твердого тела в жидкости посвящены работы [1–6] (см. также [7]). Первоначально интерес к такого рода задачам был связан с появлением экспериментальных результатов, демонстрирующих, что твердое тело в жидкости при колебательных воздействиях может вести себя парадоксально [8]. Однако вскоре стало очевидно, что последовавшие за опубликованием [8] исследования движения включений в колеблющейся жидкости имеют значительно бо́льшую самостоятельную значимость. В частности, результаты исследований в этой области могут быть использованы для осуществления вибрационного управления включениями в жидкости [9].

В данной работе рассмотрена задача о движении твердого шара в идеальной жидкости, которая ограничена извне плоской поверхностью заданно колеблющейся твердой стенки и на бесконечности совершает также заданные колебания вдоль поверхности стенки (скорость течения жидкости на бесконечности заданным образом периодически изменяется со временем). При малых по сравнению с единицей значениях отношения радиуса шара к расстоянию между центром шара и поверхностью стенки определено силовое взаимодействие между жидкостью и шаром; найдено движение шара; установлено, что колебания жидкости вдоль поверхности стенки, как и колебания жидкости по нормали к поверхности стенки (вызываемые колебаниями стенки), существенным образом влияют на движение шара; показано, что шар, плотность которого отлична от плотности жидкости, может не всплывать и не тонуть, тонуть, вместо того чтобы всплывать, всплывать, вместо того чтобы тонуть, всплывать медленнее, тонуть медленнее, всплывать быстрее, тонуть быстрее, чем в отсутствие колебаний жидкости. Рассмотрен также вопрос о том, какие колебания жидкости являются наиболее эффективными.

1. В идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью абсолютно твердой стенки, находится абсолютно твердый шар (см. рисунок). Имеется постоянное поле силы тяжести. Шар расположен над или под стенкой. В начальный момент времени t (при $t = 0$) стенка, жидкость и шар покоятся относительно инерциальной системы координат $X_{и1}$, $X_{и2}$, $X_{и3}$, поверхность стенки совпадает с плоскостью $X_{и1} = 0$, занимаемая жидкостью область содержится в полупространстве $X_{и1} \geqslant 0$, центр шара лежит на оси $X_{и1}$. В последующие моменты времени стенка совершает заданные периодические с периодом T поступательные колебания, вследствие чего жидкость на бесконечности заданно периодически с периодом T колеблется вдоль оси $X_{и1}$; кроме того,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00812).



жидкость на бесконечности заданно периодически с периодом T колеблется вдоль оси $X_{и3}$ (вдоль поверхности стенки); течение жидкости является потенциальным и симметричным относительно плоскости $X_{и2} = 0$, шар движется поступательно. Положение стенки характеризуется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{H} = (H, 0, 0)$$

точки пересечения поверхности стенки и оси $X_{и1}$ $\Big(H = A_0 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\Big(A_m \cos 2m\pi \dfrac{t}{T} + A'_m \sin 2m\pi \dfrac{t}{T}\Big)$ (A_0, A_m, A'_m — постоянные); $H = 0$, $dH/dt = 0$ при $t = 0\Big)$. Жидкость на бесконечности движется со скоростью

$$\boldsymbol{U} = (U_1, 0, U_3)$$

$\Big(U_1 = \dfrac{dH}{dt}$; $U_3 = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\Big(B_m \cos 2m\pi \dfrac{t}{T} + B'_m \sin 2m\pi \dfrac{t}{T}\Big)$ (B_m, B'_m — постоянные); $U_3 = 0$ при $t = 0\Big)$. Положение шара определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{S} = (S_1, 0, S_3)$$

центра шара. Требуется найти, как $\boldsymbol{S}$ зависит от t.

Рассматриваемая постановка задачи соответствует тому, что имеется замкнутый сосуд, заполненный жидкостью, содержащей шар; все стенки сосуда, кроме одной, имеющей плоскую поверхность, находятся на очень больших расстояниях от шара; сосуд совершает заданные поступательные колебания.

