УДК 532.516

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

С. В. Мелешко, В. В. Пухначев*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается семейство частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса ранга два и дефекта два. Эти решения описывают трехмерные неустановившиеся движения вязкой несжимаемой жидкости, в которых вертикальная компонента скорости и давление не зависят от горизонтальных координат. Они могут быть интерпретированы, в частности, как течения в горизонтальном слое, одна из границ которого является свободной поверхностью.

1. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Навье — Стокса. Ниже исследуется система уравнений Навье — Стокса

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla p + \Delta \boldsymbol{u}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.1}$$

рассматриваемая с теоретико-групповой точки зрения. Здесь $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление, t — время, ∇ и Δ — соответственно градиент и лапласиан по переменным $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$.

Система (1.1) допускает бесконечномерную группу преобразований [1], которая является источником ее многочисленных инвариантных решений (см. [2] и библиографию к ней). Многие из этих решений известны давно, однако систематический их анализ стал возможен с развитием современных методов группового анализа дифференциальных уравнений [3]. Вместе с тем еще в начале XX в. обнаружены точные решения системы (1.1), групповая природа которых оставалась неясной вплоть до 70-х гг. Самое известное из них — решение Кармана [4]. Оказалось, что решение Кармана и его аналоги не являются инвариантными [5], хотя также имеют групповое происхождение: они относятся к классу частично инвариантных решений [6] системы Навье — Стокса.

Систематический анализ частично инвариантных решений системы (1.1) до сих пор не проводился, хотя отдельные представители этого класса изучены достаточно подробно [7–11]. Как известно, основной трудностью при исследовании частично инвариантных решений является анализ совместности возникающей переопределенной системы уравнений. В упомянутых работах такой анализ не требовал особых усилий. В данной статье изучается класс частично инвариантных решений системы (1.1) ранга два и дефекта два, где процедура приведения переопределенной системы уравнений с четырьмя независимыми переменными к пассивной системе не является тривиальной.

2. Новый класс частично инвариантных решений системы (1.1). Рассмотрим группу G^4 преобразований евклидова пространства $\mathfrak{R}^8$ с координатами x, y, z, t, u, v, w, p, порожденную операторами $X = \partial_x$, $Y = \partial_y$, $U = t\partial_x + \partial_u$, $V = t\partial_y + \partial_v$. Очевидно, что группа G^4 допускается системой Навье — Стокса, однако ей не соответствует никакое инвариантное решение этой системы. Действительно, полный набор инвариантов группы G^4 есть z, t, w, p, так что ранг соответствующей матрицы Якоби [3] равен двум, а число инвариантов, не содержащих искомых функций, также равно двум. Это дает возможность находить регулярное частично инвариантное решение [12] ранга два и дефекта два системы (1.1) относительно группы G^4 в виде

$$w = 2f(z,t), \quad p = p(z,t), \quad u = u(x,y,z,t), \quad v = v(x,y,z,t). \tag{2.1}$$

Для уравнений газовой динамики такой класс решений рассмотрен в [13]. Вместо компонент скорости u, v удобнее выбрать функции $\widehat{u}(x,y,z,t)$, $\widehat{v}(x,y,z,t)$, которые связаны с u, v формулами

$$u = \widehat{u} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad v = \widehat{v} - y\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Тогда второе уравнение системы (1.1) с учетом (2.1) перепишется в виде

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} = 0$$

и может быть удовлетворено путем введения аналога функции тока $\psi = \psi(x,y,z,t)$ по формулам

$$\widehat{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \widehat{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При этом первые два скалярных уравнения, эквивалентных векторному уравнению системы (1.1), принимают вид

$$\begin{gathered}\psi_{yt} + \psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} + 2f\psi_{yz} - x(f_{zt} + f_z\psi_{xy} + 2ff_{zz} - f_z^2) - yf_z\psi_{yy} = \Delta\psi_y - xf_{zzz},\\ -\psi_{xt} - \psi_y\psi_{xx} + \psi_x\psi_{xy} - 2f\psi_{xz} - y(f_{zt} - f_z\psi_{xy} + 2ff_{zz} - f_z^2) + xf_z\psi_{xx} = -\Delta\psi_x - yf_{zzz},\end{gathered} \tag{2.2}$$

а третье уравнение отделяется и служит для определения давления $p(z,t)$ при известной функции $f(z,t)$:

$$p_z + 2f_t - 2f_{zz} + 4ff_z = 0.$$

Заметим, что после сложения продифференцированного по x первого уравнения (2.2) и по y второго получается уравнение

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2. \tag{2.3}$$

В этом уравнении правая часть зависит только от z и t, поэтому его можно рассматривать как уравнение Монжа — Ампера с постоянной (зависящей от параметров z и t) правой частью.

