ПМТФ, № 4, 1992

УДК 538.24+517.9

А. В. Червяков

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДНИК

Задача о диффузии импульсного магнитного поля в проводник ставилась и изучалась многими авторами [1—3]. Относительно электропроводности среды обычно предполагалось выполнение одной из трех гипотез: 1) $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, 2) $\sigma = 1/AQ^\beta$, $\beta = \text{const}$, $A = \text{const}$ (Q — прирост внутренней энергии по отношению к начальному состоянию), 3) $\sigma = \sigma_0/(1 + \beta Q)$. Теплопроводность среды в этих исследованиях принималась постоянной. В [2, 4] рассматривалась гипотеза 2, а в [3] — задача с зависимостью σ вида 3. Постоянная проводимость изучалась в [1, 5]. Сложность задачи в случае гипотез 2, 3 диктуется нелинейной зависимостью проводимости проводника от его термодинамических характеристик. Однако даже в случае постоянной σ исследователи прибегали к дальнейшим упрощениям модели. Например, в [1] не учитывается теплопроводность среды, в [5] рассматривается граничный режим лишь в форме скачка магнитного поля. В данной работе дано аналитическое решение линейной задачи с учетом теплопроводности и со степенным граничным режимом магнитного поля, изучены нелинейная задача для гипотезы 2 и структура решения для гипотезы 3.

1. Как известно [1, 2], проникновение магнитного поля $H(x, t)$ в несжимаемый проводник плоской или цилиндрической геометрии описывается системой уравнений

$$(1.1)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -j, \quad \frac{\partial E}{\partial x} + \mu\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{n_0 E}{x}, \quad j = \sigma(Q)E,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{j^2}{\sigma} - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad q = -\varkappa\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При $n_0 = 1$ получаем задачу о диффузии в цилиндрический проводник, при $n_0 = 0$ исследуется одномерная плоская задача. В выписанных уравнениях $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, принимаемый в данной модели постоянным, остальные обозначения общеприняты.

На плоской или цилиндрической границе проводника задаются магнитное поле $H(x_0, t) = H_0 t^\alpha$ ($\alpha \geqslant 0$) и тепловой поток $q(x_0, t) = 0$, изучается процесс диффузии магнитного поля при нулевых начальных значениях H, E, Q, q.

2. Рассмотрим задачу с $\sigma = \sigma_0$. При $x_0 = 0$ условия задачи позволяют ввести автомодельную переменную $z = x/t^{1/2}$. В безразмерных переменных получаем следующую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(2.1)\qquad \frac{dH}{dz} = -E, \quad \frac{dE}{dz} = -\alpha H - \frac{z}{2}E - \frac{n_0 E}{z},$$

$$\frac{dq}{dz} = -2\alpha Q - \frac{zq}{2\varkappa} + E^2, \quad \varkappa\frac{dQ}{dz} = -q,$$

$$H(0) = 1,\ q(0) = 0,\ H(\infty) = Q(\infty) = 0.$$

Первые два уравнения системы (2.1) решаются независимо от остальных. Исключая E и полагая $\zeta = z^2/4$, для H имеем

$$\zeta H_{\zeta\zeta} + \left(\zeta + \frac{n_0+1}{2}\right) H_\zeta - \alpha H = 0. \tag{2.2}$$

Полагая $H(\zeta) = \int\limits_C e^{p\zeta} V(p)\,dp$, из (2.2) находим, что $V(p) \sim (p+1)^{\alpha+(n_0-1)/2} \times$ $\times p^{-1-\alpha}$. Два независимых решения уравнения (2.2) получим в виде

$$H_1 \sim \int\limits_{C_1} e^{\zeta p}(1+p)^{\alpha+(n_0-1)/2} p^{-1-\alpha}\,dp,$$

$$H_2 \sim \int\limits_{C_2} e^{\zeta p}(1+p)^{\alpha+(n_0-1)/2} p^{-1-\alpha}\,dp.$$

Контур C_1 исходит из $-\infty$, обходит точку -1 в положительном направлении и удаляется в $-\infty$. Контур C_2 устроен аналогично, только помимо точки -1 он обходит еще и точку 0. Учитывая условие $H(z_0) = 1$ (в системе (2.1) $z_0 = 0$), а также асимптотику $H_2(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$ ($\beta = (n_0 - 1)/2$)

$$H_2(\zeta) \sim \frac{\zeta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-k)}{k!} \frac{\zeta^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)},$$