Вопрос о движении шара в идеальной жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью колеблющейся твердой стенки, в отсутствие колебаний жидкости на бесконечности вдоль поверхности стенки рассматривался в [3, 6]. В [3] показано, что шар, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, может не всплывать, а тонуть; шар, плотность которого больше, чем плотность жидкости, может не тонуть, а всплывать. В [6] определено движение шара в отсутствие силы тяжести. Результаты работ [3, 6] согласуются с соответствующими результатами данной работы.

При $\rho_{ш} = \rho_{ж}$ ($\rho_{ш}$ — плотность шара; $\rho_{ж}$ — плотность жидкости) рассматриваемая задача о движении шара имеет очевидное решение

$$\boldsymbol{S} = \Big(H, 0, \int\limits_0^t U_3\, dt\Big) + \boldsymbol{S}_0, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{S}_0 = (S_0, 0, 0)$ — постоянная (значение $\boldsymbol{S}$ при $t = 0$). Решение (1.1) соответствует тому, что шар, жидкость и стенка (сосуд) движутся с одной и той же скоростью (как одно абсолютно твердое тело).

Положим $\rho_{\text{ш}} \neq \rho_{\text{ж}}$.

Будем рассматривать течение жидкости и движение шара относительно системы прямоугольных координат $X_1 = X_{\text{и}1} - H$, $X_2 = X_{\text{и}2}$, $X_3 = X_{\text{и}3} - S_3$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$; $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$; $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$; $\boldsymbol{r} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2 + X_3\boldsymbol{e}_3$; $r = |\boldsymbol{r}|$; $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} - H\boldsymbol{e}_1 - S_3\boldsymbol{e}_3 = Z\boldsymbol{e}_1$ — радиус-вектор центра шара; (q) — поверхность шара; $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к (q); (Q) — поверхность стенки; $\boldsymbol{N}$ — нормаль к (Q); Φ — потенциал скорости течения жидкости; P — давление в жидкости;

$$\boldsymbol{F} = -\oiint\limits_{(q)} P\boldsymbol{n}\, dq \quad — \tag{1.2}$$

сила, действующая на шар со стороны жидкости; m — масса шара; $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_1$ — ускорение свободного падения (при $g > 0$ шар расположен над стенкой, при $g < 0$ — под стенкой); $\boldsymbol{A} = (d^2H/dt^2)\boldsymbol{e}_1 + (d^2S_3/dt^2)\boldsymbol{e}_3$; I — произвольная функция от t.

Уравнение движения шара, интеграл Коши — Лагранжа, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на (q), на (Q), при $r \to \infty$ и при $t = 0$, имеют следующий вид:

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{Z}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{A}); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho_{\text{ж}}} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{r} = I; \tag{1.4}$$

$$\Delta\Phi = 0; \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1\,\frac{dZ}{dt} \quad \text{на} \quad (q); \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{N}\cdot\nabla\Phi = 0 \quad \text{на} \quad (Q); \tag{1.7}$$

$$\nabla\Phi \sim \Bigl(U_3 - \frac{dS_3}{dt}\Bigr)\boldsymbol{e}_3 \quad \text{при} \quad r \to \infty; \tag{1.8}$$

$$Z = S_0, \quad \frac{dZ}{dt} = 0, \quad S_3 = 0, \quad \frac{dS_3}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{1.9}$$

2. Будем предполагать, что величина $\varepsilon = a/S_0$ (a — радиус шара) мала по сравнению с единицей, а наибольшие значения $|H|/a$, $(T/a)|dH/dt|$, $(T^2/a)|d^2H/dt^2|$ и величина $(|g|T^2S_0^4)^{1/5}/a$ не малы и не велики по сравнению с единицей.

