УДК 532.591+532.517

СЛОЙ СМЕШЕНИЯ В ДВУХСЛОЙНЫХ СПУТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru

Предложены две нелинейные модели, описывающие в длинноволновом приближении формирование и эволюцию слоя смешения между двумя сонаправленными потоками стратифицированной жидкости в рамках трехслойного представления течения. Обе модели имеют близкую структуру, и в приближении Буссинеска уравнения движения единообразно записываются в виде системы неоднородных законов сохранения. Определены скорости распространения возмущений и сформулированы понятия докритического (сверхкритического) течения. Построены непрерывные и разрывные решения моделей. Показано, что при достаточно большой разности скоростей сонаправленных потоков стационарный слой смешения монотонно расширяется, при этом реализуется режим максимального вовлечения. При уменьшении начальной разности скоростей спутных потоков формируется осциллирующее стационарное решение и структура слоя смешения принимает волновой характер. Для одного из режимов течения проведено сравнение полученных решений с экспериментальными данными.

Ключевые слова: слой смешения, мелкая вода, внутренние волны, приближение Буссинеска.

DOI: 10.15372/PMTF20220614

Введение. Обусловленные сдвиговой неустойчивостью процессы перемешивания характерны для широко распространенных в природе гравитационных течений, формирующихся под действием силы тяжести и перепада плотности и зависящих от топографических особенностей [1]. При моделировании сдвиговых течений, таких как приповерхностная (придонная) струя или слой смешения, большое значение имеет исследование процесса возникновения турбулентности в устойчиво стратифицированном потоке. Классическая задача формирования слоя смешения в двухслойных сдвиговых течениях рассмотрена в работе [2], в которой выполнены экспериментальные измерения скорости турбулентного перемешивания в двухслойном стратифицированном течении смешивающихся жидкостей. Влияние устойчивой стратификации на процессы перемешивания в ближней и дальней зонах исследовано в [3]. Эксперименты по изучению турбулентного перемешивания в гравитационных течениях и измерению степени вовлечения окружающей жидкости в плотностной поток проводились в работах [4, 5]. Число Ричардсона турбулентного слоя смешения увеличивается в процессе вовлечения жидкости, что в итоге может подавить этот процесс. Аналитическое решение осредненной по глубине модели, учитывающей это свойство течения, построено в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-11-20189).

Обтекание стратифицированным потоком препятствия достаточно большой высоты приводит к генерации внутренних волн и боров конечной амплитуды. В этом случае сдвиг скорости определяется рельефом поверхности, как это происходит в природных приливных русловых потоках [7, 8]. Подобные явления воспроизводятся в лабораторных экспериментах [9, 10], что позволяет исследовать особенности сдвиговой неустойчивости в нисходящих потоках на подветренной стороне препятствия. Слоистые модели стратифицированных течений над донной поверхностью с учетом турбулентного перемешивания и вовлечения окружающей жидкости рассмотрены и применены для моделирования подводных лавин [11]. Одним из возможных механизмов перемешивания в плотностных течениях является внутренний турбулентный гидравлический прыжок. Для двухслойных и непрерывно стратифицированных сдвиговых течений модели гидравлических прыжков предложены и исследованы в [12, 13]. Численное моделирование двухслойных внутренних гидравлических прыжков в спутных стратифицированных потоках проведено в [14]. Увеличение сдвига скорости в спутном потоке приводит к тому, что физически непротиворечивые решения в рамках двухслойного описания перестают существовать. Модификация двухслойной теории с учетом вовлечения позволяет расширить возможности применения модели и согласовать результаты с результатами прямого численного моделирования [15].

В данной работе предложены две близкие по структуре длинноволновые модели слоя смешения, формирующегося в двухслойном стратифицированном течении вследствие развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В приближении Буссинеска модели допускают единообразную формулировку в виде неоднородных законов сохранения. Вывод этих моделей, основанный на трехслойном представлении течения и процедуре осреднения двумерных уравнений Эйлера идеальной неоднородной жидкости, в настоящей работе не приводится. Построение аналогичных слоистых моделей с массообменом подробно описано в работах [16–19]. Консервативная форма уравнений движения позволяет строить разрывные решения, моделирующие внутренние гидравлические прыжки. При наличии вещественных характеристик рассматриваемых моделей можно ввести определения сверхкритического и докритического течений. Основное внимание в работе уделяется изучению стационарных решений и их сравнению в рамках предложенных моделей. Показано, что при достаточно большой разности скоростей спутных потоков формируется стационарный монотонный слой смешения. На определенном расстоянии от начальной точки взаимодействия потоков достигается режим максимального вовлечения, течение становится критическим и переходит в нестационарный режим. При уменьшении сдвига скорости спутных потоков формируется волновой слой смешения, описываемый с помощью затухающего осциллирующего решения. Такой стационарный режим течения реализуется как в непрерывном сверхкритическом течении, так и в докритическом потоке за фронтом гидравлического прыжка.

1. Уравнения движения. Рассматривается плоскопараллельное движение стратифицированной жидкости в поле силы тяжести в приближении теории длинных волн. Предполагается, что поток, ограниченный непроницаемыми поверхностями $z = Z(t,x)$ и $z = H_0 = \mathrm{const}$, имеет трехслойную структуру (рис. 1). Внешние слои являются однородными, а течение в них потенциальным. Промежуточный слой неоднороден по плотности, и течение в нем вихревое. Такая структура потока представляется естественной при моделировании слоя смешения, формирующегося вследствие развития неустойчивости границы раздела двух однородных слоев, движущихся с различными скоростями. Осредненные по глубине уравнения трехслойного течения с учетом турбулентного перемешивания в приближении Буссинеска имеют вид

$$h_t + (uh)_x = -\sigma q, \qquad \eta_t + (v\eta)_x = 2\sigma q, \qquad \zeta_t + (w\zeta)_x = -\sigma q,$$
$$u_t + \left(u^2/2 + bh + \bar{b}\eta + p^*\right)_x = -bZ_x, \qquad w_t + \left(w^2/2 + p^*\right)_x = 0,$$

