УДК 539

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В СВЯЗНОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. Д. Чернышов

Воронежская государственная технологическая академия, 394000 Воронеж
E-mail: chernyshovad@mail.ru

Для связной модели термовязкоупругого стержня, поперечное сечение которого представляет собой равносторонний треугольник, получено два точных решения в случаях, когда на боковой поверхности стержня заданы нормальное перемещение и касательное напряжение или касательное перемещение и нормальное напряжение. Вводится безразмерный параметр $R_0$, по значению которого можно судить о целесообразности учета связности в постановке задачи. Приведены формулы для скоростей и длин температурной, сдвиговой и продольной волн, которые могут быть использованы в экспериментах для определения физических параметров термовязкоупругого материала.

Ключевые слова: динамическое деформирование, связные задачи термовязкоупругости, стержень.

Исследованию свойств термоупругого тела в динамическом режиме посвящены работы [1–4] и др. Модель термовязкоупругости является сложной, поэтому динамические задачи почти не изучены. Точные решения динамических задач для двумерного термовязкоупругого тела неизвестны.

**1. Постановка задачи.** В отличие от большинства линейных моделей в модели термовязкоупругости наиболее полно учтены механические свойства твердых тел. Термовязкоупругими свойствами обладают металлы и их сплавы при небольших переменных механических и тепловых нагрузках [5]. Материалам с такими сложными свойствами соответствуют различные реологические модели. Для определенности выберем модель, в которой упругие и вязкие тензоры деформаций и скоростей деформаций совпадают, а полные деформации представляют собой сумму упругих и температурных деформаций. Тензор напряжений $\sigma_{ij}$ выражается через тензоры деформаций $e_{ij}$, скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}$ и температуру $T$ следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda(e_{kk} - 3\alpha_t T)\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \alpha_t T\delta_{ij}) + \zeta(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t T_t)\delta_{ij} + 2\eta(\varepsilon_{ij} - \alpha_t T_t\delta_{ij}). \qquad (1.1)$$

Здесь $\lambda$, $\mu$ — упругие коэффициенты Ламе; $\zeta$, $\eta$ — коэффициенты вязкости; $\alpha_t$ — коэффициент температурного расширения; $\delta_{ij}$ — единичный тензор Кронекера; $(\,\cdot\,)_t = \partial\,(\,\cdot\,)/\partial t$.

В дальнейшем будем рассматривать динамические задачи в условиях плоской деформации. Если $\sigma_{ij}$ из (1.1) подставить в уравнения движения сплошной среды, то в декартовых координатах относительно перемещений $u$ и $v$ получим два дифференциальных уравнения

$$\lambda_0 u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} + \zeta_0 u_{txx} + (\zeta + \eta)v_{txy} + \eta u_{tyy} - \gamma_e T_x - \gamma_v T_{xt} = \rho u_{tt},$$
$$\lambda_0 = \lambda + 2\mu, \qquad \zeta_0 = \zeta + 2\eta, \qquad (1.2)$$

$$\lambda_0 v_{yy} + (\lambda+\mu)u_{xy} + \mu v_{xx} + \zeta_0 v_{tyy} + (\zeta+\eta)u_{txy} + \eta v_{txx} - \gamma_e T_y - \gamma_v T_{yt} = \rho v_{tt},$$
$$\gamma_e = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \qquad \gamma_v = (3\zeta + 2\eta)\alpha_t.$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение теплопроводности

$$b\Delta T - k(u_{xt} + v_{yt}) = T_t, \qquad k = \gamma_e T_0/(C\rho). \tag{1.3}$$

В (1.2), (1.3) $T_0$ — начальная температура; $\Delta$ — оператор Лапласа; $\rho$ — плотность; $(\,\cdot\,)_x = \partial(\,\cdot\,)/\partial x$; $(\,\cdot\,)_y = \partial(\,\cdot\,)/\partial y$; $b$ — температуропроводность; $C$ — удельная теплоемкость; $k$ — коэффициент связности (слагаемое, содержащее эту величину, позволяет учитывать изменение температуры в твердом теле при адиабатическом изменении его объема [6]). Для уравнений (1.2), (1.3) зададим два варианта условий на границе $\Gamma$ стержня, сечение которого представляет собой равносторонний треугольник с высотой $2h$:

$$u_n\big|_\Gamma = u_{10}\cos\omega t + u_{20}\sin\omega t, \qquad \tau_n\big|_\Gamma = \tau_{10}\cos\omega t + \tau_{20}\sin\omega t,$$
$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_\Gamma = q_{10}\cos\omega t + q_{20}\sin\omega t; \tag{1.4}$$

$$u_\tau\big|_\Gamma = v_{10}\cos\omega t + v_{20}\sin\omega t, \qquad \sigma_n\big|_\Gamma = \sigma_{10}\cos\omega t + \sigma_{20}\sin\omega t,$$
$$T\big|_\Gamma = T_{10}\cos\omega t + T_{20}\sin\omega t. \tag{1.5}$$

Здесь $u_n$, $u_\tau$ — нормальное и касательное к границе $\Gamma$ перемещения материальных точек; $\tau_n$, $\sigma_n$ — касательное и нормальное напряжения на границе стержня; $u_{j0}$, $\tau_{j0}$, $v_{j0}$, $\sigma_{j0}$, $T_{j0}$ $(j = 1, 2)$ — заданные постоянные. Уравнения (1.1)–(1.5) — линейная задача. Вследствие диссипации энергии, которая может быть учтена нелинейным слагаемым $\sigma^v_{ij}\varepsilon^v_{ij}$ в уравнении теплопроводности, с течением времени материал при деформировании нагревается. При больших значениях $t$ нагрев становится существенным, поэтому предложенная линейная модель, в которой не учитывается диссипация, пригодна только для начальных моментов времени.