Определим движение жидкости, происходящее при заданном движении шара. Допустим, что стенка отсутствует, жидкость не ограничена извне, движется на бесконечности со скоростью $(U_3 - dS_3/dt)\boldsymbol{e}_3$ и в ней находится два шара, рассматриваемый и вспомогательный, радиуса a соответственно с радиусами-векторами центров $\boldsymbol{Z}$ и $-\boldsymbol{Z}$, движущихся со скоростями $d\boldsymbol{Z}/dt$ и $-d\boldsymbol{Z}/dt$. Тогда течение жидкости симметрично относительно плоскости $X_1 = 0$. Потенциал Ψ скорости течения жидкости является решением задачи

$$\Delta\Psi = 0,$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1\,\frac{dZ}{dt} \quad \text{на} \quad (q),$$

$$\boldsymbol{n}'\cdot\nabla\Psi = -\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e}_1\,\frac{dZ}{dt} \quad \text{на} \quad (q'),$$

$$\nabla\Psi \sim \Big(U_3 - \frac{dS_3}{dt}\Big)\boldsymbol{e}_3 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

а также удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{N}\cdot\nabla\Psi = 0 \quad \text{на} \quad (Q).$$

Здесь (q') — поверхность вспомогательного шара; $\boldsymbol{n}'$ — нормаль к (q'). В области, занимаемой жидкостью в полупространстве $X_1 \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\nabla\Psi = \nabla\Phi. \tag{2.1}$$

Применяя изложенный в [10] метод определения потенциала скорости течения жидкости, происходящего при заданном движении находящихся в ней двух шаров, и учитывая (2.1), получим следующее решение задачи (1.5)–(1.8), которое точно удовлетворяет (1.5), (1.7), (1.8) и приближенно, с точностью до величин, пропорциональных dZ/dt и $U_3 - dS_3/dt$, малых соответственно по сравнению с $\varepsilon^4\, dZ/dt$ и $\varepsilon^4(U_3 - dS_3/dt)$, удовлетворяет (1.6):

$$\Phi = \frac{a}{2}\frac{dZ}{dt}\Big[-\frac{a^2}{R^2}\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{8z^3}\Big)P_1(\cos\theta) + \varepsilon^4\,\frac{a^3}{8R^3z^4}P_2(\cos\theta) + \frac{a^2}{R'^2}\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{8z^3}\Big)P_1(\cos\theta') +$$
$$+\varepsilon^4\,\frac{a^3}{8R'^3z^4}P_2(\cos\theta')\Big] + \frac{a}{2}\Big(U_3 - \frac{dS_3}{dt}\Big)\Big\{\Big[2\,\frac{R}{a} + \frac{a^2}{R^2}\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{16z^3}\Big)\Big]P_1^{(1)}(\cos\theta) -$$
$$-\varepsilon^4\,\frac{a^3}{24R^3z^4}\,P_2^{(1)}(\cos\theta) + \frac{a^2}{R'^2}\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{16z^3}\Big)P_1^{(1)}(\cos\theta') + \varepsilon^4\,\frac{a^3}{24R'^3z^4}\,P_2^{(1)}(\cos\theta')\Big\}\sin\varphi + c, \tag{2.2}$$

где $z = Z/S_0$; $R = \sqrt{(X_1 - Z)^2 + X_2^2 + X_3^2}$; $\cos\theta = (X_1 - Z)/R$; $R' = \sqrt{(X_1 + Z)^2 + X_2^2 + X_3^2}$; $\cos\theta' = (X_1 + Z)/R'$; $\sin\varphi = X_3/\sqrt{X_2^2 + X_3^2}$; c — произвольная функция от t.