В данной статье мы рассмотрим гиперболический случай, когда правая часть в уравнении Монжа — Ампера (2.3) неотрицательна. Введем для нее обозначение

$$\alpha^2(z,t) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

Известно [14], что в этом случае уравнение Монжа — Ампера может быть один раз проинтегрировано:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2\alpha x + G\Big(z,t,\frac{\partial g}{\partial x}\Big), \tag{2.4}$$

где $g(x,y,z,t) = \psi(x,y,z,t) + xy\alpha(z,t)$, а $G(z,t,\xi)$ — произвольная функция интегрирования. После подстановки этого представления в первое уравнение (2.2) с помощью второго получается равенство

$$S \equiv b_4g_{xx}^2 + b_5g_{xz}^2 + b_1g_{xx} + b_2g_{xz} - b_3 = 0, \tag{2.5}$$

где

$$b_1 = 4\alpha\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\frac{\partial G}{\partial\xi}, \quad b_2 = 2\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\xi}, \quad b_4 = \frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\Big(\Big(\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big)^2 + 1\Big), \quad b_5 = \frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2},$$

$$b_3 = \widehat{\alpha}\Big(x + y\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big) + (f_z - \alpha)\Big(\xi\frac{\partial G}{\partial\xi} - G\Big) + \frac{\partial G}{\partial t} + 2f\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - 4\alpha^2\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2},$$

$$\widehat{\alpha} \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} - 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Затем после дифференцирования уравнения (2.5) по x и y и составления комбинации $D_yS - G_\xi D_xS - 2g_{xx}G_{\xi\xi}S = 0$ получается равенство, содержащее квадратичный полином относительно g_{xx}, g_{xz}:

$$\alpha\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3}\Big(\Big(\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big)^2 + 1\Big)g_{xx}^2 + \alpha\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3}g_{xz}^2 + c_1 g_{xx} + c_2 g_{xz} + c_3 = 0. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$c_1 = \widehat{\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\Big(x + y\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big) + \widehat{c}_1, \quad c_2 = 2\Big(\alpha_z\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2} + \alpha\frac{\partial^3 G}{\partial z\partial\xi^2}\Big), \quad c_3 = -y\alpha\widehat{\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2} + \widehat{c}_3$$

с некоторыми функциями $\widehat{c}_i$ ($i = 1,\ 3$), не зависящими явно от x и y. Вид части функций ввиду их громоздкости не приводится. Здесь и далее для обработки больших математических выражений использовалась система аналитических вычислений REDUCE [15]. Для дальнейшего исследования необходимо рассмотрение различных вариантов, зависящих от значения функции $\partial^2 G/\partial\xi^2$.

1. Пусть $G_{\xi\xi} \neq 0$, тогда уравнение (2.6) с помощью (2.5) может быть переписано как квазилинейное уравнение

$$a_1 g_{xx} + a_2 g_{xz} + a_3 = 0 \qquad (2.7)$$

с коэффициентами $a_i = b_i G_{\xi\xi\xi} - c_i G_{\xi\xi}$ ($i = 1,\ 2,\ 3$). Последнее уравнение и уравнение (2.5) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно x и y с определителем, равным $G_{\xi\xi}\alpha\widehat{\alpha}$. Если $\widehat{\alpha} \neq 0$, то эти два уравнения могут быть разрешены относительно x и y:

$$x = \Phi_1(g_{xx}, g_{xz}, g_x, z, t), \quad y = \Phi_2(g_{xx}, g_{xz}, g_x, z, t). \qquad (2.8)$$

После дифференцирования последних уравнений относительно x и y, подстановки в них выражений для g_y, g_{xy}, g_{xyz}, g_{xxy} и исключения из двух из них g_{xxx} возникают соотношения

$$\Phi_{1,1}G_{\xi\xi}g_{xx}^2 + \Phi_{1,2}(2\alpha_z + G_{\xi\xi}g_{xx}g_{xz} + G_z g_{xx}) = -G_\xi,$$

$$\Phi_{2,1}G_{\xi\xi}g_{xx}^2 + \Phi_{2,2}(2\alpha_z + G_{\xi\xi}g_{xx}g_{xz} + G_z g_{xx}) = 1,$$

где $\Phi_{i,1} = \partial\Phi_i/\partial g_{xx}$, $\Phi_{i,2} = \partial\Phi_i/\partial g_{xz}$. После подстановки выражений функций Φ_i ($i = 1,\ 2$) из последних уравнений находим $g_{xx} = \Psi_1(g_x, z, t)$, $g_{xz} = \Psi_2(g_x, z, t)$. Подставляя эти производные в (2.8), получаем противоречивые равенства $x = \widehat{\Phi}_1(g_x, z, t)$, $y = \widehat{\Phi}_2(g_x, z, t)$, поэтому в данном случае следует рассматривать $\widehat{\alpha} = 0$ или