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях без начальных условий. Решение этой задачи будем искать в виде

$$u = U_1(x,y)\cos\omega t + U_2(x,y)\sin\omega t, \qquad v = V_1(x,y)\cos\omega t + V_2(x,y)\sin\omega t,$$
$$T = T_1(x,y)\cos\omega t + T_2(x,y)\sin\omega t, \tag{1.6}$$

где $U_j$, $V_j$, $T_j$ — амплитуды колебаний перемещений и температуры в области $\Omega$. Подставляя (1.6) в (1.2) и (1.3), получаем следующую систему:

$$\lambda_0 U_{1xx} + (\lambda+\mu)V_{1xy} + \mu U_{1yy} + \omega\zeta_0 U_{2xx} + \omega(\zeta+\eta)V_{2xy} +$$
$$+ \omega\eta U_{2yy} - \gamma_e T_{1x} - \omega\gamma_v T_{2x} + \rho\omega^2 U_1 = 0,$$
$$\lambda_0 U_{2xx} + (\lambda+\mu)V_{2xy} + \mu U_{2yy} - \omega\zeta_0 U_{1xx} - \omega(\zeta+\eta)V_{1xy} -$$
$$- \omega\eta U_{1yy} - \gamma_e T_{2x} + \omega\gamma_v T_{1x} + \rho\omega^2 U_2 = 0; \tag{1.7}$$

$$\lambda_0 V_{1yy} + (\lambda+\mu)U_{1xy} + \mu V_{1xx} + \omega\zeta_0 V_{2yy} + \omega(\zeta+\eta)U_{2xy} +$$
$$+ \omega\eta V_{2xx} - \gamma_e T_{1y} - \omega\gamma_v T_{2y} + \rho\omega^2 V_1 = 0,$$
$$\lambda_0 V_{2yy} + (\lambda+\mu)U_{2xy} + \mu V_{2xx} - \omega\zeta_0 V_{1yy} - \omega(\zeta+\eta)U_{1xy} -$$
$$- \omega\eta V_{1xx} - \gamma_e T_{2y} + \omega\gamma_v T_{1y} + \rho\omega^2 V_2 = 0; \tag{1.8}$$

$$b\Delta T_1 - \omega k(U_{2x} + V_{2y}) - \omega T_2 = 0, \qquad b\Delta T_2 + \omega k(U_{1x} + V_{1y}) + \omega T_1 = 0. \tag{1.9}$$

**2. Решение для плоской полосы.** В данном случае будем считать, что величины $U_j$, $V_j$ и $T_j$ $(j = 1, 2)$ зависят только от координаты $x$. Введем следующие обозначения:

$$U_j = P_j(x), \qquad V_j = Q_j(x), \qquad T_j = R_j(x) \qquad (j = 1, 2).$$

Уравнения (1.7)–(1.9) упрощаются:

$$\begin{gathered}
\lambda_0 P_1'' + \omega\zeta_0 P_2'' - \gamma_e R_1' - \omega\gamma_v R_2' + \rho\omega^2 P_1 = 0,\\
\lambda_0 P_2'' - \omega\zeta_0 P_1'' - \gamma_e R_2' + \omega\gamma_v R_1' + \rho\omega^2 P_2 = 0,\\
bR_1'' - \omega k P_2' - \omega R_2 = 0, \qquad bR_2'' + \omega k P_1' + \omega R_1 = 0;
\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\mu Q_1'' + \omega\eta Q_2'' + \rho\omega^2 Q_1 = 0, \qquad \mu Q_2'' - \omega\eta Q_1'' + \rho\omega^2 Q_2 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь неизвестные функции $P_j$ и $R_j$ входят в систему (2.1) вследствие связности модели, а для $Q_j$ имеем отдельные независимые уравнения (2.2). Частные решения системы (2.1), (2.2) будем искать в виде

$$P_j = A_j \,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad Q_j = B_j \,\mathrm{e}^{\beta x}, \qquad R_j = C_j \,\mathrm{e}^{\alpha x} \qquad (j = 1, 2). \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и (2.2), получим систему уравнений относительно $A_j$, $B_j$, $C_j$, $\alpha$, $\beta$:

$$\begin{gathered}
\lambda_0 \alpha^2 A_1 + \omega\zeta_0 \alpha^2 A_2 - \gamma_e \alpha C_1 - \omega\gamma_v \alpha C_2 + \rho\omega^2 A_1 = 0,\\
\lambda_0 \alpha^2 A_2 - \omega\zeta_0 \alpha^2 A_1 - \gamma_e \alpha C_2 + \omega\gamma_v \alpha C_1 + \rho\omega^2 A_2 = 0,\\
b\alpha^2 C_1 - \omega k\alpha A_2 - \omega C_2 = 0, \qquad b\alpha^2 C_2 + \omega k\alpha A_1 + \omega C_1 = 0;
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\mu\beta^2 B_1 + \omega\eta\beta^2 B_2 + \rho\omega^2 B_1 = 0, \qquad \mu\beta^2 B_2 - \omega\eta\beta^2 B_1 + \rho\omega^2 B_2 = 0. \tag{2.5}$$

