УДК 533.9

О ДВУМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В ДИСПЕРСИОННОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Березин, В. А. Вшивков, В. Д. Крыгин

(*Новосибирск*)

Одномерные задачи о распространении и эволюции волн в дисперсионных средах изучены достаточно подробно [1—3]. Значительно меньше внимания уделено подобным задачам в двумерной постановке [4, 5], что связано с существенно большими трудностями при их изучении. В [4] аналитически изучена устойчивость двумерных солитонов при наличии модуляции амплитуды. В [5] аналитически решена стационарная двумерная задача об обтекании тонкого тела в дисперсионной среде при условии малости дисперсионных и нелинейных эффектов.

Для рассмотрения двумерных волновых процессов в дисперсионной среде без предположения о малости нелинейных и дисперсионных эффектов нами выбрана простейшая модель — обтекание проводящего бесконечно протяженного цилиндра сверхзвуковым потоком бесстолкновительной неизотермической плазмы. Известно, что в такой плазме могут распространяться ионно-звуковые волны, скорость которых зависит от длины волны (иными словами, плазма с $T_e \gg T_i$ является дисперсионной средой для ионно-звуковых волн).

Ионно-звуковые волны в неизотермической плазме без магнитного поля при амплитудах, меньших критических [1], могут быть описаны следующими уравнениями гидродинамического типа:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{e}{m_i}\nabla\varphi - \frac{1}{n_i m_i}\nabla p_i + \frac{\nu}{n_i m_i}\Delta\mathbf{u},$$

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n_e - n_i), \quad p_i = n_i T_i, \quad n_e = n_0 \exp(e\varphi/T_e),$$

где $\mathbf{u}_i$, m_i, n_i, T_i — скорость, масса, плотность и температура ионов; n_e, T_e — плотность и температура электронов; φ — электрический потенциал; $T_e \gg T_i$; ν — коэффициент вязкости. При отсутствии вязкости дисперсионные осцилляции с течением времени будут заполнять все более и более расширяющуюся область перед телом. Введение вязкости позволяет сделать эту область ограниченной. Будем решать задачу в полярных координатах (r, θ) в области $R_0 \leqslant r \leqslant R_1$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. В качестве начальных данных во всей области, кроме поверхности цилиндра, задаем параметры однородного набегающего потока

$$n_i(\mathbf{r}, 0) = n_0, \ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0 = \mathrm{const}, \ \varphi(\mathbf{r}, 0) = 0, \tag{2}$$

где n_0, $\mathbf{u}_0$ — значения плотности и скорости потока плазмы на бесконечности, который предполагается сверхзвуковым, т. е. $u_0 > c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$. На поверхности цилиндра зададим условие

$$\varphi(R_0, t) = \varphi_0 = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Внешнюю границу области $r = R_1$ расположим достаточно далеко от тела, поэтому

$$\varphi(R_1, t) = 0. \tag{4}$$

Граничные условия для гидродинамических функций ставятся следующим образом:

$$\mathbf{u}\,(R_0,\ t) = 0,\ \mathbf{u}(R_1,\ t) = \mathbf{u}_0,\ n_i(R_1,\ t) = n_0. \tag{5}$$

Значения потенциала на теле φ_0, а также электронной и ионной температур T_e, T_i будем считать некоторыми константами. Заметим, что в эксперименте потенциал на теле может варьироваться, а постоянство температур в задачах о ионно-звуковых колебаниях является обычным предположением. Таким образом, уравнения (1) с условиями (2), (3)—(5) математически формулируют рассматриваемую задачу.

В этой задаче есть три пространственных масштаба: размер тела, электронный дебаевский радиус $r_{De} = (T_e/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ (характеризующий масштаб дисперсионных осцилляций), ионный дебаевский радиус $r_{Di} = (T_i/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ (характеризующий влияние заряда тела). За основной пространственный масштаб удобно выбрать радиус обтекаемого цилиндра R_0. В качестве характерных значений скорости, плотности и потенциала выберем скорость ионного звука $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$, n_0 и T_e/e соответственно. Тогда система уравнений (1) в безразмерных переменных и в полярных координатах $(r,\ \theta)$ может быть записана в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial n}{\partial \theta} + n\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{nu}{r} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{T}{n}\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right),$$