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} - 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Тогда коэффициенты a_i, b_i, c_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), b_4, b_5 не зависят явно от x и y. Дальнейший анализ уравнений (2.5), (2.7) показывает, что они могут быть разрешены относительно вторых производных g_{xx} и g_{xz}:

$$g_{xx} = \Phi_1(g_x, z, t), \qquad g_{xz} = \Phi_2(g_x, z, t). \qquad (2.9)$$

1.1. Пусть в уравнениях (2.9) $\Phi_1 \neq 0$, тогда после интегрирования по x первого уравнения в (2.9) имеем $\widehat{\Phi}(g_x, z, t) = x + q(y, z, t)$ или

$$g_x = \Phi(x + q(y,z,t), z, t) \tag{2.10}$$

с произвольной функцией интегрирования $q(y, z, t)$ и некоторой функцией $\Phi(\lambda, z, t)$. Функция $g(x, y, z, t)$ должна также удовлетворять уравнению (2.4) и второму уравнению (2.9), т. е. $g_y = 2x\alpha + \Phi_3(x + q(y, z, t), z, t)$, $g_{xz} = \widehat{\Phi}_2(x + q(y, z, t), z, t)$. Исследование совместности последних уравнений и (2.10) приводит к представлению

$$g = -y^2\alpha k(t) + y\lambda(z,t) + \mu(x + yk(t), z, t). \tag{2.11}$$

Поскольку во всех представлениях для исходных переменных давления и скорости необходимо знание только производных по x и y от функции μ, то введем обозначение $\varphi(\eta, z, t) = (\partial\mu/\partial\eta)(\eta, z, t)$. Подстановка (2.11) в уравнения (2.2) и расщепление их по степеням y дает $k' = 0$, т. е. $k = \mathrm{const}$, а функции $\alpha(z,t)$, $\lambda(z,t)$, $\varphi(\eta, z, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \alpha^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + 2f\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = \lambda(\alpha + f_z), \tag{2.12}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2f\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - (k^2+1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + (\lambda - \eta(\alpha + f_z))\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + (\alpha - f_z)\varphi = 0.$$

Здесь $\eta = x + ky$, при этом $\psi = y(\lambda - \alpha\eta) + \mu$.

1.2. Пусть $\Phi_1 = 0$, тогда

$$g = xq_1(y,z,t) + q_2(y,z,t). \tag{2.13}$$

В силу уравнения (2.4) конкретизируются функции $q_1(y, z, t)$ и $q_2(y, z, t)$:

$$g = 2\alpha xy + x\widehat{\lambda}(z,t) + \widehat{\mu}(2\alpha y + \widehat{\lambda}(z,t), z, t).$$

Заметим, что если $\alpha = 0$, то данное представление решения является частным случаем представления (2.11), поэтому здесь считается $\alpha \neq 0$. Тогда уравнение $g_{xz} = \Phi_2(g_x, z, t)$ приводит к дальнейшей конкретизации представления (2.13):

$$g = 2\alpha x(y + \lambda(z,t)) + \mu(y,z,t).$$

Как и ранее, здесь $\varphi = \partial\mu/\partial y$. После подстановки данного представления решения в исходные уравнения (2.2) и их расщепления по переменной x для функций $\alpha(z,t)$, $\lambda(z,t)$, $\varphi(y, z, t)$ получаются уравнения

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \alpha^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + 2f\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} - \frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha\right),$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} + 2f\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial z^2} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} - (y(f_z + \alpha) + 2\alpha\lambda)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (\alpha - f_z)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

При этом функция $\psi = \alpha xy + 2\alpha x\lambda + \mu$.

2. Пусть $G_{\xi\xi} = 0$ или $G = a(z,t)g_x + \lambda(z,t)$. Это означает, что функция $g(x,y,z,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$g_y - a(z,t)g_x = 2\alpha x + \lambda(z,t). \tag{2.14}$$

Решение последнего уравнения зависит от значения функции $a(z,t)$, а уравнения (2.5), (2.6) принимают вид

$$g_{xx}a_z + \alpha(-af_z + a\alpha - b) + 2\alpha_z a_z = 0,$$
$$2g_{xz}a_z - \widehat{\alpha}(x + ya) - g_x b - \lambda f_z - (\lambda_t + 2f\lambda_z - \lambda_{zz}) - \alpha\lambda = 0, \tag{2.15}$$

где $b \equiv a_t + 2fa_z - a_{zz}$.