Сначала рассмотрим более простую систему (2.5). Приравнивая ее определитель к нулю, найдем четыре комплексных корня характеристического уравнения:

$$\begin{gathered}
\beta_{1,2} = \pm(\alpha_{00} - i\beta_{00}), \qquad \beta_{3,4} = \pm(\alpha_{00} + i\beta_{00}), \qquad \beta_{1,2} = \bar\beta_{3,4},\\
\alpha_{00} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\,\frac{\sqrt{G_\eta - 1}}{G_\eta}, \qquad \beta_{00} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\,\frac{\sqrt{G_\eta + 1}}{G_\eta}, \qquad G_\eta = \sqrt{1 + \Big(\frac{\omega\eta}{\mu}\Big)^2}\,.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь черта сверху обозначает сопряжение. Для получения общего решения системы (2.5) в явном виде необходимо определить связи между коэффициентами $B_1$ и $B_2$ при различных значениях $\beta = \beta_m$ $(m = 1, \ldots, 4)$. Введем следующие обозначения:

$$B_1(\beta_m) = B_{1m}, \qquad B_2(\beta_m) = B_{2m} \qquad (m = 1, \ldots, 4).$$

Коэффициенты $B_{2m}$ выразим через коэффициенты $B_{1m}$, которые будем считать комплексными постоянными. Подставляя $\beta = \beta_m$ $(m = 1, \ldots, 4)$ в (2.5), найдем искомые связи:

$$B_{2j} = -iB_{1j}, \qquad B_{2\,(j+2)} = iB_{1(j+2)}, \qquad j = 1, 2. \tag{2.7}$$

Общее решение системы (2.2) принимает вид

$$Q_1(x) = \sum_{m=1}^{4} B_{1m}\,\mathrm{e}^{\beta_m x}, \qquad Q_2(x) = i\sum_{m=1}^{2} (B_{1(m+2)}\,\mathrm{e}^{\beta_{m+2} x} - B_{1m}\,\mathrm{e}^{\beta_m x}). \tag{2.8}$$

Правые части равенств (2.8) содержат комплексные величины, в то время как $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ являются действительными функциями действительной переменной $x$. Поэтому данные уравнения необходимо привести к виду, не содержащему мнимые слагаемые. Для этого каждой комплексно-сопряженной паре характеристических корней $\beta_m$ и $\beta_{m+2} = \bar{\beta}_m$ в (2.6) поставим в соответствие пару комплексно-сопряженных коэффициентов:

$$B_{11} = \frac{D_1 + iD_2}{2}, \quad B_{13} = \frac{D_1 - iD_2}{2}, \quad B_{12} = \frac{D_3 - iD_4}{2}, \quad B_{14} = \frac{D_3 + iD_4}{2}. \tag{2.9}$$

Формулы (2.7) и (2.9) позволяют установить следующее свойство: сумма двух слагаемых в выражениях (2.8), соответствующих двум комплексно-сопряженным характеристическим корням $\beta_m$ и $\beta_{m+2} = \bar{\beta}_m$ $(m = 1, 2)$, является действительной функцией. Покажем это на примере выражения для $Q_1(x)$:

$$\begin{aligned} B_{11}\,\mathrm{e}^{\beta_1 x} + B_{13}\,\mathrm{e}^{\beta_3 x} &= (D_1 + iD_2)(\cos\beta_{00}x - i\sin\beta_{00}x)\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}x}/2 + \\ &+ (D_1 - iD_2)(\cos\beta_{00}x + i\sin\beta_{00}x)\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}x}/2 = (D_1\cos\beta_{00}x + D_2\sin\beta_{00}x)\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}x}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

С учетом свойства (2.10) общее решение (2.8) для плоской полосы приводится к действительной форме. Если при этом переменную $x$ заменить на разность $x-h$ (что целесообразно для дальнейших вычислений), то выражения для $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ принимают вид

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= [D_1\cos\beta_{00}(x-h) + D_2\sin\beta_{00}(x-h)]\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}(x-h)} + \\ &\qquad + [D_3\cos\beta_{00}(x-h) + D_4\sin\beta_{00}(x-h)]\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}(h-x)}, \\ Q_2(x) &= [D_2\cos\beta_{00}(x-h) - D_1\sin\beta_{00}(x-h)]\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}(x-h)} - \\ &\qquad - [D_4\cos\beta_{00}(x-h) - D_3\sin\beta_{00}(x-h)]\,\mathrm{e}^{\alpha_{00}(h-x)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Перейдем к решению системы (2.4). При нахождении характеристических корней в явном виде из определителя этой системы получим алгебраическое уравнение восьмой степени, которое следует записать в компактной форме. Для этого найдем $A_1$ и $A_2$ из второго и третьего равенств системы (2.4):

$$\omega k\alpha A_1 = -\omega C_1 - b\alpha^2 C_2, \qquad \omega k\alpha A_2 = b\alpha^2 C_1 - \omega C_2. \tag{2.12}$$