находим электромагнитные поля в виде

$$H(z) = \int\limits_1^\infty e^{-\frac{z^2 y}{4}} (y-1)^{\alpha+(n_0-1)/2} y^{-1-\alpha}\,dy \Bigg/ \int\limits_1^\infty e^{-\frac{z_0^2 y}{4}} (y-1)^{\alpha+(n_0-1)/2} y^{-1-\alpha}\,dy, \tag{2.3}$$

$$E(z) = \frac{z}{2} \int\limits_1^\infty e^{-\frac{z^2 y}{4}} (y-1)^{\alpha+(n_0-1)/2} y^{-\alpha}\,dy \Bigg/ \int\limits_1^\infty e^{-\frac{z_0^2 y}{4}} (y-1)^{\alpha+(n_0-1)/2} y^{-1-\alpha}\,dy.$$

Из формулы (2.3) следует $E(0) = \Gamma(1+\alpha)/\Gamma(1/2+\alpha)$. Возвращаясь к исходным переменным системы (1.1), имеем значение плотности тока j на границе проводника ($x = 0$):

$$j(0,t) = \sigma_0 t^{\alpha-1/2} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}.$$

Последняя формула показывает, что при $\alpha \geqslant 1/2$ разрыв плотности тока исчезает. В нелинейной задаче (см. гипотезы 2 и 3) разрыв плотности тока при $t \to 0$ регулируется не только граничным режимом, но также и коэффициентом теплопроводности. Для гипотезы 3 при $t \to 0$ $\sigma \to \sigma_0$ и поведение плотности тока такое же, как и в линейной задаче (см. (4.2)). При $\sigma = 1/AQ^\beta$ структура решения резко отличается от гипотез 1, 2 (это будет показано ниже), но здесь вопрос о поведении $j(0, t)$ в зависимости от $\varkappa$ не затронут. Последние два уравнения системы (2.1) сводятся к

$$\varkappa Q'' + \frac{z}{2} Q' - 2\alpha Q = -E^2(z) = -f\left(\frac{z^2}{4}\right).$$

После замены $\zeta = z^2/4\varkappa$ находим

$$\zeta Q_{\zeta\zeta} + (\zeta + 1/2) Q_\zeta - 2\alpha Q = -f(\varkappa\zeta). \tag{2.4}$$

Решение соответствующего однородного уравнения возьмем в виде

$$Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2,$$

где
$$Q_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\zeta p}(1+p)^{2\alpha-1/2}p^{-1-2\alpha}\,dp;$$
$$Q_2(\zeta) = \int_1^\infty e^{-\zeta y}(y-1)^{2\alpha-1/2}\,y^{-1-2\alpha}\,dy.$$

Контур C представляет окружность с центром в точке $p = 0$ с единичным радиусом. Легко получить асимптотические формулы для $Q_1(\zeta)$ и $Q_2(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$:

$$(2.5)\qquad Q_1(\zeta) = \frac{\zeta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2\alpha-1/2)\ldots(2\alpha+1/2-k)}{k!}\times$$
$$\times\frac{\zeta^{2\alpha-k}}{\Gamma(1+2\alpha-k)} + O\left(\zeta^{2\alpha-n-1}\right),$$
$$Q_2(\zeta) = \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^{2\alpha+1/2}}\left(\Gamma(2\alpha+1/2) + \sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{n(1+2\alpha)\ldots(n+2\alpha)}{n!\,\zeta^n}\times\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma(2\alpha+1/2+n) + O\left(\zeta^{-p-1}\right)\right).$$

При $\zeta \to 0$ для Q_1 и Q_2 имеем сходящиеся ряды
$$Q_1 \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1-2\alpha)\ldots(1-2\alpha)(-2\alpha)}{n!\,(n-1/2)\ldots(3/2)(1/2)}\zeta^n,$$
$$Q_2 \sim \sqrt{\zeta}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-2\alpha-1/2)\ldots(1-2\alpha-1/2)}{n!\,(n+1/2)\ldots 3/2}\zeta^n\right) +$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2}2^{\frac{4\alpha-1}{2}}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^{\frac{4\alpha-1}{4}}\cos\left(\frac{4\alpha+1}{4}\varphi\right)d\varphi\times$$
$$\times\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1-2\alpha)\ldots(1-2\alpha)(-2\alpha)}{n!\,(n-1/2)\ldots(3/2)(1/2)}\zeta^n\right).$$