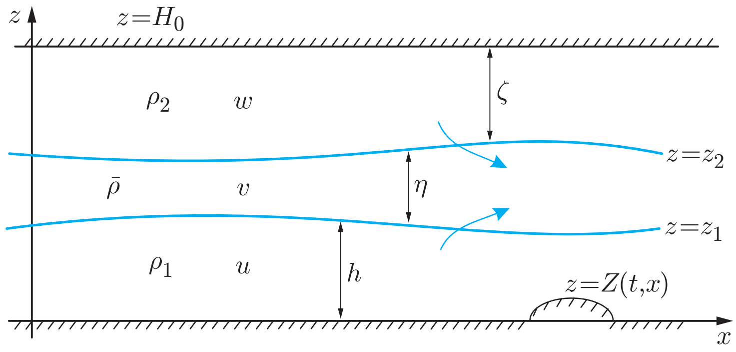

Рис. 1. Схема трехслойного стратифицированного течения с перемешиванием

$$
\begin{gathered}
Q_t + \big(u^2h + (v^2 + kq^2)\eta + w^2\zeta + bh^2/2 + \bar b h\eta + \bar b\eta^2/2 + Hp^*\big)_x = -(bh + \bar b\eta + p^*)Z_x, \\
(\bar b\eta)_t + (v\bar b\eta)_x = b\sigma q, \\
\Big(\frac{u^2h}{2} + \frac{(v^2+q^2)\eta}{2} + \frac{w^2\zeta}{2} + \frac{bh^2}{2} + \bar b h\eta + \frac{\bar b\eta^2}{2}\Big)_t + \Big(\frac{u^3h}{2} + (v^2 + (1+2k)q^2)\,\frac{v\eta}{2} + {} \\
{} + \frac{w^3\zeta}{2} + (bh + \bar b\eta)uh + v\bar b\eta(h+\eta) + p^*Q\Big)_x = pZ_t - (ubh + v\bar b\eta)Z_x - \frac{\sigma\varkappa}{2}\,|q|^3,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где x, t — пространственная координата и время; h, ζ, η — толщины нижнего, верхнего и промежуточного слоев; u, w, v — средние скорости жидкости в слоях; q — средняя скорость “больших вихрей” в промежуточном слое; $H = h + \eta + \zeta$ и $Q = uh + v\eta + w\zeta$ — полная толщина слоя и расход жидкости. Плавучести b и $\bar b$ определяются следующим образом:

$$
b = (\rho_1 - \rho_2)g/\rho_2 > 0, \qquad \bar b = (\bar\rho - \rho_2)g/\rho_2 > 0.
$$

Здесь g — ускорение свободного падения; постоянные ρ_1, ρ_2 — плотность жидкости в нижнем и верхнем слоях; $\bar\rho(t,x)$ — средняя плотность в промежуточном слое. Давление на верхней крышке канала равно $\rho_2 p^*$. Постоянные σ и $\varkappa$ определяют скорость вовлечения жидкости из внешних слоев в прослойку и диссипацию энергии.

В зависимости от способа осреднения при моделировании “больших вихрей” в прослойке возникают две близкие по структуре и допускающие единообразное представление модели, различающиеся значением коэффициента k, равным нулю (модель I) или единице (модель II). Вывод аналогичных моделей трехслойных течений путем осреднения двумерных уравнений движения для однородных по плотности течений жидкости со свободной границей и в ячейке Хеле-Шоу обсуждается в [17, 18]. Особенности учета стратификации при описании осредненного течения в вихревом слое рассмотрены в [19], поэтому в данной работе не приводятся громоздкие вычисления и оценки, необходимые для получения моделей I и II из двумерных уравнений, описывающих движение идеальной неоднородной несжимаемой жидкости в длинноволновом приближении.

Из очевидного равенства $H = H_0 - Z$ и первых трех уравнений (1) следует, что $Q_x = Z_t$. С учетом этого уравнения и граничных условий во входном сечении канала полный расход Q можно считать известной функцией. Таким образом, система (1) для определения искомых функций h, η, ζ, u, v, w, q, $\bar b$ и p^* является замкнутой.

Для анализа уравнений (1) и проведения расчетов удобно использовать дифференциальные следствия

$$
\begin{gathered}
v_t + vv_x + 2kqq_x + \bar b h_x + \Big(\bar b + \frac{kq^2}{\eta}\Big)\eta_x + \frac{\eta}{2}\,\bar b_x + p^*_x = -\bar b Z_x + \frac{\sigma q}{\eta}\,(u + w - 2v), \\
q_t + vq_x + kqv_x = \varphi, \qquad \varphi = \frac{\sigma}{2\eta}\big((u-v)^2 + (w-v)^2 - (2 + \varkappa\,\mathrm{sign}\,(q))q^2 - b\eta\big).
\end{gathered} \tag{2}
$$

При $k = 1$ второе уравнение (2) имеет дивергентный вид. В случае $k = 0$ его также можно представить в виде неоднородного закона сохранения

$$(q\eta)_t + (vq\eta)_x = 2\sigma q^2 + \eta\varphi.$$

В классе гладких решений уравнение энергии (последнее соотношение в системе (1)) можно заменить дифференциальным следствием для переменной q или $q\eta$. При рассмотрении разрывных течений требуются дополнительный анализ и сопоставление решений.

Использование переменных $r = u - w$ и $R = Q - wH$ позволяет упростить систему уравнений (1) и привести ее к удобному виду для проведения нестационарных расчетов. В обоих случаях ($k = 0$ и $k = 1$) для определения вектора искомых функций $\boldsymbol{U} = (h, \eta, r, R, \bar{b}, q)^{\mathrm{T}}$ получаем замкнутую систему шести неоднородных законов сохранения

$$\begin{gathered}
h_t + (uh)_x = -\sigma q, \qquad \eta_t + (v\eta)_x = 2\sigma q, \qquad r_t + \Big(\frac{u^2 - w^2}{2} + bh + \bar{b}\eta\Big)_x = -bZ_x, \\
R_t + \Big(u^2 h + (v^2 + kq^2)\eta + w^2\Big(\zeta - \frac{H}{2}\Big) + \frac{bh^2}{2} + \bar{b}h\eta + \frac{\bar{b}\eta^2}{2}\Big)_x = wZ_t + \Big(\frac{w^2}{2} - bh - \bar{b}\eta\Big)Z_x, \\
(\bar{b}\eta)_t + (v\bar{b}\eta)_x = b\sigma q, \\
(\eta^{1-k} q)_t + (\eta^{1-k} vq)_x = \eta^{1-k}\varphi + 2(1-k)\sigma q^2,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $H = H_0 - Z$; $\zeta = H - h - \eta$; скорости жидкости в слоях определяются из формул

$$w = \frac{Q - R}{H}, \qquad u = r + w, \qquad v = \frac{R - rh}{\eta} + w.$$

Вместо последнего уравнения (3) можно использовать уравнение энергии, исключив из него переменную p^*. Для этого пятое уравнение системы (1) следует умножить на Q и вычесть из последнего уравнения этой системы. Ниже показано, что замена закона сохранения энергии его дифференциальным следствием не приводит к качественным различиям при построении разрывных решений.