Исключив $A_1$ и $A_2$ из системы (2.4), с помощью (2.12) получим два уравнения 4-й степени относительно $\alpha$:

$$b\lambda_0\alpha^4 + (b\rho + \zeta_0 + k\gamma_v)\omega^2\alpha^2 = \pm i\omega[-\zeta_0 b\alpha^4 + (\lambda_0 + k\gamma_e)\alpha^2 + \rho\omega^2]. \tag{2.13}$$

Отсюда находятся восемь характеристических корней. Введем безразмерные параметры

$$N_0 = \frac{b\rho\omega}{\lambda_0}, \qquad M_e = \frac{k\gamma_e}{\lambda_0} = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2\alpha_t^2 T_0}{C\rho(\lambda + 2\mu)}, \qquad M_v = \frac{k\gamma_v}{b\rho}, \qquad M_\zeta = \frac{\zeta_0}{b\rho}$$

и обозначения

$$A_* = N_0^2(1 + M_\zeta + M_v)^2 - (1 + M_e)^2 - 4N_0^2 M_\zeta, \quad B_* = 2N_0[1 - M_e - (1 + M_e)(M_\zeta + M_v)],$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{A_*^2 + B_*^2} + A_*}\,, \qquad L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{A_*^2 + B_*^2} - A_*}\,.$$

Если для данного материала при слабой связности выполняется неравенство

$$M_e + (1 + M_e)(M_\zeta + M_v) = R_0 < 1, \tag{2.14}$$

то корни уравнения в (2.13), которому соответствует знак “+”, можно записать в виде

$$\alpha_k^2 = \frac{i(1 + M_e) - N_0(1 + M_\zeta + M_v) \pm (K_0 + iL_0)}{1 + iN_0 M_\zeta}\,\frac{\omega}{2b}, \qquad k = 1, \ldots, 4, \tag{2.15}$$

корни уравнения в (2.13), которому соответствует знак "–", — в виде

$$\alpha_k^2 = \frac{-i(1+M_e) - N_0(1+M_\zeta+M_v) \pm (K_0 - iL_0)}{1 - iN_0M_\zeta}\,\frac{\omega}{2b}, \qquad k = 5,\dots,8. \tag{2.16}$$

При $R_0 > 1$, когда связность существенна, корни уравнения в (2.13), которому соответствует знак "+", записываются в виде

$$\alpha_k^2 = \frac{i(1+M_e) - N_0(1+M_\zeta+M_v) \pm (K_0 - iL_0)}{1 + iN_0M_\zeta}\,\frac{\omega}{2b}, \qquad k = 1,\dots,4, \tag{2.17}$$

корни второго уравнения в (2.13), которому соответствует знак "–", — в виде

$$\alpha_k^2 = \frac{-i(1+M_e) - N_0(1+M_\zeta+M_v) \pm (K_0 + iL_0)}{1 - iN_0M_\zeta}\,\frac{\omega}{2b}, \qquad k = 5,\dots,8. \tag{2.18}$$

В дальнейшем корни $\alpha_1,\dots,\alpha_8$ целесообразно представить следующим образом:

$$\alpha_{1,2} = \pm(\alpha_{01} + i\beta_{01}), \qquad \alpha_{3,4} = \pm(\alpha_{03} + i\beta_{03}), \qquad \alpha_{5,6} = \bar\alpha_{1,2}, \qquad \alpha_{7,8} = \bar\alpha_{3,4}. \tag{2.19}$$

Действительная и мнимая части корней находятся из (2.15)–(2.18) по формулам

$$R_0 < 1: \qquad \alpha_{01} = R_1^*\cos\varphi_1, \qquad \beta_{01} = R_1^*\sin\varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{B_1^*}{A_1^*}, \qquad R_1^* = \sqrt{\omega\sqrt{A_1^{*2} + B_1^{*2}}\big/[2b(1+N_0^2M_\zeta^2)]}\,,$$

$$A_1^* = K_0 - N_0(1+M_\zeta+M_v) + N_0M_\zeta(1+M_e+L_0),$$

$$B_1^* = 1 + M_e + L_0 + N_0M_\zeta[N_0(1+M_\zeta+M_v) - K_0],$$

$$R_0 < 1: \quad \alpha_{03} = R_3^*\cos\varphi_3, \qquad \beta_{03} = R_3^*\sin\varphi_3,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{B_3^*}{A_3^*}, \qquad R_3^* = \sqrt{\omega\sqrt{A_3^{*2} + B_3^{*2}}\big/[2b(1+N_0^2M_\zeta^2)]}\,,$$