Рассмотрим сначала плоскую геометрию. В этом случае в формулах (2.3) $n_0 = 0$. Общее решение уравнения (2.4) можно записать как
$$Q = C_1Q_1 + C_2Q_2 + Q_1\int_0^\zeta\frac{Q_2(\xi)\,f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}d\xi - Q_2\int_0^\zeta\frac{Q_1(\xi)\,f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}d\xi,\quad W(\xi) =$$
$$= Q_1Q_2' - Q_2Q_1'.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий $\sqrt{\zeta}\,Q_\zeta' \to 0$ $(\zeta \to 0)$, $Q(\infty) = 0$. Учитывая это, окончательно получим
$$(2.6)\qquad Q = -Q_1(\zeta)\int_\zeta^\infty\frac{Q_2(\xi)\,f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}d\xi - Q_2(\zeta)\int_0^\zeta\frac{Q_1(\xi)\,f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}d\xi =$$
$$= -Q\left(\frac{z^2}{4\varkappa}\right)\int_z^\infty\frac{Q_2\left(\frac{y^2}{4\varkappa}\right)f\left(\frac{y^2}{4}\right)}{yW\left(\frac{y^2}{4\varkappa}\right)}dy - Q_2\left(\frac{z^2}{4\varkappa}\right)\int_0^z\frac{Q_1\left(\frac{y^2}{4\varkappa}\right)f\left(\frac{y^2}{4}\right)}{yW\left(\frac{y^2}{4\varkappa}\right)}dy.$$

Формула (2.6) удобна для дальнейших исследований. Полагая $\varkappa \to 0$ и учитывая асимптотики (2.5), находим разложение по $\varkappa$. В частности, при $\varkappa = 0$ (нулевое приближение) имеем
$$Q(z) = 2z^{4\alpha}\int_z^\infty\frac{f\left(\frac{y^2}{4}\right)}{y^{1+4\alpha}}dy \underset{z\to 0}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty, & \alpha = 0,\\ \dfrac{1}{2\alpha}\,\dfrac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma^2(\alpha+1/2)}, & \alpha > 0.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим цилиндрическую геометрию ($n_0 = 1$). Для сохранения автомодельности задачи будем считать, как это сделано в [1, 5], что на цилиндрической границе проводника происходит фазовый переход, при котором поверхность проводника испаряется. В этом случае граничный режим необходимо задавать в виде ступенчатой функции ($\alpha = 0$). Общее решение уравнения (2.3) представим в форме

$$Q(\zeta) = C_1Q_1 + C_2Q_2 + Q_1(\zeta)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{Q_2(\xi)\, f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}\, d\xi - Q_2(\zeta)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{Q_1(\xi)\, f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}\, d\xi.$$

При $\zeta = \zeta_0$ возникают следующие требования:

$$\left.\frac{dQ}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0} = 0, \quad Q(\zeta_0) = Q^*$$

(Q^* — количество тепла, необходимое для нагревания единицы объема проводника от начальной температуры до температуры кипения и для его полного испарения). Эти условия позволяют определить $\zeta_0(z_0)$ из соотношения

$$Q^* = -\frac{W(\zeta_0)}{Q_2'(\zeta_0)}\int\limits_{\zeta_0}^{\infty} \frac{Q_2(\xi)\, f(\varkappa\xi)}{\xi W(\xi)}\, d\xi. \tag{2.7}$$

Поскольку $\alpha = 0$, выражение (2.7) претерпевает дальнейшие упрощения. Действительно, в этом случае $Q_1 = 1$, $W(\xi) = Q_2'(\xi)$ и, принимая во внимание асимптотики (2.5), находим, что при $\zeta \to \infty$ $Q_2(\zeta)/W(\zeta) \to -1$. Если в соотношении (2.7) $\zeta_0 \to \infty$, то существует предел в его правой части:

$$\lim_{\zeta_0\to\infty}\int\limits_{\zeta_0}^{\infty} \frac{f(\varkappa\xi)}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}.$$