Для нахождения скоростей характеристик запишем систему (3) в векторной форме $\boldsymbol{U}_t + A\boldsymbol{U}_x = \boldsymbol{F}$ и найдем собственные значения λ матрицы A. Очевидно, что в силу выполнения равенств

$$\bar{b}_t + v\bar{b}_x = \frac{\sigma q}{\eta}\,(b - 2\bar{b}), \qquad (\eta^{-k} q)_t + v(\eta^{-k} q)_x = \eta^{-k}\varphi - \frac{2k\sigma q^2}{\eta^2} \quad (k = 0; 1)$$

уравнения (3) имеют контактную характеристику $dx/dt = v$ кратности два. Остальные скорости характеристик λ находятся из полиномиального уравнения четвертого порядка

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) = \big((u-\lambda)^2 - (b - \bar{b})h\big)\big((w-\lambda)^2 - \bar{b}\zeta\big)\eta + {}\\
+ \big((v-\lambda)^2 - 3kq^2\big)\Big(\big((u-\lambda)^2 - (b-\bar{b})h\big)\zeta + \big((w-\lambda)^2 - \bar{b}\zeta\big)h\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Сформулировать условия гиперболичности системы (3) затруднительно, однако можно показать, что в случае малого сдвига скорости в слоях $u \approx v \approx w$ все корни характеристического уравнения (4) являются вещественными. Течение будем называть сверхкритическим, если все вещественные скорости характеристик положительны. Если имеется хотя бы одна отрицательная скорость характеристики, то течение является докритическим.

2. Стационарные решения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений определяет класс стационарных решений модели I ($k = 0$) и модели II ($k = 1$)

$$\bar{b}' = \frac{\sigma q}{v\eta}\,(b - 2\bar{b}), \qquad vq' + kqv' = \varphi, \qquad (uh)' = -\sigma q,$$

$$(v\eta)' = 2\sigma q, \qquad \Big(\frac{u^2 - w^2}{2} + bh + \bar{b}\eta\Big)' = -bZ', \tag{5}$$
$$vv' - ww' + 2kqq' + \bar{b}h' + \Big(\bar{b} + \frac{kq^2}{\eta}\Big)\eta' + \frac{\eta}{2}\,\bar{b}' = \frac{\sigma q}{\eta}\,(u + w - 2v) - \bar{b}Z'$$

(штрих означает дифференцирование по x; функция φ определена последней формулой (2)). В силу условия $H = H_0 - Z$ и постоянства полного расхода Q имеем

$$\zeta = H_0 - Z - h - \eta, \qquad w = (Q - uh - v\eta)/\zeta. \tag{6}$$

Заметим, что уравнения (3) инвариантны относительно преобразования Галилея для течений над ровным дном $Z = 0$ при постоянстве расхода $Q = \text{const}$. В этом случае решения в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\zeta = x - Dt$, $D = \text{const}$) эквивалентны стационарным решениям.

Систему (5) приведем к разрешенному относительно производных виду. В результате простых, но громоздких вычислений получаем

$$\begin{gathered}\bar{b}' = \frac{\sigma q}{v\eta}\,(b - 2\bar{b}), \qquad q' = \frac{\varphi - kqv'}{v}, \qquad u' = -\frac{uh' + \sigma q}{h},\\ v' = \frac{2\sigma q - v\eta'}{\eta}, \qquad \eta' = \frac{C_1 - A_1h'}{A_2}, \qquad h' = \frac{B_2C_1 - A_2C_2}{A_1B_2 - A_2^2},\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$A_1 = \frac{u^2}{h} + \frac{w^2}{\zeta} - b, \qquad A_2 = \frac{w^2}{\zeta} - \bar{b}, \qquad B_2 = \frac{v^2 - 3kq^2}{\eta} + A_2,$$
$$C_1 = \eta\bar{b}' - \sigma q\Big(\frac{u}{h} - \frac{w}{\zeta}\Big) - \Big(\frac{w^2}{\zeta} - b\Big)Z',$$
$$C_2 = \frac{\eta\bar{b}'}{2} + \sigma q\Big(\frac{w}{\zeta} - \frac{u + w - 4v}{\eta}\Big) + \frac{2kq}{v}\Big(\varphi - \frac{2\sigma q^2}{\eta}\Big) - A_2Z'.$$

Заметим, что $\chi(0) = (A_1B_2 - A_2^2)h\eta\zeta$, поэтому из обращения в нуль знаменателя правой части последнего уравнения (7) следует, что $\lambda = 0$ является корнем характеристического полинома (4).

2.1. *Начальный участок слоя смешения.* Для построения решения задачи о формировании слоя смешения вследствие неустойчивости границы раздела двухслойного течения необходимо определить значения $\bar{b}$, v, q при $\eta \to 0$ по заданным величинам h_0, ζ_0, u_0, w_0. Индекс “0” соответствует значениям функций при $\eta = 0$, т. е. в точке формирования слоя смешения $x = x_0$. Для модели I ($k = 0$) из уравнений (5) следует

$$\bar{b}_0 = \frac{b}{2}, \qquad v_0 = \frac{u_0 + w_0}{2}, \qquad q_0 = \frac{|u_0 - w_0|}{\sqrt{2(2 + \varkappa)}}\,. \tag{8}$$

В случае модели II ($k = 1$) значение $\bar{b}_0$ также равно $b/2$, v_0 определяется из квадратного уравнения, после чего находится q_0:

$$v_0^2 - \frac{(6 + \varkappa)(u_0 + w_0)}{2(4 + \varkappa)}\,v_0 + \frac{u_0^2 + w_0^2}{4 + \varkappa} = 0, \qquad q_0 = \sqrt{(u_0 + w_0 - 2v_0)\,\frac{v_0}{2}}\,. \tag{9}$$

При небольшом различии скоростей $|u_0 - w_0|$ и неотрицательном параметре $\varkappa$ квадратное уравнение имеет единственный корень v_0, лежащий в интервале между u_0 и w_0. Таким образом, применение модели II для описания начального участка слоя смешения имеет ограничения, отсутствующие для модели I.