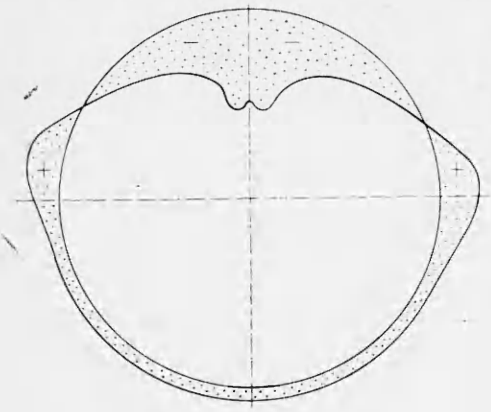
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{T}{nr}\frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$

$$\beta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right] = \exp(\varphi) - n,$$

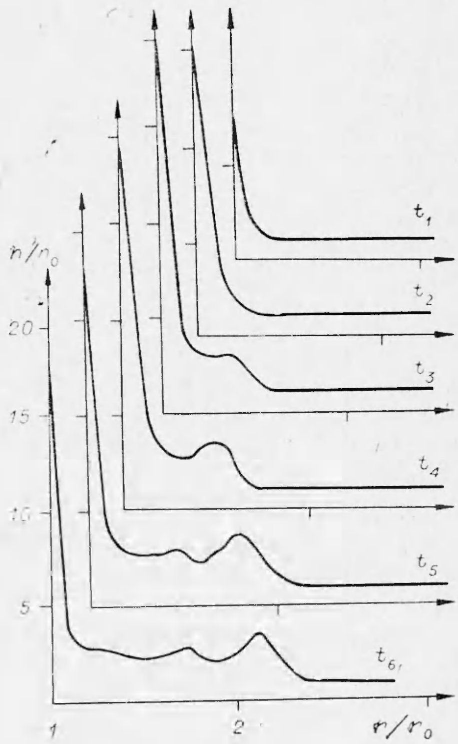
где u — радиальная компонента скорости; v — азимутальная компонента скорости; $\beta = (r_{De}/R_0)^2$; $T = T_i/T_e$. Система уравнений (6) решалась численно методом дробных шагов. Все члены переноса аппроксимировались с учетом направления скорости; разностная схема была монотонной и условно устойчивой. Свойство монотонности в данном случае является очень важным, так как если это не выполняется, то «численная» дисперсия может исказить дисперсию физическую. Уравнение Пуассона для потенциала решалось методом квазилинеаризации с последующими итерациями по алгоритму верхней релаксации.

Рассмотрим результаты расчетов в полной области $R_0 \leqslant r \leqslant 3R_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi(\theta_0 = 0)$ при отсутствии вязкости ($\nu = 0$). Скорость набегающего потока выбрана равной $u_0 = 1{,}2$, дисперсионный параметр $\beta = 0{,}09$, отношение температур ионов и электронов $T = 0{,}1$, потенциал заряженного тела равен $\varphi_0 = 0{,}5$. Выбор полной области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ позволяет исследовать не только структуру ударной волны перед телом, но и разреженный след за телом. Согласно расчетам, перед телом образуется область уплотнения с максимальной плотностью $n_{\max} \approx 18{,}5\ n_0$, за телом — сильно разреженный след с $n_{min} = 10^{-4} n_0$. На фиг. 1 изображена угловая зависимость возмущения плотности ионов $\delta n_i = (n_i - n_0)/n_0$ на расстоянии $r = 2R_0$ от оси цилиндра в момент времени $t = R_0/c_s$ (окружность соответствует невозмущенной плотности, вне окружности отложены в зависимости от угла θ значения $\delta n_i > 0$, внутри окружности $\delta n_i < 0$). Ударная волна сносится налетающим на тело потоком плазмы. Некоторое увеличение плотности при $\theta \approx 2$ соответствует конусу Маха. За телом образуется разреженный след с фокусировкой ионов около оси симметрии $\theta = 0$. Качественно аналогичные результаты получаются и в расчетах по кинетической теории [6]. На фиг. 2 изображены изолинии плотности ионов $n_i(\mathbf{r}, t)$; хорошо видно, что перед цилиндром имеется ударная волна с осцилляторной структурой.