$$A_3^* = -K_0 - N_0(1+M_\zeta+M_v) + N_0M_\zeta(1+M_e-L_0),$$

$$B_3^* = 1 + M_e - L_0 + N_0M_\zeta[N_0(1+M_\zeta+M_v) - K_0],$$

$$R_0 > 1: \quad \alpha_{01} = R_1^*\cos\varphi_1, \qquad \beta_{01} = R_1^*\sin\varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{B_1^*}{A_1^*}, \qquad R_1^* = \sqrt{\omega\sqrt{A_1^{*2} + B_1^{*2}}\big/[2b(1+N_0^2M_\zeta^2)]}\,,$$

$$A_1^* = K_0 - N_0(1+M_\zeta+M_v) + N_0M_\zeta(1+M_e-L_0),$$

$$B_1^* = 1 + M_e - L_0 + N_0M_\zeta[N_0(1+M_\zeta+M_v) - K_0],$$

$$R_0 > 1: \quad \alpha_{03} = R_3^*\cos\varphi_3, \qquad \beta_{03} = R_3^*\sin\varphi_3,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{B_3^*}{A_3^*}, \qquad R_3^* = \sqrt{\omega\sqrt{A_3^{*2} + B_3^{*2}}\big/[2b(1+N_0^2M_\zeta^2)]}\,,$$

$$A_3^* = -K_0 - N_0(1+M_\zeta+M_v) + N_0M_\zeta(1+M_e+L_0),$$

$$B_3^* = 1 + M_e + L_0 + N_0M_\zeta[N_0(1+M_\zeta+M_v) - K_0].$$

Для того чтобы получить общее решение системы (2.1) в явном виде, необходимо установить связи между коэффициентами $A_j$ и $C_j$ ($j = 1, 2$) при различных значениях $\alpha = \alpha_m$ ($m = 1,\dots,8$). С этой целью введем следующие обозначения:

$$A_j = A_j(\alpha_m), \quad C_j = C_j(\alpha_m) \quad (j = 1, 2,\ m = 1,\dots,8), \qquad C_1(\alpha_m) = H_m.$$

Коэффициенты $C_2(\alpha_m)$ и $A_j(\alpha_m)$ выразим через величины $H_m$, которые будем считать комплексными. Подставляя $\alpha = \alpha_m$ в (2.4) и (2.12), получим

$$C_2(\alpha_m) = iC_1(\alpha_m) = iH_m, \qquad C_2(\alpha_{m+4}) = -iC_1(\alpha_{m+4}) = -iH_{m+4},$$
$$A_1(\alpha_m) = -\Big(i\,\frac{b\alpha_m}{\omega} + \frac{\bar{\alpha}_m}{|\alpha_m|^2}\Big)\frac{H_m}{k}, \qquad A_1(\alpha_{m+4}) = \Big(i\,\frac{b\alpha_{m+4}}{\omega} - \frac{\bar{\alpha}_{m+4}}{|\alpha_{m+4}|^2}\Big)\frac{H_{m+4}}{k},$$
$$A_2(\alpha_m) = iA_1(\alpha_m), \qquad A_2(\alpha_{m+4}) = -iA_1(\alpha_{m+4}) \qquad (m = 1, \ldots, 4).$$

В результате общее решение системы (2.1) принимает вид

$$P_1(x) = -\sum_{m=1}^{4}\Big(i\,\frac{b\alpha_m}{\omega} + \frac{\bar{\alpha}_m}{|\alpha_m|^2}\Big)\frac{H_m}{k}\,\mathrm{e}^{\alpha_m x} + \sum_{m=5}^{8}\Big(i\,\frac{b\alpha_m}{\omega} - \frac{\bar{\alpha}_m}{|\alpha_m|^2}\Big)\frac{H_m}{k}\,\mathrm{e}^{\alpha_m x},$$
$$P_2(x) = \sum_{m=1}^{4}\Big(\frac{b\alpha_m}{\omega} - i\,\frac{\bar{\alpha}_m}{|\alpha_m|^2}\Big)\frac{H_m}{k}\,\mathrm{e}^{\alpha_m x} + \sum_{m=5}^{8}\Big(\frac{b\alpha_m}{\omega} + i\,\frac{\bar{\alpha}_m}{|\alpha_m|^2}\Big)\frac{H_m}{k}\,\mathrm{e}^{\alpha_m x}, \qquad (2.20)$$
$$R_1(x) = \sum_{m=1}^{8} H_m\,\mathrm{e}^{\alpha_m x}, \qquad R_2(x) = i\sum_{m=1}^{4} H_m\,\mathrm{e}^{\alpha_m x} - i\sum_{m=5}^{8} H_m\,\mathrm{e}^{\alpha_m x}.$$

Для четырех пар комплексно-сопряженных характеристических корней (2.19) введем соответствующие пары комплексно-сопряженных коэффициентов

$$H_m = (A_{0m} - iC_{0m})/2, \qquad H_{m+4} = \bar{H}_m = (A_{0m} + iC_{0m})/2, \qquad m = 1, \ldots, 4.$$