2.2. *Соотношения на разрыве.* Следующие из законов сохранения (3) условия Гюгонио для стационарного скачка имеют вид

$$[Q_1] = 0, \quad [Q_m] = 0, \quad [J] = 0, \quad [W] = 0, \quad [\bar{b}v\eta] = 0, \quad [G] = 0, \tag{10}$$

где

$$Q_1 = uh, \quad Q_m = v\eta, \quad J = (u^2 - w^2)/2 + bh + \bar{b}\eta, \quad G = \eta^{1-k}vq,$$
$$W = u^2h + (v^2 + kq^2)\eta + (\zeta - H/2)w^2 + bh^2/2 + (h + \eta/2)\bar{b}\eta.$$

Квадратные скобки означают разность предельных значений функции f на разрыве $x = x_s$: $[f] = f^+ - f^-$ ($f^\pm$ — предельные значения f при $x \to x_s \pm 0$). Переменные ζ и w определяются формулами (6). Последнее уравнение системы (3) является дифференциальным следствием закона сохранения энергии. Для разрывных решений такая замена неэквивалентна, поэтому наряду с (10) рассмотрим соотношения на разрыве

$$[Q_1] = 0, \quad [Q_m] = 0, \quad [J] = 0, \quad [W] = 0, \quad [\bar{b}v\eta] = 0, \quad [E] = 0, \tag{11}$$

вытекающие из исходных уравнений (1), где

$$E = \frac{u^3h}{2} + (v^2 + (1 + 2k)q^2)\,\frac{v\eta}{2} + \frac{(w\zeta - Q)w^2}{2} + (bh + \bar{b}\eta)uh + (h + \eta)\eta v\bar{b}.$$

Очевидно, что полная толщина H и расход Q непрерывны. Кроме того, в силу второго и пятого уравнений (10) плавучесть $\bar{b}$ сохраняет непрерывность на разрыве.

Пусть параметры потока $\boldsymbol{U}^-$ перед разрывом известны. Тогда можно вычислить Q_1, Q_m, J, W, G (либо E), а также $Q_2 = w\zeta$. Скорости жидкости в слоях за разрывом выражаются через значения толщин слоев:

$$u^+ = \frac{Q_1}{h^+}, \quad v^+ = \frac{Q_m}{\eta^+}, \quad w^+ = \frac{Q_2}{\zeta^+} \qquad (\zeta^+ = H - h^+ - \eta^+).$$

Подставляя эти выражения в соотношения $[J] = 0$, $[W] = 0$, получаем систему двух алгебраических уравнений для определения h^+ и η^+:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\Big(\frac{Q_1^2}{(h^+)^2} - \frac{Q_2^2}{(\zeta^+)^2}\Big) + bh^+ + \bar{b}\eta^+ = J, \\ \frac{Q_1^2}{h^+} + \frac{Q_m^2}{\eta^+} + \Big(1 - \frac{H}{2\zeta^+}\Big)\frac{Q_2^2}{\zeta^+} + \frac{b}{2}\,(h^+)^2 + \Big(h^+ + \frac{\eta^+}{2}\Big)\bar{b}\eta + k(q^+)^2\eta^+ = W. \end{gathered} \tag{12}$$

При использовании модели II ($k = 1$) величину q^+ следует выразить через h^+ и η^+ из уравнения $[G] = 0$ (или $[E] = 0$) и подставить во второе уравнение (12). После нахождения толщин слоев за скачком h^+ и η^+ восстанавливаются скорости u^+, v^+, w^+ и переменная q^+.

Заметим, что для модели I из уравнений (10) следует сохранение переменной q на разрыве: $[q] = 0$. При этом замена последнего уравнения (10) соотношением $[E] = 0$ не оказывает влияния на толщину слоев и скорость жидкости в них за разрывом, но при таком выборе условий на разрыве $[q] \neq 0$.

3. Структура слоя смешения в моделях I и II. Классическая постановка задачи о развитии слоя смешения над ровным дном ($Z = 0$) состоит в том, что на левой границе области течения $x = 0$ заданы два равномерных потока, движущихся с различными скоростями. Потоки начинают взаимодействовать в области $x > 0$, что приводит к формированию промежуточного слоя смешения. Пусть h_0, $\zeta_0 = H - h_0$ — начальные толщины, а u_0, w_0 — скорости нижнего и верхнего слоев, b — постоянная плавучесть в нижнем слое. Из первой формулы (8) и первого уравнения (7) следует, что $\bar{b} = b/2$ всюду в области $x > 0$. Рассматриваемые начальные данные соответствуют течению с контактным разрывом, которое является неустойчивым в случае использования уравнений Эйлера. Разрушение контактного разрыва происходит вследствие развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца на границе раздела движущихся слоев, а осредненные уравнения (1) описывают нелинейную стадию развития этой неустойчивости. В работе [16] модель I применялась для описания слоя смешения в течении тяжелой жидкости из-под щита ($w_0 = 0$) в затопленное пространство ($H \to \infty$). Ниже показано, что учет движения жидкости в двух слоях ($u_0 > 0$, $w_0 > 0$) приводит к принципиально новым колебательным режимам течения в задаче о развитии слоя смешения. В данной работе, ограничившись случаем $h_0 \ll H_0$, исследуем влияние начальной разности скоростей во взаимодействующих слоях на изменение структуры слоя смешения.

Представленные выше модели слоя смешения содержат два неотрицательных эмпирических параметра σ и $\varkappa$. Поскольку параметр σ, определяющий интенсивность массообмена между слоями, можно исключить из уравнений (1) (или следующих из них систем (3), (7)) путем преобразования растяжения независимых переменных, он является несущественным при рассмотрении структуры слоя смешения для течения над ровным дном. Параметр $\varkappa$ определяет скорость диссипации энергии вихрей, осуществляющих вертикальный перенос массы и импульса в сдвиговом течении. Как показывают результаты численных экспериментов, выбор параметра $\varkappa$ из интервала $(2, 10)$ слабо влияет на структуру слоя смешения. Поэтому основное влияние оказывает сдвиг горизонтальной скорости в стратифицированном потоке. Если безразмерные переменные выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства $h_0 = 1$ и $b = 1$, то при фиксированных значениях σ и $\varkappa$ решение задачи о слое смешения над ровным дном будет зависеть от следующих безразмерных параметров:

$$Y = \frac{H_0}{h_0}, \qquad U = \frac{w_0}{u_0}, \qquad \mathrm{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{bh_0}}.$$

Далее будем полагать $\sigma = 0{,}15$, $\varkappa = 6$, значение Y выбираем достаточно большим ($Y \sim 10$), $\mathrm{Fr} > 1$, $0 \leqslant U < 1$. Покажем, что существенное различие в структуре слоя смешения наблюдается при изменении параметра U.