2.1. Если $a = 0$, то общее решение уравнения (2.14) представимо в следующем виде:

$$g = 2\alpha xy + y\lambda + \mu(x,z,t).$$

После подстановки этого представления решения в (2.2) получаем

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \alpha^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + 2f\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} - \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha\Big) = 0, \tag{2.16}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2f\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (\lambda + x(\alpha - f_z))\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \Big(\alpha + \frac{\partial f}{\partial z}\Big)\varphi = 0,$$

где $\varphi = \partial\mu/\partial x$.

2.2. Если $a \neq 0$, то решение уравнения (2.14) имеет вид

$$g = \frac{\alpha x^2 + x\lambda}{a} + \mu(x + ya, z, t)$$

с некоторой пока произвольной функцией $\mu(x + ya, z, t)$.

Если $a_z \neq 0$, то из первого уравнения (2.15) следует, что функция $g(x,y,z,t)$ является квадратичным полиномом относительно x и y. Это соответствует линейному профилю скорости относительно x и y [7]. Если же $a_z = 0$, но $a_t \neq 0$, то из второго уравнения (2.15) также следует, что функция $g(x,y,z,t)$ является квадратичным полиномом относительно x и y. Поэтому необходимо рассмотреть случай, когда функция $a(z,t)$ является постоянной и функции $\alpha(z,t)$, $\lambda(z,t)$ и $f(z,t)$ удовлетворяют тем же уравнениям (2.16), что и в предыдущем случае, а функция $\varphi(\eta,z,t) = (\partial\mu/\partial\eta)(\eta,z,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2f\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - (a^2+1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + (\lambda + \eta(\alpha - f_z))\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - (\alpha + f_z)\varphi = 0.$$

Во всех полученных системах, соответствующих гиперболическому уравнению Монжа — Ампера, отщепляются два уравнения

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \alpha^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2, \tag{2.17}$$

которые можно исследовать независимо от остальных уравнений. Допускаемая системой (2.17) бесконечная группа G^∞ соответствует алгебре L^∞, состоящей из операторов

$$Z_h = 2h(t)\partial_z + h'(t)\partial_f, \qquad T = \partial_t, \qquad R = 2t\partial_t + z\partial_z - 2\alpha\partial_\alpha - f\partial_f$$

с произвольной функцией $h(t) \in C^\infty$. Коммутаторы этих операторов имеют следующий вид: $[T, Z_h] = Z_{h'}$, $[R, Z_h] = Z_{2th'-h}$, $[T, R] = 2T$, $[Z_{h_1}, Z_{h_2}] = 0$ (здесь и далее штрих обозначает дифференцирование функций одной переменной по ее аргументу).

Поскольку для построения инвариантных и частично инвариантных решений системы (2.17) необходимо знание инвариантов соответствующих подгрупп, проведем классификацию подалгебр по наличию того или иного вида инвариантов.

Все подалгебры бесконечномерной алгебры L^∞ могут быть только двух видов: содержащие оператор растяжения R и не содержащие его, т. е. $(R + cT + Z_{h_1}) \oplus L$ или L. Здесь L — подалгебра бесконечномерной алгебры, состоящей из операторов T и Z_h. Заметим, что константу c в операторе $R + cT + Z_{h_1}$ можно считать равной нулю. Это соответствует в инвариантах замене времени t на время $t + c$.

В свою очередь подалгебры L также могут быть только двух видов: включающие оператор T и не включающие его, т. е. $(T + Z_{h_1}) \oplus \bar{L}$ или $\bar{L}$. Здесь $\bar{L}$ — подалгебра бесконечномерной алгебры, состоящей из операторов Z_h.

Рассмотрим прежде всего возможные инварианты подалгебр L. Если размерность подалгебр первого класса $(T + Z_{h_1}) \oplus \bar{L}$ больше двух, то они имеют только один инвариант α, а все подалгебры второго класса $\bar{L}$ размерности больше 1 имеют два инварианта: α, t. Для оставшихся подалгебр $\{T + Z_{h_1}, Z_{h_2}\}$, $\{T + Z_{h_1}\}$, $\{Z_h\}$ инварианты легко могут быть найдены. Для подалгебры $\{T + Z_{h_1}, Z_{h_2}\}$ инвариантами будут α, $f - cz - H(t)$, где $H(t) = h_1(t) - 2c\int h_1(t)\,dt$. Здесь c — постоянная, вытекающая из требования, чтобы указанные операторы образовывали подалгебру. Это требование соответствует условию $[T + Z_{h_1}, Z_{h_2}] = 2cZ_{h_2'}$ и выражается равенством $h_2' = 2ch_2$, накладывающим ограничение на функцию h_2. Для подалгебры $\{T + Z_{h_1}\}$ инвариантами являются $z - 2H(t), \alpha, f - H'(t)$, где $H(t)$ — первообразная функции h_1. Подалгебра $\{Z_h\}$ имеет инварианты t, α, $f - zH(t)$, где $H(t) = h'/(2h)$.