Здесь $A_{0m}$, $C_{0m}$ $(m = 1, \ldots, 4)$ — восемь неизвестных, которые в дальнейшем будем находить из граничных условий (1.4) или (1.5). В (2.10) показано, что сумма двух слагаемых в выражениях типа (2.20), соответствующих двум комплексно-сопряженным характеристическим корням $\alpha_m$ и $\alpha_{m+4}$ $(m = 1, \ldots, 4)$, является действительной функцией. Для более компактной записи последующих выражений введем вспомогательные постоянные $p_j$, $q_j$ и обозначения действительных и мнимых частей характеристических корней с четными индексами:

$$p_j = \frac{1}{k}\Big(\frac{\beta_{0j}}{R_j^{*2}} - \frac{b\alpha_{0j}}{\omega}\Big), \qquad q_j = \frac{1}{k}\Big(\frac{\alpha_{0j}}{R_j^{*2}} - \frac{b\beta_{0j}}{\omega}\Big), \qquad j = 1, 3, \qquad (2.21)$$
$$p_{2k} = p_{2k-1}, \qquad q_{2k} = q_{2k-1}, \qquad \alpha_{0(2k)} = \alpha_{0(2k-1)}, \qquad \beta_{0(2k)} = \beta_{0(2k-1)}, \qquad k = 1, 2.$$

С использованием свойства (2.10) и обозначений (2.21) общее решение в (2.20) для плоской полосы приводится к действительной форме. Если при этом в выражениях (2.20) переменную $x$ заменить на разность $x - h$ (что оказывается более удобным в дальнейшем для удовлетворения решения граничным условиям), то выражения для $P_j(x)$ и $R_j(x)$ примут вид

$$R_1(x) = \sum_{k=1}^{4}[A_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) - (-1)^k C_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)]\,\mathrm{e}^{(-1)^k\alpha_{0k}(h-x)},$$
$$R_2(x) = \sum_{k=1}^{4}[C_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) + (-1)^k A_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)]\,\mathrm{e}^{(-1)^k\alpha_{0k}(h-x)},$$
$$P_1(x) = \sum_{k=1}^{4}\{q_k[(-1)^k A_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) - C_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)] - \qquad (2.22)$$
$$- p_k[(-1)^k C_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) + A_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)]\}\,\mathrm{e}^{(-1)^k\alpha_{0k}(h-x)},$$
$$P_2(x) = \sum_{k=1}^{4}\{p_k[(-1)^k A_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) - C_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)] +$$
$$+ q_k[(-1)^k C_{0k}\cos\beta_{0k}(x-h) + A_{0k}\sin\beta_{0k}(x-h)]\}\,\mathrm{e}^{(-1)^k\alpha_{0k}(h-x)}.$$

Общие интегралы для термовязкоупругой полосы (2.11), (2.22) содержат 12 произвольных постоянных $A_{0j}$, $C_{0j}$, $D_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$, которые находятся из условий на границах плоской полосы. Полученные функции будем использовать при построении двух точных решений для стержня, сечение которого представляет собой треугольник.

**3. Первое точное решение.** Для построения решения используем специальную технику, основанную на переменных $\xi$ [7], которые определяются следующим образом. Обозначим через $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ радиус-векторы некоторого полюса и произвольной точки в сечении стержня $\Omega$, а через $\boldsymbol{r}_m$ — радиус-векторы вершин равностороннего треугольника $\Omega$ с высотой $2h$ и введем вспомогательные переменные $\xi$ и $\xi_k$:

$$\xi = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}, \qquad \xi_m = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_m)\boldsymbol{n}_m, \qquad m = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

($\boldsymbol{n}$ — некоторый единичный вектор; $\boldsymbol{n}_k$ — внутренние единичные нормали к сторонам треугольника $\Omega$, вершины и стороны которого пронумерованы против часовой стрелки). При таком определении переменных $\xi_m$ уравнения сторон треугольника задаются равенствами $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$. Для точек $(x, y) \in \Omega$ имеют место строгие неравенства $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$. Переменные $\xi$, $\xi_m$ и нормали $\boldsymbol{n}_m$ на плоскости $(x, y)$ обладают следующими свойствами, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3 = -1/2,\\ \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{n}_1 = \sqrt{3}/2, \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2h;\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}F = F(\xi) \in C^2(\Omega)\colon \qquad F_x = F'(\xi)n_x, \qquad F_y = F'(\xi)n_y,\\ F_{xx} = F''(\xi)n_x^2, \qquad F_{xy} = F''(\xi)n_xn_y, \qquad F_{yy} = F''(\xi)n_y^2.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $\boldsymbol{n}_j \times \boldsymbol{n}_k$ — единственная не равная нулю проекция векторного произведения на ось $z$. С помощью функций $R_j(\xi)$, $P_j(\xi)$, $Q_j(\xi)$, найденных по формулам (2.11), (2.22), можно построить частное решение системы (1.7)–(1.9)

$$\begin{gathered}U_j(x, y) = P_j(\xi)n_x - Q_j(\xi)n_y, \qquad V_j(x, y) = P_j(\xi)n_y + Q_j(\xi)n_x,\\ T_j(x, y) = R_j(\xi), \qquad j = 1, 2.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Конструкции функций $U_j$, $V_j$, $T_j$ в (3.4) принципиально различаются. Это объясняется тем, что $(U_j, V_j)$ — векторная функция, а $T_j$ — скалярная. Переход от $x$ к переменной $\xi$ равносилен повороту системы координат. При этом векторные функции преобразуются по законам векторной алгебры, а скалярные не изменяются, поэтому функции $(U_j, V_j)$ содержат проекции вектора нормали $n_x$ и $n_y$, учитывающие поворот, а функции $T_j$ не содержат эти проекции в подобной форме. В дальнейшем будут использоваться следующие свойства.