Для получения этого результата использованы формулы (2.3) и учтено, что $f(z^2/4) = E^2(z, z_0)$. Следовательно, максимальное магнитное поле, которое может удержать цилиндрическая поверхность, можно определить из соотношения, связывающего размерное и безразмерное Q^*, т. е. $Q^*_{\text{разм}} = \mu H_0^2 Q^*$:

$$H_{0\max} = \sqrt{\frac{2Q^*}{\mu}}. \tag{2.8}$$

3. Изучим нелинейную задачу с зависимостью $\sigma = 1/AQ^\beta$, $\beta = \text{const} > 0$, теплопроводностью пренебрегаем. При $x_0 = 0$ условия задачи позволяют ввести автомодельную переменную $z = xt^{-(1+2\alpha\beta)/2}$. Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dH}{dz} = -EQ^{-\beta}, \quad \frac{dE}{dz} = -\alpha H + \frac{1+2\alpha\beta}{2}zEQ^{-\beta} - \frac{n_0E}{z},$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{2z}{1+2\alpha\beta}\left(2\alpha Q - E^2Q^{-\beta}\right), \quad H(0) = 1,$$

в которой сделаем замену переменных по формулам

$$\zeta = \frac{z_0 - z}{z_0}, \quad H = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, 2\beta z_0 \left(2\beta\gamma z_0^2\right)^{(1-\beta)/2\beta}\zeta^{1/2\beta}h(\zeta),$$

$$E = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\left(2\beta\gamma z_0^2\right)^{(1+\beta)/2\beta}\zeta^{1/2\beta}e(\zeta),$$

$$Q = \left(2\beta\gamma z_0^2\right)^{1/\beta}\zeta^{1/\beta}q(\zeta), \quad \gamma = \frac{1+2\alpha\beta}{2}.$$

После проведения вычислений имеем уравнения для функций h, e, q:

(3.1)
$$\zeta \frac{dh}{d\zeta} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{e}{q^\beta} - 1\right),$$
$$\zeta \frac{de}{d\zeta} - \frac{1-\zeta}{2\beta}\frac{e}{q^\beta} + \left(\frac{n_0\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{2\beta}\right)e + \frac{\alpha}{\gamma}\zeta h,$$
$$\zeta \frac{dq}{d\zeta} = \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{\beta}\frac{e^2}{q^\beta} - \frac{q}{\beta} - \frac{2\alpha}{\gamma}\frac{\zeta}{1-\zeta}q.$$

Будем искать голоморфное при $\zeta = 0$ решение системы (3.1). Начальные условия положим равными
$$h(0) = 1,\ e(0) = 1,\ q(0) = 1.$$

Итак, положим $h = 1 + \tilde{h}$, $e = 1 + \tilde{e}$, $\tilde{q} + 1 = q$, где функции $\tilde{h}$, $\tilde{e}$, $\tilde{q}$ голоморфны при $\zeta = 0$ и принимают нулевые значения. Эти функции определяются из системы уравнений
$$\zeta \frac{d\tilde{h}}{d\zeta} - \frac{1+\tilde{e}}{2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\tilde{q}^n + \frac{\tilde{e}-\tilde{h}}{2\beta},$$
$$\zeta \frac{d\tilde{e}}{d\zeta} = \frac{(1-\zeta)(1+\tilde{e})}{2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\tilde{q}^n +$$
$$+ \zeta(1+\tilde{e})\left(\frac{n_0}{1-\zeta} - \frac{1}{2\beta}\right) + \frac{\alpha}{\gamma}\zeta(1+\tilde{h}),$$
$$\zeta \frac{d\tilde{q}}{d\zeta} = \frac{(1+\tilde{e})^2}{\beta(1-\zeta)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\tilde{q}^n +$$
$$+ \frac{\tilde{e}(2+\tilde{e}) + \zeta - \tilde{q}(1-\zeta)}{\beta(1-\zeta)} - \frac{2\alpha}{\gamma}\frac{\zeta}{1-\zeta}(1+\tilde{q}).$$

Поставим вместо $\tilde{h}$, $\tilde{e}$, $\tilde{q}$ целые ряды, т. е. положим
$$\tilde{h} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\zeta^n, \quad \tilde{e} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n\zeta^n, \quad \tilde{q} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n\zeta^n.$$