Рассмотрим все возможные инварианты подалгебр $(R + Z_h) \oplus L$. Если подалгебра L является подалгеброй первого класса $(T + Z_{h_1}) \oplus \bar{L}$ и имеет размерность больше двух, то у такой подалгебры $(R + Z_h) \oplus L$ нет инвариантов. Если L является подалгеброй второго класса $\bar{L}$ размерности больше 1, то подалгебра $(R + Z_{h_1}) \oplus L$ имеет только один инвариант $t\alpha$. Для оставшихся подалгебр $\{T + Z_{h_1}, Z_{h_2}, R + Z_{h_3}\}$, $\{T + Z_{h_1}, R + Z_{h_2}\}$, $\{Z_{h_1}, R + Z_{h_2}\}$, $\{R + Z_h\}$ инварианты также могут быть легко найдены.

Для подалгебр вида $\{T + Z_{h_1}, Z_{h_2}, R + Z_{h_3}\}$ условие подалгебры накладывает ограничения на функции $h_1(t), h_2(t)$ и $h_3(t)$:

$$h_1(t) = H(t) - c, \quad h_2 = 1, \quad h_3'(t) = 2tH'(t) + H(t)$$

с некоторой постоянной c и функцией $H(t)$. Такие подалгебры имеют только один инвариант $\alpha(f - H(t))^{-2}$.

Для подалгебр вида $\{T + Z_{h_1}, R + Z_{h_2}\}$ условие подалгебры требует от функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ выполнения соотношений $h_1(t) = H'(t)$, $h_2(t) = 2tH'(t) - H(t)$ с некоторой функцией $H(t)$. Инвариантами таких подалгебр являются $\alpha(z - 2H(t))^2$, $(f - H'(t))(z - 2H(t))$.

Для подалгебр вида $\{Z_{h_1}, R + Z_{h_2}\}$ условием подалгебры является $th_1'(t) = 2ch_1$ с некоторой постоянной c, а инвариантами — $t\alpha$, $(f - H(t) - cz/t)t^{1/2}$. Здесь

$$H(t) = \frac{1}{2t}h_2(t) - \frac{(4c-1)t^{-1/2}}{2}\int t^{-3/2}h_2(t)\,dt.$$

Наконец, подалгебра $\{R + Z_h\}$ имеет инварианты $(z - 2H(t))t^{-1/2}$, $t\alpha$, $(f - H'(t))t^{1/2}$, где $h(t) = 2tH'(t) - H(t)$.

Тем самым все инварианты подалгебр L^∞ могут быть только указанных десяти типов: 1) α; 2) $t\alpha$; 3) $\alpha(f - H(t))^{-2}$; 4) t, α; 5) α, $f - cz - H(t)$; 6) $\alpha(z - 2H(t))^2$, $(f - H'(t))(z - 2H(t))$; 7) $t\alpha$, $(f - H(t) - cz/t)t^{1/2}$; 8) $z - 2H(t)$, α, $f - H'(t)$; 9) t, α, $f - zH(t)$; 10) $(z - 2H(t))t^{-1/2}$, $t\alpha$, $(f - H'(t))t^{1/2}$ с некоторой функцией $H(t)$ и постоянной c.

3. Инвариантные решения системы (2.17). Анализ условий совместности для частично инвариантных решений, соответствующих инвариантам 1–4, показывает, что эти решения редуцируются либо к случаю, когда $\alpha = 0$, либо к одному из инвариантных решений, которые получаются для инвариантов 5–10, а именно: для типа 1 $\alpha = 0$; для типов 2, 4 $\alpha = 0$ или решение является инвариантным типа 9; для типа 3 решение имеется только для $\alpha = 0$.

Тип 5. Имеется только одно инвариантное решение $\alpha = 0$, $f = H(t)$, где $H(t)$ — произвольная функция времени t.

Тип 6. Инвариантное решение имеет представление

$$\alpha = \frac{c_1}{(z - 2H(t))^2}, \qquad f = H'(t) + \frac{c_2}{z - 2H(t)}$$

с постоянными c_1 и c_2, которые удовлетворяют соотношениям $c_1(c_2+3) = 0, 3c_2(c_2+2) = c_1^2$.

Тип 7. Инвариантное решение имеет представление $\alpha = c_1/t$, $f = H(t) + c_2 z/t$ с постоянными c_1 и c_2, которые удовлетворяют соотношениям $c_1(2c_2+1) = 0$, $c_2(c_2+1)+c_1^2 = 0$.