Используя (1.2), (1.4), (2.2), получим

$$\boldsymbol{F} = \frac{4\pi a^3}{3}\,\rho_{ж}\Big\{\Big[\frac{d^2H}{dt^2} + f_1\,\frac{d^2Z}{dt^2} + f_2a^{-1}\Big(\frac{dZ}{dt}\Big)^2 + f_3a^{-1}\Big(U_3 - \frac{dS_3}{dt}\Big)^2 + g\Big]\boldsymbol{e}_1 +$$
$$+\Big[\frac{d^2S_3}{dt^2} + f_4\Big(\frac{dU_3}{dt} - \frac{d^2S_3}{dt^2}\Big) + f_5a^{-1}\,\frac{dZ}{dt}\Big(U_3 - \frac{dS_3}{dt}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_3\Big\}, \tag{2.3}$$

где

$$f_1 = -\frac{1}{2}\Big(1+\frac{3\varepsilon^3}{8z^3}\Big);\quad f_2 = \frac{9\varepsilon^4}{32z^4};\quad f_3 = -\frac{9\varepsilon^4}{64z^4};\quad f_4 = \frac{3}{2}\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{16z^3}\Big);\quad f_5 = -\frac{9\varepsilon^4}{32z^4}.$$

Соотношением (2.3) определяется силовое взаимодействие между жидкостью и шаром (при известном движении шара).

3. Согласно (1.3), (1.9), (2.3) имеем

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\varepsilon æ\,\frac{d^2h}{d\tau^2} + \lambda\,\frac{\varepsilon^3}{z^3}\Big[-\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{3}{2z}\Big(\frac{dz}{d\tau}\Big)^2 - \frac{3\varepsilon^2}{4z}\Big(u - \frac{ds}{d\tau}\Big)^2\Big] - \varepsilon^5 æ\gamma; \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = \lambda\Big[8\Big(1+\frac{\varepsilon^3}{16z^3}\Big)\frac{du}{d\tau} - \frac{\varepsilon^3}{2z^3}\,\frac{d^2s}{d\tau^2} - \frac{3\varepsilon^3}{2z^4}\,\frac{dz}{d\tau}\Big(u - \frac{ds}{d\tau}\Big)\Big]; \tag{3.2}$$

$$z = 1,\quad \frac{dz}{d\tau} = 0,\quad s = 0,\quad \frac{ds}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \tag{3.3}$$

где $\tau = \dfrac{t}{T}$; $s = \dfrac{S_3}{a}$; $h = \dfrac{H}{a}$; $u = \dfrac{U_3T}{a}$; $\gamma = \dfrac{gT^2}{\varepsilon^4 a}$; $æ = \dfrac{\rho_{ш} - \rho_{ж}}{\rho_{ш} + (1/2)\rho_{ж}}$; $\lambda = \dfrac{3\rho_{ж}}{16(\rho_{ш} + (1/2)\rho_{ж})}$.

Применим метод усреднения [11, 12]. Пусть η, ξ — переменные, связанные с z, s равенствами

$$z = \eta - \varepsilon æ h + \varepsilon^4 æ\lambda h \eta^{-3}; \tag{3.4}$$

$$s = \varepsilon^{-2}\xi + 8\lambda \int\limits_0^\tau u\, d\tau, \tag{3.5}$$

и

$$\chi = \varepsilon^{-5/2} \frac{d\eta}{d\tau}; \tag{3.6}$$

$$\psi = \varepsilon^{-5/2} \frac{d\xi}{d\tau}. \tag{3.7}$$

Согласно (3.3)–(3.7) η, χ, ξ, ψ удовлетворяют условиям

$$\eta = 1, \quad \chi = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \tag{3.8}$$

$$\xi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \tag{3.9}$$

Используя (3.4)–(3.7), приведем (3.1), (3.2) к нормальной системе уравнений. Представляя правые части уравнений, содержащих $d\chi/d\tau$ и $d\psi/d\tau$, в виде разложений по степеням ε и сохраняя только главные члены разложений, перейдем от нормальной системы уравнений к следующей системе уравнений в стандартной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\eta}{d\tau} = \varepsilon^{5/2}\chi,\\
&\frac{d\chi}{d\tau} = \varepsilon^{5/2}æ\Big\{3æ\lambda\Big[\frac{d}{d\tau}\Big(h\frac{dh}{d\tau}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{dh}{d\tau}\Big)^2 - \frac{1}{4}u^2\Big]\eta^{-4} - \gamma\Big\},\\
&\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon^{5/2}\psi,\\
&\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon^{5/2}æ\lambda\frac{du}{d\tau}\eta^{-3}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Произведем усреднение (3.10) по явно содержащемуся τ. В результате этого получим