Для нахождения коэффициентов получается система линейных уравнений
$$(-1)^n\beta q_n + e_n - (1 + 2n\beta)h_n = 0,$$
$$(1 + 2n\beta)e_n - (1 + 2n\beta)h_n = \ldots,$$
$$(1 + \beta n)q_n - e_n - (1 + 2n\beta)h_n = \ldots$$

(многоточие обозначает известные величины или величины, определяемые на предыдущих шагах). Определитель этой системы отличен от нуля при $\beta > 0$. Сходимость полученных рядов устанавливается методом мажорантных функций. Возникает вопрос о радиусе сходимости рядов. Если он меньше единицы, то будем аналитически продолжать построенное решение вдоль действительной оси ζ до точки $\zeta = 1$. Анализ системы (3.1) показывает, что такое продолжение действительно возможно. Из (3.1) следует, что $\tilde{q}(\zeta) \to \infty$ при $\zeta \to 1$. Рассмотрим систему двух уравнений относительно z_0, ζ_0:
$$\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, 2\beta z_0\left(2\beta\gamma z_0^2\right)^{(1-\beta)/2\beta}\zeta_0^{1/2\beta}h(\zeta_0) = 1,$$
$$\left(2\beta\gamma z_0^2\right)^{1/\beta}\zeta_0^{1/\beta}q(\zeta_0) = Q^*.$$

Эта система всегда разрешима при $n_0 = 0{,}1$. В результате ее решения при $\alpha = 0$ получим две кривые: $x_1 = z_0(1 - \zeta_0)\sqrt{t}$, $x_2 = z_0\sqrt{t}$. Первая описывает фронт испарения поверхности проводника, вторая — фронт распространения граничного режима. Как известно, в линейной задаче при $\varkappa = 0$ граничный режим распространяется с бесконечной скоростью. Бесконечная скорость фронта имеется и в случае гипотезы 3. Зависимость электропроводности по формуле $\sigma = 1/AQ^{\beta}$ моделирует нулевое сопротивление при $t \to 0$, т. е. наличие сверхпроводящей фазы в начальный момент времени. Приведенный в п. 3 анализ показывает, что в данной модели наблюдается конечность скорости распространения электромагнитных возмущений. Такие решения с конечной скоростью распространения возмущений для нелинейных параболических задач были впервые отмечены в [6].

4. Пусть $\sigma = \sigma_0/(1 + \beta Q)$. При $\alpha = 0$ можно ввести автомодельную переменную $z = xt^{-1/2}$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае имеет вид

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{z}{2}\frac{E}{1+\beta Q} - \frac{n_0 E}{z}, \quad \frac{dH}{dz} = -\frac{E}{1+\beta Q}, \tag{4.1}$$

$$\varkappa\frac{dq}{dz} = -\frac{z}{2}q + \frac{E^2}{1+\beta Q}, \quad \frac{dQ}{dz} = -q, \quad H(0) = 1, \quad q(0) = 0.$$

Представим искомое решение (4.1) в форме целых рядов по параметру β:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\beta^n, \quad E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\beta^n, \ldots$$

Для нулевого приближениям имеем

$$H_0' = -E_0, \quad E_0' = -\frac{z}{2}E_0 - \frac{n_0 E_0}{z}, \tag{4.2}$$

$$\varkappa q_0' = -\frac{z}{2}q_0 + E_0^2, \quad Q_0' = -q_0, \quad H_0(0) = 1, \quad q_0(0) = 0.$$

Эти уравнения совпадают с (2.1) при $\alpha = 0$. Последующие приближения определяются из неоднородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$H_n' = -E_n - \sum_{p=1}^{n} Q_{p-1}H_{n-p}', \tag{4.3}$$

$$E_n' = -\frac{z}{2}E_n - \frac{n_0}{z}E_n - \sum_{p=1}^{n} Q_{p-1}\left(E_{n-p}' + \frac{n_0}{z}E_{n-p}\right),$$

$$\varkappa q_n' = -\frac{z}{2}q_n - \sum_{p=1}^{n} Q_{p-1}\left(\varkappa q_{n-p}' + \frac{z}{2}q_{n-p}\right) + \sum_{p=0}^{n} E_pE_{n-p},$$

$$Q_n' = -q_n, \quad H_n(0) = 0, \quad q_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

При $n_0 = 0$ задача (4.3) разрешима при каждом n. Сходимость полученных рядов устанавливается методом мажорантных функций. При $n_0 = 1$ необходимо рассматривать задачу с фазовым переходом, как это уже делалось в пп. 2, 3.