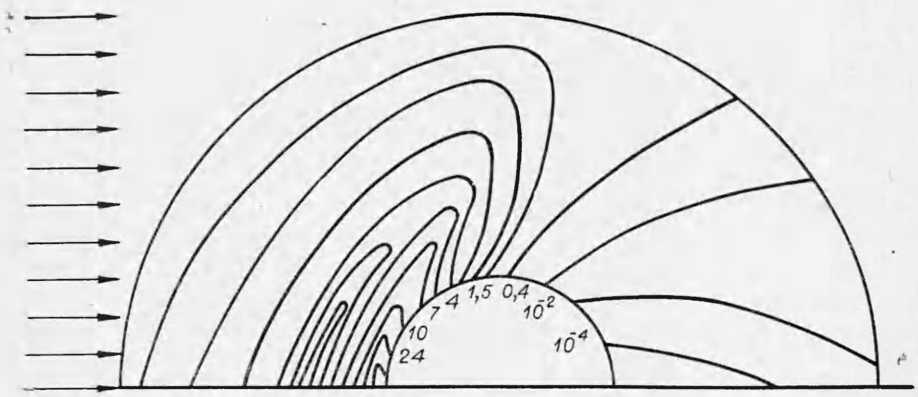
Рассмотрим теперь формирование ударной волны на основе расчетов, выполненных в «урезанной» области $R_0 \leqslant r \leqslant 3R_0$, $1 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ($\theta_0 = 1$) при наличии небольшой вязкости $\nu = 10^{-2}$ и при следующих параметрах: $\beta = 0{,}01$, $\varphi_0 = 0{,}5\ T_e/e$, $T_i/T_e = 0{,}1$, $u_0 = 1{,}2\ c_s$. На фиг. 3 пред-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

ставлен профиль плотности ионов на линии торможения $\theta = \pi$ в последовательные моменты времени. Сначала происходит рост плотности ионов у поверхности цилиндра до величины $\approx 20\ n_0$ (моменты времени $t_1 = 0{,}1 \times \times R_0/c_s$, $t_2 = 0{,}3\ R_0/c_s$). Затем, по мере того как у поверхности тела накапливается достаточная плотность, в игру вступает ионное давление, которое «отталкивает» ионы от поверхности (момент времени $t_3 = 0{,}4\ R_0/c_s$), и от цилиндра начинает отходить вверх по потоку волна сжатия. Поскольку среда дисперсионная, эти возмущения постепенно приобретают осцилляторную структуру (моменты времени $t_4 = 0{,}6\ R_0/c_s$, $t_5 = 0{,}9\ R_0/c_s$ и $t_6 = 1{,}15\ R_0/c_s$). При уменьшении дисперсионного параметра β формируется больше осцилляций, пространственный масштаб которых убывает пропорционально $\beta^{1/2}$.

При уменьшении потенциала цилиндра φ_0 наблюдался рост плотности ионов у поверхности тела, что происходит вследствие ослабления силы со стороны электрического поля.

При уменьшении неизотермичности плазмы T_i/T_e от 0,1 до 0,01 плотность ионов у поверхности цилиндра возрастает от 32 n_0 до 224 n_0 при $\beta = 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0{,}5\ T_e/e$, $\nu = 10^{-2}$ в момент $t = R_0/c_s$. Это связано с тем, что «упругость» среды по отношению к сжатию определяется отношением температур T_i/T_e и при уменьшении этого отношения «упругость» ослабляется. Чтобы вступило в игру ионное давление, требуется большое уплотнение у поверхности тела. Если увеличивать скорость набегающего потока u_0, то также происходит рост плотности у поверхности цилиндра.

Поступила 30 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сагдеев Р. З.** Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
2. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
3. **Березин Ю. А.** Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск, Наука, 1977.
4. **Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.** Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.— ДАН СССР, 1970, т. 192, № 4.
5. **Карпман В. И.** О структуре течения при двумерном обтекании тонкого тела в диспергирующей среде.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 6.
6. **Альперт Я. Л.** Волны и искусственные тела в приземной плазме. М., Наука, 1974.

УДК 536.255.001.5 : 622.36

ТЕПЛООТДАЧА ОТ СТЕНКИ КАНАЛА С ПОРИСТЫМ СЛОЕМ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕМ ЖИДКОСТИ

И. Г. Ким, В. А. Мухин, Н. Н. Смирнова

(*Новосибирск*)

При анализе температурного режима в протяженных подземных коллекторах существенную роль играет теплоприток из окружающего массива. В этом случае модель теплообмена при фильтрации становится двумерной. Постановка задачи значительно упрощается, если считать область фильтрации одномерной, но при этом на границе с непроницаемым массивом должно выполняться граничное условие третьего рода. Во всех работах этого плана в горной теплофизике [1—3] появляется вопрос об определении коэффициента теплоотдачи на границе массив — пористый пласт. Поскольку процессы в средах при фильтрации