Тип 8. Инвариантное решение имеет представление $\alpha = \alpha(\lambda)$, $f = H'(t)+\phi(\lambda)$, $\lambda = z+2q(t)$. После подстановки в уравнения системы (2.17) получаем систему S/H обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\alpha(\lambda)$, $\phi(\lambda)$

$$\alpha'' - 2\phi\alpha' + 2\alpha\phi' = 0, \qquad \phi''' - 2\phi\phi'' + (\phi')^2 + \alpha^2 = 0.$$

Тип 9. Инвариантное решение имеет представление $\alpha = \alpha(t)$, $f = zH(t) + \phi(t)$. После его подстановки в уравнения (2.17) получаем $\alpha' = 2\alpha H'$, $H' = \alpha^2 + H^2$. Новым решением последних уравнений, отличным от типа 7, является (с точностью до сдвига по времени t)

$$\alpha = \frac{c}{c^2t^2 - 1}, \qquad H = -\frac{c^2 t}{c^2t^2 - 1}$$

с некоторой постоянной c.

Тип 10. Инвариантное решение имеет представление $\alpha = t^{-1}P(\lambda)$, $f = H'(t) + t^{-1/2}Q(\lambda)$, $\lambda = t^{-1/2}(z - 2H(t))$. После подстановки в уравнения системы (2.17) получаем систему S/H обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$

$$2P'' + (\lambda - 4Q)P' + 4PQ' + 2P = 0, \quad 2Q''' + (\lambda - 4Q)Q'' + 2(Q')^2 + 2Q' + 2P^2 = 0.$$

4. Групповое расслоение системы (2.17). Бесконечномерная группа, соответствующая оператору Z_h, имеет продолженный оператор $2h\partial_z + h'(t)(\partial_f - 2f_z\partial_{f_t} - 2\alpha_z\partial_{\alpha_t} - 2\beta_z\partial_{\beta_t}) + h''\partial_{f_t}$, где $\beta = f_z$. Универсальный инвариант первого порядка (все вычисления аналогичны проделанным в процессе группового расслоения системы уравнений плоского стационарного пограничного слоя [16]) легко определяется:

$$\underset{1}{J} = (t, \beta, \alpha, \alpha_z, \beta_z, \beta_t + 2f\beta_z,\ \alpha_t + 2f\alpha_z),$$

поэтому AG-система ранга два может быть записана следующим образом:

$$\alpha = \alpha(t,\beta), \quad \alpha_z = \varphi(t,\beta), \quad \beta_z = \gamma(t,\beta), \quad \beta_t + 2f\beta_z = \xi(t,\beta), \quad \alpha_t + 2f\alpha_z = \zeta(t,\beta) \tag{4.1}$$

с неизвестными пока функциями $\alpha(t,\beta)$, $\varphi(t,\beta)$, $\gamma(t,\beta)$, $\xi(t,\beta)$, $\zeta(t,\beta)$. Условия совместности последней системы с исходной системой (2.17) имеют вид

$$\varphi = \gamma\alpha_\beta, \quad \zeta = \gamma\varphi_\beta + 2\alpha\beta, \quad \xi = \gamma\gamma_\beta + \alpha^2 + \beta^2; \tag{4.2}$$

$$\alpha_t + (\alpha^2 + \beta^2)\alpha_\beta - \gamma^2\alpha_{\beta\beta} = 2\alpha\beta, \qquad \gamma_t + (\alpha^2 + \beta^2)\gamma_\beta - \gamma^2\gamma_{\beta\beta} = 2\alpha\gamma\alpha_\beta. \tag{4.3}$$

Таким образом, групповое расслоение системы (2.17) относительно бесконечномерной группы с оператором Z_h есть объединение автоморфной системы (4.1) с функциями (4.2) и разрешающей системы, состоящей из уравнений (4.3).

Замечание 1. Система уравнений (4.1), (4.3) эквивалентна исходной системе (2.17) в предположении, что $f_{zz} \neq 0$. Случай же, когда $f_{zz} = 0$, соответствует изученному ранее инвариантному решению $\alpha = \alpha(t)$, $f = zq(t) + \phi(t)$.