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \varepsilon^{5/2}\chi, \qquad \frac{d\chi}{d\tau} = -\varepsilon^{5/2}æ(3æ\lambda k\eta^{-4} + \gamma); \tag{3.11}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon^{5/2}\psi, \qquad \frac{d\psi}{d\tau} = 0, \tag{3.12}$$

где

$$k = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big[\Big(\frac{dh}{d\tau}\Big)^2 + \frac{1}{2}u^2\Big]d\tau = \frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty} m^2(A_m^2 + A_m'^2) + \frac{T^2}{8a^2}\sum_{m=1}^{\infty}(B_m^2 + B_m'^2). \tag{3.13}$$

Из (3.9), (3.12) следует

$$\xi = 0. \tag{3.14}$$

Согласно (3.5), (3.14) среднее движение шара вдоль оси $X_{\text{и}3}$ отсутствует. В соответствии с (3.8), (3.11) имеем

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon^5\gamma æ(\nu\eta^{-4} - 1); \tag{3.15}$$

$$\eta = 1, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \tag{3.16}$$

где

$$\nu = -3\,\frac{æ\lambda k}{\gamma}. \tag{3.17}$$

Решая задачу (3.15), (3.16), найдем

$$\eta = 1 \qquad \text{при} \quad \nu = 1; \tag{3.18}$$

$$J = \hat{\tau} \qquad \text{при} \quad 0 < \nu < 1; \tag{3.19}$$

$$J = -\hat{\tau} \qquad \text{при} \quad \nu < 0, \quad \nu > 1, \tag{3.20}$$

где $J = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^{\eta} \dfrac{x^{3/2}\,dx}{\sqrt{(\gamma æ/|\gamma æ|)(1-x)[x^3 - (\nu/3)(x^2+x+1)]}}$; $\hat{\tau} = \sqrt{|\gamma æ|}\varepsilon^{5/2}\tau$.

Соотношениями (1.1), (3.4), (3.5), (3.14), (3.18)–(3.20) определяется зависимость $\boldsymbol{S}$ от t, т. е. то, как шар движется относительно системы координат $X_{и1}$, $X_{и2}$, $X_{и3}$. В частности, при $0 < \nu < 1$ шар в среднем движется вдоль оси $X_{и1}$ в направлении от стенки (в соответствии с (3.19) η монотонно возрастает с увеличением $\hat{\tau}$); при $\nu < 0$, $\nu > 1$ шар в среднем движется вдоль оси $X_{и1}$ в направлении к стенке (в соответствии с (3.20) η монотонно убывает с увеличением $\hat{\tau}$).

Согласно (2.3), (3.4), (3.5), (3.14), (3.18)–(3.20) вследствие колебаний жидкости шар, плотность которого отлична от плотности жидкости, в среднем притягивается к стенке. Ввиду этого рассматриваемые колебательные воздействия на жидкость с шаром обладают управляющими возможностями. Эти воздействия могут приводить, в частности, к парадоксальному поведению шара, состоящему в том, что при $\nu = 1$ шар не всплывает и не тонет (пребывает в состоянии «левитации»); при $\nu > 1$ находящийся над стенкой шар, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, тонет, находящийся под стенкой шар, плотность которого больше, чем плотность жидкости, всплывает. Шар может также всплывать или тонуть медленнее (при $0 < \nu < 1$), всплывать или тонуть быстрее (при $\nu < 0$), чем в отсутствие колебаний жидкости. Согласно (3.13), (3.17) на движение шара существенным образом влияют и колебания жидкости по нормали к поверхности стенки, и колебания жидкости вдоль поверхности стенки.

Отметим, что в отсутствие силы тяжести при наличии колебаний жидкости и выполнении условия $\rho_{ш} \neq \rho_{ж}$ шар в среднем движется вдоль оси $X_{и1}$ в направлении к стенке.