Свойство 1. Если используемые в выражениях (3.4) функции $P_j(x)$, $Q_j(x)$ и $R_j(x)$ являются решениями систем (2.1) и (2.2), т. е. имеют вид (2.11), (2.22), то $U_j$, $V_j$ и $T_j$ из (3.4) удовлетворяют всем дифференциальным уравнениям системы (1.7)–(1.9).

Свойство 2. В (3.4) функции $Q_j(\xi)$ как частные решения уравнений (2.2) могут быть выбраны независимо от частных решений $P_j(\xi)$ и $R_j(\xi)$.

Для доказательства свойств 1, 2 подставим $U_j$, $V_j$, $T_j$ из (3.4) в первые уравнения (1.7) и (1.9), для остальных уравнений все действия можно выполнить аналогично. Используя выражения для частных производных из (3.3), получим

$$\begin{gathered}\lambda_0(P_1''n_x^3 - Q_1''n_x^2n_y) + (\lambda + \mu)(P_1''n_xn_y^2 + Q_1''n_x^2n_y) + \mu(P_1''n_xn_y^2 - Q_1''n_y^3) + \\ + \omega\zeta_0(P_2''n_x^3 - Q_2''n_x^2n_y) + \omega(\zeta + \eta)(P_2''n_xn_y^2 + Q_2''n_x^2n_y) + \\ + \omega\eta(P_2''n_xn_y^2 - Q_2''n_y^3) - \gamma_eR_1'n_x - \omega\gamma_vR_2'n_x + \rho\omega^2(P_1n_x - Q_1n_y) = 0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$bR_1'' - k\omega(P_2'n_x^2 - Q_2'n_xn_y) - k\omega(P_2'n_y^2 + Q_2'n_xn_y) - \omega R_2 = 0.$$

Последнее уравнение в (3.5) после упрощений совпадает с третьим уравнением в (2.1). В первом уравнении (3.5) сгруппируем все слагаемые перед $P_j$ и $Q_j$:

$$P_1''\,n_x(\lambda_0 n_x^2 + (\lambda+\mu)n_y^2 + \mu n_y^2) + \omega P_2'' n_x(\zeta_0 n_x^2 + (\zeta+\eta)n_y^2 + \eta n_y^2) + \\ + \rho\omega^2 n_x P_1 - Q_1''\,n_y(\lambda_0 n_x^2 - (\lambda+\mu)n_x^2 + \mu n_y^2) - \gamma_e R_1' n_x - \omega\gamma_v R_2' n_x - \\ - \omega Q_2'' n_y(\zeta_0 n_x^2 - (\zeta+\eta)n_x^2 + \eta n_y^2) - \rho\omega^2 n_y Q_1 = 0. \quad (3.6)$$

Коэффициенты перед $P_j''$ и $Q_j''$ преобразуем по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_0 n_x^2 + (\lambda+\mu)n_y^2 + \mu n_y^2 &= \lambda_0 n_x^2 + \lambda_0 n_y^2 = \lambda_0, \\ \lambda_0 n_x^2 - (\lambda+\mu)n_x^2 + \mu n_y^2 &= \mu n_x^2 + \mu n_y^2 = \mu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя (3.7), уравнение (3.6) можно привести к виду

$$n_x(\lambda_0 P_1'' + \omega\zeta_0 P_2'' - \gamma_e R_1' - \omega\gamma_v R_2' + \rho\omega^2 P_1) - n_y(\mu Q_1'' + \omega\eta Q_2'' + \rho\omega^2 Q_1) = 0. \quad (3.8)$$

Так как $P_j$, $Q_j$ и $R_j$ удовлетворяют уравнениям (2.1) и (2.2) по построению, то выражения в круглых скобках в (3.8) равны нулю. Таким образом, свойства 1, 2 доказаны. Если в правых частях выражений (3.4) переменную $\xi$ заменить на любую из переменных $\xi_m$, определенных в (3.1), то полученные выражения для $U_j$, $V_j$ и $T_j$ будут удовлетворять системе (1.7)–(1.9).

При записи точного решения введем функции

$$P_j^{(a)}(\xi) = P_j(\xi) - P_j(2h-\xi), \qquad R_j^{(s)}(\xi) = R_j(\xi) + R_j(2h-\xi), \qquad j = 1, 2.$$