Система уравнений (4.3) допускает только двухпараметрическую группу, соответствующую операторам $T = \partial_t$ и $\bar{R} = t\partial_t - \beta\partial_\beta - \alpha\partial_\alpha - (3/2)\psi\partial_\psi$. Оптимальная система подалгебр алгебры $L_2 = \{T, R\}$ состоит только из трех представителей: L_2, $\{T\}$ и $\{\bar{R}\}$. Инвариантные решения системы (4.3) относительно алгебры L_2 приводят к решениям, соответствующим инвариантным решениям типа 7 для системы (2.17). Инвариантные решения системы (4.3) относительно подалгебры $\{T\}$ приводят к решениям, соответствующим инвариантным решениям типа 9 для системы (2.17). Наконец, инвариантные решения системы (4.3) относительно алгебры $\{\bar{R}\}$ имеют представление $\alpha = t^{-1}A(\lambda)$, $\psi = t^{-3/2}B(\lambda)$ с $\lambda = t\beta$, функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ удовлетворяют системе S/H:

$$B^2A'' - (A^2 + \lambda^2 + \lambda)A' + (1 + 2\lambda)A = 0,$$

$$B^2B'' - (A^2 + \lambda^2 + \lambda)B' + \Big(\frac{3}{2} + AA'\Big)B = 0.$$

Замечание 2. По-видимому, последний тип инвариантных решений системы (4.3) соответствует инвариантным решениям системы (2.17) типа 10, но поиск такого инвариантного решения более предпочтителен, поскольку после нахождения решения разрешающей системы необходимо также построить решение автоморфной системы.

5. Некоторые решения системы (2.12). Здесь приводятся некоторые частные решения системы (2.12), а следовательно, некоторые решения трехмерных уравнений Навье — Стокса из указанного класса частично инвариантных решений.

В качестве одного из примеров рассмотрим решения вида $\varphi = s(t, z)g(\eta)$ (интересен случай, когда $g \neq \text{const}$). После подстановки такого представления решения в последнее уравнение (2.12) возникает соотношение

$$-(k^2 + 1)g'' + (\lambda - \eta(\alpha + f_z))g' + ag = 0, \tag{5.1}$$

где $a = s^{-1}(s_t + 2fs_z - s_{zz} + (\alpha - f_z)s)$. В результате дифференцирования уравнения (5.1) по t и z получаем следствия

$$(\lambda_t - \eta(\alpha + f_z)_t)g' + a_t g = 0, \qquad (\lambda_z - \eta(\alpha + f_z)_z)g' + a_z g = 0. \tag{5.2}$$

Поскольку $g \neq 0$, то определитель в последней системе, рассматриваемой как система линейных уравнений относительно g и g', равен нулю, что приводит к условиям $\lambda_t a_z - \lambda_z a_t = 0$, $(\alpha + f_z)_t a_z - (\alpha + f_z)_z a_t = 0$.

Если $a = \text{const}$, то из уравнений (5.2) находим $\lambda = \text{const}$, $\alpha + f_z = \text{const}$. Однако первое и второе уравнения системы (2.12) дают $\alpha = -f_z$. Тогда уравнение (5.1) будет обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка для $g(\eta)$ с постоянными коэффициентами:

$$-(k^2 + 1)g'' + \lambda g' + ag = 0. \tag{5.3}$$

Тем самым определяется решение системы уравнений (2.12) заданного вида, а именно $\alpha = -f_z$, λ — произвольная постоянная, функция $g(\eta)$ находится из решения уравнения (5.3), функции $f(t, z)$ и $s(t, z)$ должны удовлетворять уравнениям $f_{tz} + 2ff_{zz} - f_{zzz} = 0$, $s_t + 2fs_z - s_{zz} - (2f_z + a)s = 0$, где a — произвольная постоянная.

Случай $a \neq \text{const}$ имеется только для $g = \exp(-c\eta)$, $\alpha = -f_z$, $\lambda = ac^{-1} - c(k^2 + 1)$ с произвольной постоянной $c \neq 0$. При этом функции $a(t, z)$, $f(t, z)$ и $s(t, z)$ должны удовлетворять рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$f_{tz} + 2ff_{zz} - f_{zzz} = 0, \qquad a_t + 2fa_z - a_{zz} = 0, \qquad s_t + 2fs_z - s_{zz} - (2f_z + a)s = 0.$$

Замечание 3. Возможны и другие типы решений системы (2.12) с разделяющимися переменными. Например, анализ решений вида $\varphi = s(t,\eta) \neq 0$ показывает, что они допускаются только в случаях, когда решение для первых двух уравнений (система (2.17)) является инвариантным решением типа 7 или 9.

Замечание 4. Последнее уравнение системы (2.12) является линейным и, кроме того, единственным из уравнений указанной системы, содержащим три независимых переменных. Нетрудно видеть, что среди решений $\varphi(\eta,z,t)$ данного уравнения, в котором функции f, α и λ переменных z, t считаются известными, содержатся полиномы любой степени относительно переменной η. Коэффициенты $\varphi_j(z,t)$ этих полиномов подчиняются рекуррентной системе параболических уравнений, которая здесь не приводится.