3.1. *Монотонный слой смешения.* Покажем для модели I, что при фиксированных Y, Fr, u_0 существует критическое значение w_*, разделяющее различные режимы течения при $0 < w_0 < w_*$ и $w_* < w_0 < u_0$. Как указывалось выше, на начальном участке слоя смешения модель II имеет ограничения, следующие из уравнения (9). Поэтому при больших значениях параметра $U^{-1} = u_0/w_0$ выбор модели I является предпочтительным. В случае стационарных течений над ровным дном в рамках модели I система (5) имеет следующий набор интегралов:

$$\begin{gathered} uh + \frac{v\eta}{2} = u_0 h_0, \qquad \frac{u^2 - w^2}{2} + b\Big(h + \frac{\eta}{2}\Big) = \frac{u_0^2 - w_0^2}{2} + bh_0 \equiv J_0, \\ u^2 h + v^2 \eta + w^2\Big(\frac{H}{2} - h - \eta\Big) + \frac{b}{2}\Big(h^2 + h\eta + \frac{\eta^2}{2}\Big) = u_0^2 h_0 + w_0^2\Big(\frac{H}{2} - h_0\Big) + \frac{bh_0^2}{2}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $w = (uh - \delta)/\zeta$; $\zeta = H - h - \eta$; $\delta = u_0 h_0 - w_0 \zeta_0$; $\bar{b} = b/2$. Из первых двух уравнений (13) выразим u и v:

$$u = \sqrt{\Big(\frac{h\delta}{\zeta^2 - h^2}\Big)^2 - \frac{2\zeta^2}{\zeta^2 - h^2}\Big(\Big(h + \frac{\eta}{2}\Big)b - \frac{\delta^2}{2\zeta^2} - J_0\Big)} - \frac{h\delta}{\zeta^2 - h^2}, \qquad v = \frac{2}{\eta}\,(u_0 h_0 - uh).$$

Подставляя эти соотношения в последнее уравнение (13), получаем зависимость вида $F(h, \eta) = 0$. Поэтому стационарные решения задачи о слое смешения для модели I описываются некоторой кривой в плоскости (h, η). Для интерпретации решений эту кривую, со-

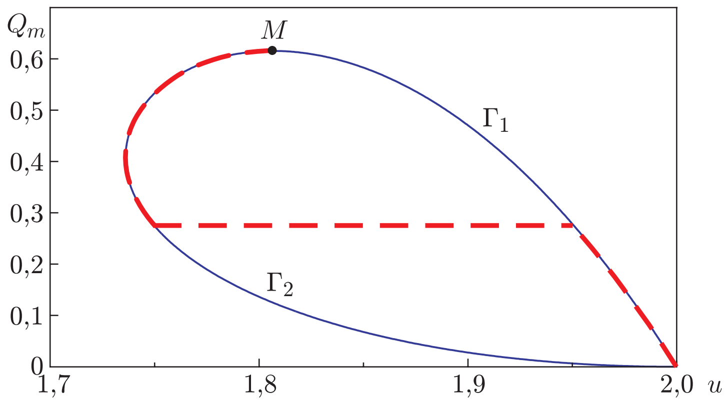

Рис. 2. Интегральные кривые системы (7) при $k = 0$ в плоскости (u, Q_m), соответствующие решению задачи о слое смешения ($H_0 = 10$, $u_0 = 2$, $w_0 = 0{,}1$): верхняя ветвь Γ_1 — сверхкритическое решение, нижняя ветвь Γ_2 — докритическое; штриховая линия — решение с разрывом ($x_s = 2$)

стоящую из двух ветвей, удобно представить в плоскости (u, Q_m), где $Q_m = v\eta$. Ветвь Γ_1 соответствует сверхкритическому течению, ветвь Γ_2 — докритическому. Характерный вид этих кривых показан на рис. 2 для $H_0 = 10$, $u_0 = 2$, $w_0 = 0{,}1$ в начальной точке слоя смешения $x = 0$ (как указано выше, $h_0 = 1$, $b = 1$). При слиянии кривых Γ_1 и Γ_2 в точке M переменная Q_m достигает максимума, что соответствует режиму максимального вовлечения [3]. В точке M выполняется условие критичности потока, т. е. $\chi(0) = 0$. Режим максимального вовлечения может быть реализован в непрерывном сверхкритическом течении. Если $w_0 < w_* \approx 0{,}53$, вдоль ветви Γ_1 переменная $q > 0$ и слой смешения расширяется. При этом $\chi(0) > 0$ всюду, за исключением точки M, в которой течение становится критическим: $\chi(0) = 0$. Для параметров потока, соответствующих рис. 2, режим максимального вовлечения достигается при $x = x_M \approx 4{,}80$. В области $x > x_M$ непрерывного стационарного решения не существует, так как знаменатель последнего уравнения (7) обращается в нуль. При $w_0 > w_*$ величина q меняет знак на Γ_1 и в слое смешения реализуется сверхкритический колебательный режим течения, который рассматривается ниже.

Еще одна конфигурация течения реализуется в случае, если в слое смешения возникает гидравлический прыжок. В силу условий на разрыве (10) имеем $[Q_m] = 0$. Поэтому на плоскости (u, Q_m) переход со сверхкритической кривой Γ_1 на докритическую кривую Γ_2 осуществляется при постоянном значении Q_m. На рис. 2 штриховой линией показано решение с сильным разрывом в точке $x = x_s = 2$. В докритическом течении вдоль Γ_2 также может быть реализован режим максимального вовлечения. Как указывалось выше, стационарное решение над ровным дном ($Z = 0$) невозможно продолжить в область $x > x_M$, если $q > 0$ в точке M.

Для построенных решений с заданными при $x = 0$ скоростями $u_0 = 2$ и $w_0 = 0{,}1$ ($h_0 = 1$, $H_0 = 10$, $b = 1$) характеристический полином (4) имеет два вещественных и два комплексных корня. При выполнении условия $\chi(0) > 0$ оба вещественных характеристических корня являются положительными и соответствующее течение называется сверхкритическим. В случае $\chi(0) < 0$ вещественные корни полинома (4) имеют разные знаки. Такое течение называется докритическим. Представляется естественным, что при достаточно большой разности скоростей жидкости в слоях система (3) не является гиперболической, так как именно развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца на границе слоев определяет механизм перемешивания. Однако наличие вещественных звуковых характеристик дает возможность моделировать эволюцию слоя смешения с помощью уравнений (3).