Практическое значение имеет нахождение величины максимального магнитного поля, которое еще может удержать рассматриваемый проводник. Такое поле найдено в п. 2 для $\sigma = \text{const}$. В нелинейной задаче этот метод неприменим из-за отсутствия точной формулы для решения. Пусть решена задача (4.1) при $H(z_0) = 1$, $q(z_0) = 0$, $H(\infty) = Q(\infty) = 0$. Значение z_0 фиксируется из дополнительного условия

$$Q(z, z_0)|_{z=z_0} = Q^*.$$

В п. 2 указывалась связь размерной $Q^*_{\text{разм}}$ и безразмерной Q^*:

$$Q^*_{\text{разм}}/\mu H_0^2 = Q^* = Q(z_0, z_0) = \varphi(z_0).$$

Ясно, что поле будет максимальным при $z_0 \to \infty$. Следовательно, задача сводится к нахождению предельного значения $\varphi(z_0)$ при $z_0 \to \infty$. Тогда искомое максимальное поле $H_{0\max}$ выразится по формуле

$$H_{0\max} = \sqrt{\frac{Q^*_{\text{разм}}}{\mu \lim\limits_{z_0\to\infty} \varphi(z_0)}}.$$

Положим в (4.1) $(z - z_0)/z_0 = \zeta$, $q = z_0\tilde{q}$, $E = z_0\tilde{E}$, $\varepsilon = z_0^{-2}$. После проведения указанных замен получим сингулярно возмущенную краевую задачу

$$\varepsilon\frac{dH}{d\zeta} = -\frac{\tilde{E}}{1+\beta Q}, \quad \varepsilon\frac{d\tilde{E}}{d\zeta} = -\frac{1+\zeta}{2}\frac{\tilde{E}}{1+\beta Q} - \varepsilon\frac{n_0\tilde{E}}{1+\zeta},$$
$$\varepsilon\frac{d\tilde{q}}{d\zeta} = -\frac{1+\zeta}{2\varkappa}\tilde{q} + \frac{\tilde{E}^2}{1+\beta Q}, \quad \varepsilon\frac{dQ}{d\zeta} = -\frac{q}{\varkappa},$$
$$H(0) = 1,\ H(\infty) = Q(\infty) = 0,\ q(0) = 0. \tag{4.4}$$

Введем растянутую переменную $\eta = \zeta/\varepsilon$ [7] и рассмотрим (4.4) при $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 < \infty$, $\varepsilon \to 0$. Если оставить только главные члены, то находим

$$\frac{dH}{d\eta} = -\frac{\tilde{E}}{1+\beta Q}, \quad \frac{d\tilde{E}}{d\eta} = -\frac{1}{2}\frac{\tilde{E}}{1+\beta Q},$$
$$\frac{d\tilde{q}}{d\eta} = -\frac{\tilde{q}}{2\varkappa} + \frac{\tilde{E}^2}{1+\beta Q}, \quad \varkappa\frac{dQ}{d\eta} = -\tilde{q}. \tag{4.5}$$

Система (4.5) имеет два первых интеграла:

$$\varkappa\frac{dQ}{d\eta} + \frac{1}{2}Q = \tilde{E}^2 + C_1, \quad \frac{H}{2} - \tilde{E} = C_2.$$

При $\eta \to \infty$ решение системы (4.5) должно сращиваться с решением системы (4.4) [7], которое экспоненциально мало при $\varepsilon \to 0$, $\zeta > 0$. Такое сращивание возможно лишь при условии $C_1 = C_2 = 0$. Тогда, полагая $\eta = 0$ и учитывая, что $dQ/d\eta = 0$, при $\eta = 0$ окончательно найдем

$$\lim_{z_0\to\infty} \varphi(z_0) = Q(0) = \frac{1}{2}.$$

Величина максимального магнитного поля, которое еще может удержать проводник, имеет то же значение, что и в линейной задаче (см. (2.8)):