6. Интерпретация рассмотренных частично инвариантных решений. Покажем, что решения, описанные в п. **2**, можно интерпретировать как движения с плоской свободной границей $z = l(t)$, где функция l подлежит определению вместе с функциями u, v, w, p.

Прежде всего заметим, что функция $p(z,t)$ при известном $f(z,t)$ восстанавливается квадратурой с точностью до аддитивной функции $\chi(t)$. Ввиду произвольности χ всегда можно удовлетворить динамическому условию для нормального напряжения на свободной поверхности $-p + 2\partial w/\partial z = 0$ при $z = l(t)$, после того как функции $w = 2f$ и l будут найдены.

Кинематическое условие на свободной границе имеет вид $dl/dt = 2f[l(t),t]$, а условия отсутствия касательных напряжений, первоначально формулируемые в терминах функций u, v, w, приводят к равенствам

$$\psi_{yz} - xf_{zz} = 0, \qquad \psi_{xz} + yf_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = l(t). \tag{6.1}$$

Расщепление последних соотношений по переменным x, y формирует краевые условия для функций, входящих в систему (2.12). Например, в варианте 1.1 из п. **2** соотношения (6.1) удовлетворяются тождественно по x, y, если выполнены условия $\alpha_z = f_{zz} = \lambda_z = \varphi_z = 0$ при $z = l(t)$. Пусть вторая поверхность, ограничивающая жидкость, является плоскостью $z = 0$. Если потребовать выполнения равенств

$$\alpha = f = f_z = \lambda = \varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{6.2}$$

то на этой плоскости будут удовлетворяться условия прилипания, и ее можно отождествить с неподвижной твердой границей.

Возможны и другие интерпретации решений, соответствующих варианту 1.1 из п. **2**, который рассматривался для определенности. В частности, если условия (6.2) для функций λ,φ заменить на неоднородные $\lambda + k\varphi = \sigma(t)$, $-\varphi = \tau(t)$ при $z = 0$ (σ и τ — произвольные функции t), то условия прилипания будут выполняться на твердой плоскости $z = 0$, движущейся поступательно со скоростью $\boldsymbol{V} = (\sigma,\tau)$. Кроме того, вторая плоскость, ограничивающая жидкий слой, также может быть движущейся свободной границей $z = m(t)$.

Замечание 5. Система (2.12) допускает частные решения, в которых $\alpha = f_z$, $\lambda = \varphi = 0$. Им отвечают плоские движения жидкости, которые, в частности, описывают процесс симметричной деформации вязкой полосы $|z| < l(t)$, границы которой свободны. Его исследованию посвящены работы [5, 10, 11].

Замечание 6. Выше рассмотрен лишь гиперболический случай уравнения Монжа — Ампера (2.3). Между тем это уравнение оказывается совместным с системой (2.2) и в эллиптическом случае, если предположить, что ψ есть квадратичный полином по переменным x, y. Среди полученных на этом пути частично инвариантных решений системы (1.1) имеются и такие, которые описывают растекание слоя вязкой жидкости со свободной границей

$z = l(t)$ на плоскости $z = 0$, вращающейся вокруг оси z с заданной угловой скоростью $\Omega(t)$. Эта задача изучена в [5, 8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бытев В. О.** Групповые свойства уравнений Навье — Стокса // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1972. Т. 3, № 3. С. 13–17.
2. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1994.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Karman Th.** Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. Bd 1, N 4. S. 233–252.
5. **Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично инвариантными решениями уравнений Навье — Стокса // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 10. С. 125–137.
6. **Овсянников Л. В.** Частичная инвариантность // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 1. С. 22–25.
7. **Сидоров А. Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34–40.
8. **Лаврентьева О. М.** Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.
9. **Лаврентьева О. М., Волкова Г. Б.** Предельные режимы растекания слоя на вращающейся плоскости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 68–77.
10. **Pukhnachov V. V.** Non-stationary viscous flows with a cylindrical free surface // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 1998. V. 35. Topics in Nonlinear Analysis: The Herbert Amann Anniversary Volume. P. 553–569.
11. **Galaktionov V. A., Vazquez J. L.** Blow-up of a class of solutions with free boundary for the Navier–Stokes equations // Advances in Differential Equations (in press).
12. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
13. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
14. **Гурса Э.** Курс математического анализа. М.; Л.: ОНТИ, 1933.
15. **Hearn A. C.** REDUCE Users Manual. Ver. 3.3. Santa Monica: The Rand Corp. CP 78, 1987.
16. **Овсянников Л. В.** Групповое расслоение уравнений пограничного слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 1. С. 24–35.

Поступила в редакцию 25/VI 1998 г.