4. Рассмотрим кратко вопрос о том, какие колебания жидкости являются наиболее эффективными (как должны соотноситься друг с другом колебания жидкости по нормали к поверхности стенки и вдоль поверхности стенки, чтобы вызываемое ими среднее силовое воздействие со стороны жидкости на шар было наибольшим).

Как отмечено выше, представленная постановка задачи соответствует тому, что жидкость с шаром находится в сосуде, совершающем заданные поступательные колебания. Пусть эти колебания происходят вдоль оси, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{e} = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Тогда должны выполняться соотношения

$$\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}; \tag{4.1}$$

$$U_1 = U\sin\alpha, \qquad U_3 = U\cos\alpha,$$

где $U = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \Big(C_m \cos 2m\pi\,\frac{t}{T} + C_m' \sin 2m\pi\,\frac{t}{T}\Big)$ (C_m, C_m' — постоянные).

Согласно (3.13), (4.1) имеем

$$k = \frac{T^2}{4a^2}\Big(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha\Big)\sum_{m=1}^{\infty}(C_m^2 + C_m'^2). \tag{4.2}$$

Рассмотрим силовое воздействие со стороны жидкости на шар в следующих двух случаях.

а) Шар неподвижен (закреплен) относительно системы координат $X_{\text{и}1}$, $X_{\text{и}2}$, $X_{\text{и}3}$.

Используя (2.3), получим

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{F}_{\text{в}} + \boldsymbol{F}_{\text{к}},$$

где $\tilde{\boldsymbol{F}}$ — периодическая с периодом T функция от t (сила), среднее значение которой равно нулю; $\boldsymbol{F}_{\text{в}} = (4\pi a^3/3)\rho_{\text{ж}} g \boldsymbol{e}_1$ — выталкивающая сила;

$$\boldsymbol{F}_{\text{к}} = -\frac{3\pi a^4 \rho_{\text{ж}}}{4T^2}\,\varepsilon^4 k \boldsymbol{e}_1 \quad — \tag{4.3}$$

не зависящая от времени сила, действующая на шар со стороны жидкости вследствие колебаний жидкости.

б) Шар не всплывает и не тонет относительно системы координат $X_{\text{и}1}$, $X_{\text{и}2}$, $X_{\text{и}3}$. Используя (2.3), (3.4), (3.5), (3.14), (3.18), получим

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\boldsymbol{F}}' + \boldsymbol{F}_{\text{в}} + \boldsymbol{F}'_{\text{к}},$$

где $\tilde{\boldsymbol{F}}'$ — периодическая с периодом T функция от t (сила), среднее значение которой равно нулю;

$$\boldsymbol{F}'_{\text{к}} = -\frac{3\pi a^4 \rho_{\text{ж}}}{4T^2}\,\varepsilon^4 \varkappa^2 k \boldsymbol{e}_1 \quad — \tag{4.4}$$

не зависящая от времени сила, действующая на шар со стороны жидкости вследствие колебаний жидкости.

Из (4.2)–(4.4) следует, что $|\boldsymbol{F}_{\text{к}}|$ и $|\boldsymbol{F}'_{\text{к}}|$ достигают своих наибольших значений при $\alpha = \pi/2$. В соответствии с этим наиболее эффективными являются колебания жидкости по нормали к поверхности стенки.

Автор выражает благодарность Т. Г. Созиновой за участие в предварительном рассмотрении задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
3. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.** О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.
5. **Лаврентьева О. М.** О движении твердого тела в идеальной пульсирующей жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 103. С. 120–125.
6. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Intern. Workshop on G-Jitter: Proc. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993.

7. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 11–19.
8. **Челомей В. Н.** Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
9. **Sennitskii V. L.** Vibrational management of inclusions in liquid // 1st Intern. workshop on material processing in high gravity: Program and abstr. Dubna (USSR), 1991.
10. **Кирхгоф Г.** Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
11. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
12. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.

Поступила в редакцию 1/XII 1997 г.