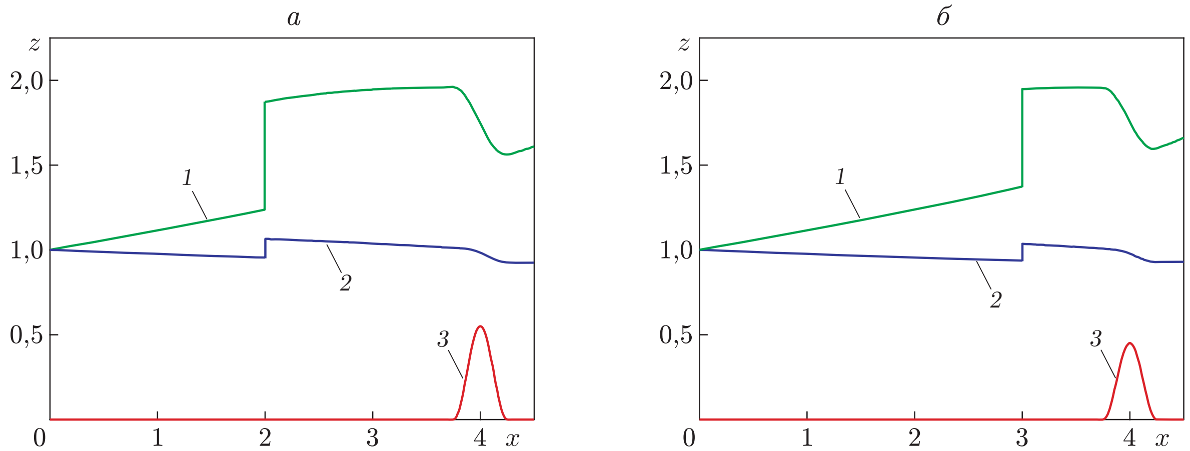

Рис. 3. Слой смешения с гидравлическим прыжком:
а — $x_s = 2$, *б* — $x_s = 3$; *1*, *2* — верхняя $z = H_0 - \zeta$ и нижняя $z = Z + h$ границы слоя смешения, *3* — локальное препятствие $z = 10Z$, определяющее положение разрыва $x = x_s$

Стационарное решение можно продолжить, если за гидравлическим прыжком поместить локальное препятствие, над которым происходит переход из докритического режима течения в сверхкритический. Необходимым условием существования транскритического обтекания является одновременное обращение в нуль числителя и знаменателя в выражении для производной h в уравнениях (7):

$$B_2C_1 - A_2C_2 = 0, \qquad A_1B_2 - A_2^2 = 0. \tag{14}$$

Переход от докритического к сверхкритическому режиму течения не обязательно происходит в том сечении канала, где высота препятствия достигает максимума. Положение точки перехода зависит как от формы локального препятствия, так и от интенсивности массообмена между слоями.

На рис. 3 показана структура стационарного слоя смешения, содержащего гидравлический прыжок с последующим транскритическим течением за ним. Параметры потока при $x = 0$ соответствуют рис. 2, и построенное решение в области до препятствия ($x < 3{,}75$) в плоскости (u, Q_m) принадлежит кривой, показанной на рис. 2. Течение за разрывом определяется с использованием соотношений (10). Замена последнего уравнения (10) соотношением $[E] = 0$ для модели I не приводит к заметным различиям границ слоя смешения в области за разрывом. Поэтому использование дифференциального следствия для переменной q является эффективной аппроксимацией исходного уравнения энергии.

Гидравлический прыжок переводит сверхкритическое течение в докритическое, однако режим максимального вовлечения не достигается вследствие наличия локального препятствия вида $Z = z_m \cos^2(2\pi(x - 4))$, $x \in (3{,}75, 4{,}25)$. Над препятствием происходит непрерывный переход от докритического течения к сверхкритическому, что соответствует выполнению обоих равенств (14). Положение гидравлического прыжка согласовано с максимальной высотой препятствия ($z_m = 0{,}055$ на рис. 3,*а*, $z_m = 0{,}045$ на рис. 3,*б*). Заметим, что незначительное изменение высоты препятствия оказывает существенное влияние на положение прыжка. Таким образом, в рамках предложенных моделей появляется возможность управлять положением гидравлического прыжка и количеством вовлекаемой в прослойку жидкости за счет изменения высоты и формы локального препятствия.

3.2. *Волновая структура слоя смешения.* В рамках моделей I и II исследуются стационарные решения (3), описывающие слой смешения осциллирующего типа. Основной особенностью этого нового класса течений является волновой характер границ слоя сме-

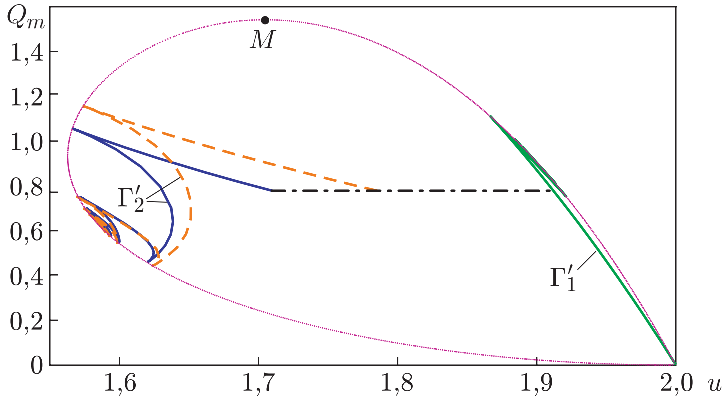

Рис. 4. Интегральные кривые системы (7) в плоскости (u, Q_m), полученные при $H_0 = 10$, $u_0 = 2$, $w_0 = 0{,}7$:
линия Γ_1' — непрерывное сверхкритическое решение, сплошная и штриховая линии Γ_2' — докритическое решение за фронтом разрыва (штрихпунктирная линия), полученное с использованием соотношений (10) или (11) соответственно; тонкая замкнутая линия — интегральная кривая, полученная из (13) для модели I

шения. Кроме того, в области непрерывности решения знак $\chi(0)$ не меняется и при $x \to \infty$ течение стремится к равномерному трехслойному сдвиговому течению, оставаясь сверхкритическим или докритическим. В случае модели I это означает, что такое решение полностью лежит на сверхкритической Γ_1 или докритической Γ_2 ветви (см. рис. 2). При этом режим максимального вовлечения не достигается.

В случае модели II последний интеграл в (13) отсутствует вследствие включения в уравнение сохранения полного импульса слагаемого, содержащего q^2. Поэтому проекция решения на плоскость (u, Q_m) не лежит на некоторой “универсальной” замкнутой кривой. На рис. 4, полученном при $H_0 = 10$, $u_0 = 2$, $w_0 = 0{,}7$ ($h_0 = 1$, $b = 1$), показаны проекции сверхкритического Γ_1' и докритического Γ_2' решений, описывающих структуру стационарного слоя смешения согласно модели II. Тонкая замкнутая кривая соответствует интегралам (13) для модели I. На рис. 4 видно, что режим максимального вовлечения в данном случае не реализуется. После достижения переменной Q_m предельного значения решение принимает характер затухающих колебаний и стремится к некоторому участку “универсальной” замкнутой кривой для модели I.