$$H_{0\max} = \sqrt{\frac{2Q^*_{\text{разм}}}{\mu}}. \tag{4.6}$$

У формулы (4.6) простой физический смысл: разрушение проводника происходит, если плотность магнитной энергии становится равной энергии связи составляющих проводник частиц. Формула (4.6) для линейной задачи (2.1) ($\sigma = \sigma_0 = \text{const}$) получена во многих работах [1, 5, 8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Семченко В. В., Степанов А. В.** О диффузии импульсных сверхсильных полей // ПМТФ.— 1969.— № 1.
2. **Пономарев С. М.** Точные решения уравнений нелинейной диффузии магнитного поля // ЖВММФ.— 1988.— Т. 28, № 10.
3. **Кнопфель Г.** Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
4. **Прут В. В.** Автомодельное решение уравнений нелинейной диффузии магнитного поля // ПМТФ.— 1982.— № 1.
5. **Пономарев С. М.** О проникновении импульсных сильных магнитных полей в проводник // ПМТФ.— 1989.— № 5.
6. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе.— М.: Наука, 1950.
7. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
8. **Шнеерсон Г.** К теории электрического взрыва скин-слоя в сверхсильном магнитном поле // ЖТФ.— 1973.— № 2.

9. **Бичепков Е. И., Войтенко А. Е.** Автомодельный электрический скиновый взрыв проводника // ПМТФ.— 1969.— № 3.

г. Москва *Поступила 20/XII 1990 г., в окончательном варианте — 5/VI 1991 г.*

УДК 532.529

А. В. Федоров, Н. Н. Федорова

СТРУКТУРА, РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СМЕСИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Вопросы математического моделирования поведения смесей различных материалов при высоких давлениях возникают при расчете действия на гетерогенные материалы, пористые среды и т. д. продуктов взрыва высокоэнергетических ВВ.

Для описания такого рода явлений в гидродинамическом приближении механики гетерогенных сред в [1, 2] предложены соответствующие математические модели в двухдавленческом приближении. В случае неравенства давлений фаз необходимо некоторое замыкающее соотношение, каким может служить условие пропорциональности давлений $p_1 = kp_2$, $k = \mathrm{const}$ (в том числе и $k = 1$). Отличный от упомянутого способ замыкания модели по давлениям предложен в [3]. Он основан па постулировании уравнения m_2-переноса для объемной концентрации второй фазы с источниковым членом. В [4] приводится выражение источникового члена в уравнении m_2-переноса, дается замыкание модели для двух твердых тел.

Согласно предложенной математической модели, для однодавленческой смеси в [1] приводится расчет структуры замороженной ударной волны (УВ) в насыщенной пористой среде (вода и песок). Вопросы существования и единственности решения подробно не обсуждаются. В [5] дан обзор работ по структурам УВ в смесях двух твердых материалов в двухскоростном однодавленческом баротропном приближении. В [6] на основе качественных рассуждений для такого течения показано существование четырех типов УВ. В [7] изучены вопросы существования и единственности решений типа бегущих волн для смеси газов Клапейрона в двухскоростном двухтемпературном приближении, в [8] аналогичные вопросы рассмотрены в односкоростном двухдавленческом баротропном течении газожидкостной смеси.

Представляется интересным исследование структуры УВ в смеси двух твердых тел в гидродинамическом приближении с учетом разницы в скоростях и давлениях фаз, а также образования УВ различных типов из начальных данных ступенчатого вида и отражения УВ от жесткой стенки.

1. Стационарное течение. Уравнения [9], описывающие течения типа бегущей волны в сопутствующей системе координат, имеют вид

$$\rho_i u_i = c_i, \quad i = 1, 2, \quad p + c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_3, \tag{1.1}$$

$$p_i = a_i^2 (\rho_i / m_i - \rho_{ii,0}), \quad i = 1, 2, \quad p = m_1 p_1 + m_2 p_2,$$

$$c_2 \dot{u}_2 + m_2 \dot{p}_2 + (p_2 - p_1) \dot{m}_2 = -R,$$

$$R = -\frac{\rho_2 c_D}{\tau_{\text{ст}}} \frac{\mathrm{Re}}{24} m_1 (u_1 - u_2), \quad \dot{m}_2 = -\varkappa = -\frac{(p_1 - p_2)}{\mu_2 u_2}.$$

Здесь $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ — средняя плотность; m_i, ρ_{ii} — объемная концентрация и истинная плотность; p_i — парциальные давления; u_i — скорости фаз; нулем отмечено начальное состояние; c_i — значения соответствую-