Рассматриваемые параметры потока в начальной точке формирования слоя смешения соответствуют сверхкритическому течению, поскольку корни характеристического полинома (4) положительны. Более того, свойство гиперболичности уравнений (3) сохраняется во всей области течения. На рис. 5,*а* сплошными линиями *1* и *2* показаны границы слоя смешения в непрерывном сверхкритическом решении модели II (на рис. 4 этому течению соответствует кривая Γ_1'). Как следует из рис. 5,*а*, сверхкритическое решение практически совпадает с решением модели I (штриховая линия). Переход на докритическую ветвь решения возможен посредством гидравлического прыжка. Линии *3*, *4* соответствуют границам слоя смешения за фронтом стационарного гидравлического прыжка, расположенного в точке $x = 10$. Для определения решения за скачком использованы соотношения (10). По мере удаления от фронта разрыва различия решений, полученных по моделям I и II, исчезают. На рис. 5,*б* приведены разрывные решения модели II, полученные с использованием соотношений на разрыве (10) (сплошные линии) и (11) (штриховые линии). На рис. 4 эти решения за скачком на плоскости (u, Q_m) показаны кривыми Γ_2'. Несмотря на то что значения параметров потока за фронтом разрыва, полученные с использованием со-

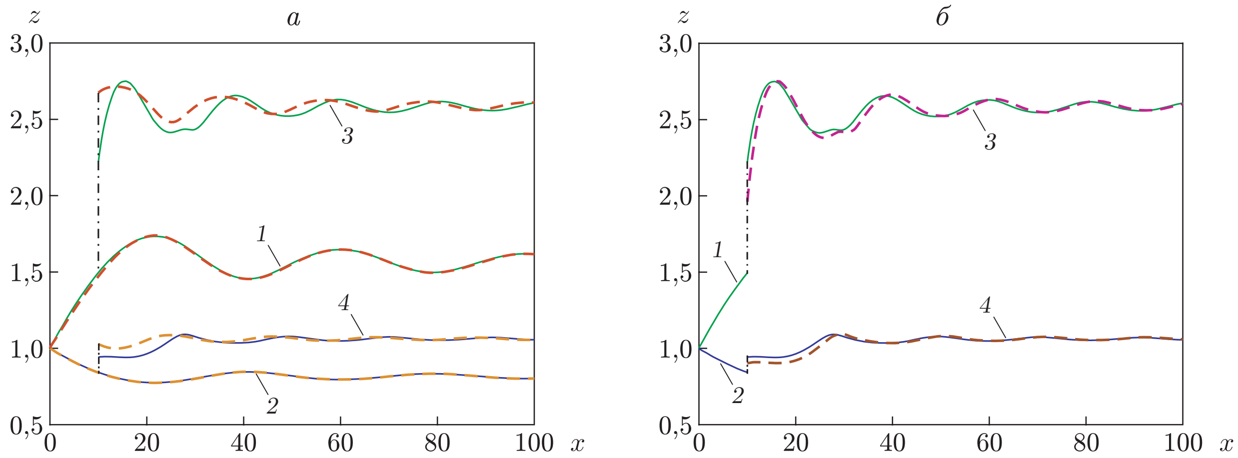

Рис. 5. Волновой слой смешения ($H_0 = 10$, $u_0 = 2$, $w_0 = 0{,}7$):
а — для моделей I (штриховые линии) и II (сплошные линии), *б* — для разрывных решений модели II, полученных с использованием условий на разрыве (10) (сплошные линии) и (11) (штриховые линии); *1, 2* — границы слоя смешения в сверхкритическом течении, *3, 4* — границы слоя смешения в докритическом течении за скачком при $x = 10$; штрихпунктирная линия — фронт разрыва

отношений (10), (11), существенно различаются, эти различия проявляются лишь в малой окрестности за скачком.

Таким образом, при уменьшении разности скоростей в слоях структура слоя смешения приобретает волновой характер. Результаты численных расчетов стационарного течения в рамках моделей I и II с положительным параметром диссипации $\varkappa$ показывают, что при $x \to \infty$ амплитуда волн стремится к нулю и реализуется трехслойное равномерное течение.

4. Обсуждение результатов. Лабораторные эксперименты, в которых реализуется слой смешения в постановке, близкой к рассматриваемой в данной работе, немногочисленны. В основном исследуются различные варианты формирования слоя смешения в стратифицированной по плотности жидкости в течениях над уступом (поверхностная струя) или в течениях из-под щита (придонная струя). В приближении Буссинеска эти течения являются эквивалентными и переводятся одно в другое за счет отражения внутренних границ течения симметрично относительно центральной линии канала. При этом в течениях из-под щита выполняется граничное условие $w_0 = 0$ (вертикальная стенка). Кроме того, полагается, что число Фруда $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{bh_0} > 1$, а это соответствует сверхкритическому истеканию тяжелой жидкости с плавучестью b из фиксированного отверстия высотой h_0 в область $x > 0$, где полная глубина канала $H_0 \gg h_0$. Примеры развития слоя смешения в приповерхностной струе и в плотностном течении из-под щита исследованы в [3, 5] при близких значениях параметров потока с числами Фруда $\mathrm{Fr} = 2{,}88$; $2{,}70$ соответственно. Рассмотрим более подробно выполненный в [5] эксперимент и сравним его результаты с результатами численного моделирования развития слоя смешения с использованием уравнений (3).

Экспериментальные исследования [5] двумерных струйных течений, создаваемых постоянным источником плавучести, проводились в баке размером $500 \times 10 \times 50$ см в направлениях $x \times y \times z$. Резервуар заполнялся слоем пресной воды толщиной $H_0 = 40$ см. Через щель длиной $h_0 = 4$ см, расположенную в нижней части поперечного сечения $x = 0$, в бак поступал водный солевой раствор с плавучестью $b = 5{,}2$ см/с^2 и скоростью $u_0 = \mathrm{Fr}\sqrt{bh_0} \approx 12{,}3$ см/с. Для визуализации перемешивания в раствор добавлялся

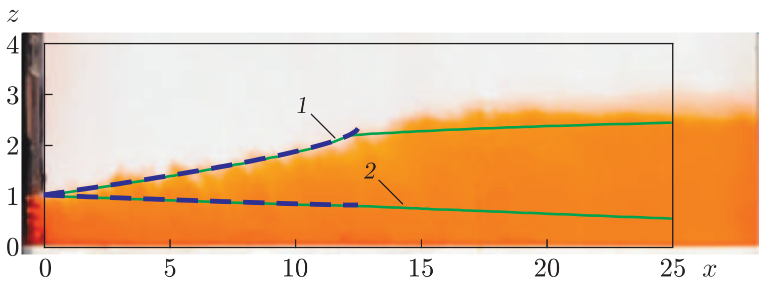

Рис. 6. Границы слоя смешения в плотностном течении из-под щита, наложенные на фотографию, полученную в результате визуализации эксперимента (см. рис. 5,*а* в [5]):

сплошные кривые *1, 2* — верхняя ($z = h + \eta$) и нижняя ($z = h$) границы, полученные по уравнениям (3) при $t = 20$ (режим максимального вовлечения), штриховые линии — стационарное решение уравнений (7)

пищевой краситель, позволяющий определить верхнюю границу области перемешивания. Фотография подкрашенной струи при достижении режима максимального вовлечения в слой смешения приведена в [5] (см. рис. 5,*а*). На эту фотографию наложены результаты расчета границ слоя смешения по нестационарным уравнениям (3) при $t = 20$ с (сплошные линии на рис. 6). В качестве единицы измерения по осям использовалась высота входного сечения h_0. Расчеты выполнены с помощью TVD-схемы повышенного порядка аппроксимации с условиями Неймана на правой границе $x = 25h_0$. Значения искомых функций при $x = 0$ задаются согласно данным эксперимента и формулам (8), те же условия используются в качестве начальных данных. Расчеты проводились для эмпирических постоянных $\sigma = 0{,}1$, $\varkappa = 8$ по модели I. Использование уравнений (3) при $k = 0$ обусловлено наличием ограничений модели II на начальной стадии смешения. В момент времени $t = t_* \approx 20$ с переменная $Q_m = v\eta$ достигает максимума. При дальнейшем расчете ($t > t_*$) условия на правой границе начинают оказывать влияние на решение в расчетной области $x \in [0, 25h_0]$. Штриховой линией на рис. 6 показано соответствующее сверхкритическое стационарное решение, существующее лишь в ограниченной области $x < x_* \approx 12{,}5h_0$. При $x = x_*$ решение становится критическим (соответствует точке M на рис. 2) и продолжить стационарное решение далее в область $x > x_*$ не представляется возможным. Однако в области существования стационарного решения оно совпадает с течением, полученным при нестационарном расчете. Таким образом, уравнения (3) позволяют описать переход от сверхкритического течения к докритическому в слое смешения и достаточно точно определить границы области интенсивного перемешивания.

Другим важным классом течений, в которых возникает слой смешения, являются гравитационные или плотностные течения. В формировании головной части таких течений основную роль играет негидростатичность распределения давления на фронте волны, а слой смешения возникает за фронтом. В численных расчетах можно реализовать близкое к стационарному течение с начальным сдвигом скорости в слоях, воспроизводящее структуру головной части гравитационного течения. Результаты численного моделирования таких течений на основе трехмерных уравнений Навье — Стокса представлены в работе [14], в которой рис. 15 соответствует следующим безразмерным параметрам спутного течения: $u_0 = 2{,}04$, $w_0 = 1$, $h_0 = 1$, $b = 1$, $H = 10$. При этом наблюдается волновая структура поля плотности за фронтом головной волны, а режим максимального вовлечения не достигается. При указанных параметрах течения в начальной точке слоя смешения решения уравнений (3) для моделей I и II имеют осциллирующую структуру (см. рис. 5), что согласуется с результатами работы [14]. Приведенные качественные и количественные результаты сравнения решений уравнений (3) с известными экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования перемешивания в струйных и плотностных течениях подтверждают применимость предложенных одномерных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Simpson J.** Gravity currents. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
2. **Koop C. G., Browand F. K.** Instability and turbulence in a stratified fluid with shear // J. Fluid Mech. 1979. V. 93. P. 135–159.
3. **Chu V. H., Baddour R.** Turbulent gravity-stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 138. P. 353–378.
4. **Sher D., Woods A. W.** Gravity currents: entrainment, stratification and self-similarity // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 130–162.
5. **Sher D., Woods A. W.** Mixing in continuous gravity currents // J. Fluid Mech. 2017. V. 818. R4.
6. **Horsley M. C., Woods A. W.** A note on analytic solutions for entraining stratified gravity currents // J. Fluid Mech. 2018. V. 836. P. 260–276.
7. **Farmer D., Armi L.** Stratified flow over topography: The role of small-scale entrainment and mixing in flow establishment // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1999. V. 455. P. 3221–3258.
8. **Gregg M. C., Pratt L. J.** Flow and hydraulics near the sill of Hood Canal, a strongly sheared, continuously stratified fjord // J. Phys. Oceanogr. 2010. V. 40. P. 1087–1105.
9. **Pawlak G., Armi L.** Vortex dynamics in a spatially accelerating shear layer // J. Fluid Mech. 1998. V. 376. P. 1–35.
10. **Pawlak G., Armi L.** Mixing and entrainment in developing stratified currents // J. Fluid Mech. 2000. V. 424. P. 45–73.
11. **Liapidevskii V. Yu., Dutykh D.** On the velocity of turbidity currents over moderate slopes // Fluid Dynam. Res. 2019. V. 51. 035501.
12. **Baines P. G.** Internal hydraulic jumps in two-layer systems // J. Fluid Mech. 2016. V. 787. P. 1–15.
13. **Thorpe S. A., Li Lin.** Turbulent hydraulic jumps in a stratified shear flow. Pt 2 // J. Fluid Mech. 2014. V. 758. P. 94–120.
14. **Ogden K. A., Helfrich K. R.** Internal hydraulic jumps in two-layer flows with upstream shear // J. Fluid Mech. 2016. V. 789. P. 64–92.
15. **Ogden K. A., Helfrich K. R.** Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. 074803.
16. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
17. **Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.** Слой смешения под свободной поверхностью // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 127–140.
18. **Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Mixing layer and turbulent jet flow in a Hele-Shaw cell // Intern. J. Nonlinear Mech. 2020. V. 125. 103534.
19. **Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.** Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2019. V. 73. P. 157–169.

Поступила в редакцию 18/V 2022 г.,
после доработки — 18/V 2022 г.
Принята к публикации 26/V 2022 г.