Аналогично вводятся функции $P_j^{(s)}(\xi)$, $R_j^{(a)}(\xi)$ и $Q_j^{(s)}(\xi)$, $Q_j^{(a)}(\xi)$. Верхний индекс $(s)$ или $(a)$ означает, что функция симметрична или антисимметрична относительно точки $\xi = h$, поэтому для этих функций и их производных выполняются равенства

$$\begin{aligned} &P_j^{(a)}(\xi) + P_j^{(a)}(2h-\xi) = 0, \qquad R_j^{(s)}(\xi) - R_j^{(s)}(2h-\xi) = 0, \qquad j = 1, 2, \\ &P_j^{(a)\prime}(\xi) - P_j^{(a)\prime}(2h-\xi) = 0, \qquad R_j^{(s)\prime}(\xi) + R_j^{(s)\prime}(2h-\xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если функции $P_j(\xi)$ и $R_j(\xi)$ совместно содержат восемь постоянных, то $P_j^{(s)}(\xi)$ и $R_j^{(a)}(\xi)$ содержат только четыре постоянные, а $Q_j^{(a)}(\xi)$ — две постоянные, которые обозначим через $F_1, \ldots, F_4$ и $G_1$, $G_2$:

$$F_1 = 2(A_{01} + A_{02}), \quad F_2 = 2(C_{01} + C_{02}), \quad F_3 = 2(A_{03} + A_{04}), \quad F_4 = 2(C_{03} + C_{04}), \\ G_1 = 2(D_1 + D_3), \qquad G_2 = 2(D_2 - D_4).$$

В дальнейшем потребуется конкретный вид функций $P_j^{(a)}(\xi)$ $Q_j^{(s)}(\xi)$ и $R_j^{(s)}(\xi)$. Для компактной записи этих функций введем обозначения

$$\begin{aligned} &\mathrm{coSh}_{0j}(\xi) = \cos\beta_{0j}(\xi-h)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{0j}(\xi-h), \qquad \mathrm{siCh}_{0j}(\xi) = \sin\beta_{0j}(\xi-h)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{0j}(\xi-h), \\ &\mathrm{coCh}_{0j}(\xi) = \cos\beta_{0j}(\xi-h)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{0j}(\xi-h), \qquad \mathrm{siSh}_{0j}(\xi) = \sin\beta_{0j}(\xi-h)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{0j}(\xi-h). \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений функции $P_j^{(a)}(\xi)$, $Q_j^{(s)}(\xi)$ и $R_j^{(s)}(\xi)$ записываются в виде

$$P_1^{(a)}(\xi) = \sum_{k=1}^{2}\{p_{2k-1}[F_{2k}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(\xi) - F_{2k-1}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(\xi)] - \\ - q_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(\xi) + F_{2k}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(\xi)]\},$$

$$P_2^{(a)}(\xi) = -\sum_{k=1}^{2}\{p_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(\xi) + F_{2k}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(\xi)] + \\ + q_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(\xi) - F_{2k}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(\xi)]\};$$

$$Q_1^{(s)}(\xi) = G_1\operatorname{coCh}_{00}(\xi) + G_2\operatorname{siSh}_{00}(\xi), \qquad Q_2^{(s)}(\xi) = G_2\operatorname{coCh}_{00}(\xi) - G_1\operatorname{siSh}_{00}(\xi); \tag{3.10}$$

$$R_1^{(s)}(\xi) = F_1\operatorname{coCh}_{01}(\xi) + F_2\operatorname{siSh}_{01}(\xi) + F_3\operatorname{coCh}_{03}(\xi) + F_4\operatorname{siSh}_{03}(\xi),$$

$$R_2^{(s)}(\xi) = F_2\operatorname{coCh}_{01}(\xi) - F_1\operatorname{siSh}_{01}(\xi) + F_4\operatorname{coCh}_{03}(\xi) - F_3\operatorname{siSh}_{03}(\xi).$$

Решение задачи (1.7)–(1.9) с граничными условиями (1.4) представим в виде сумм

$$U_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3}[P_j^{(a)}(\xi_k)n_{kx} - Q_j^{(s)}(\xi_k)n_{ky}], \qquad T_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3}R_j^{(s)}(\xi_k),$$

$$V_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3}[P_j^{(a)}(\xi_k)n_{ky} + Q_j^{(s)}(\xi_k)n_{kx}], \qquad j = 1,2. \tag{3.11}$$

В силу свойств 1, 2 функции $U_j$, $V_j$ и $T_j$ в (3.11) удовлетворяют уравнениям (1.7)–(1.9). Остается удовлетворить граничным условиям (1.4), которые предварительно необходимо преобразовать. Для этого нормальную составляющую перемещений на границе Г $u_n\big|_\Gamma = (un_x + vn_y)\big|_\Gamma$ запишем в виде

$$(U_jn_x + V_jn_y)\big|_\Gamma = u_{j0}, \qquad j = 1,2. \tag{3.12}$$

В данных задачах предполагается равноправие всех аналитических зависимостей, подобных (3.11), по отношению к сторонам равностороннего треугольника, поэтому достаточно, чтобы все граничные условия выполнялись на какой-либо одной стороне, например на стороне $\xi_3 = 0$. Тогда на двух других сторонах треугольника при $\xi_1 = 0$ или $\xi_2 = 0$ граничные условия будут выполнены автоматически. Для точек $(x,y)$ на стороне треугольника $\xi_3 = 0$ между переменными $\xi_1$ и $\xi_2$ имеем

$$\xi_3 = 0: \qquad \xi_1 + \xi_2 = 2h. \tag{3.13}$$

Подставляя $U_j$ и $V_j$ из (3.11) в (3.12) при $\xi_3 = 0$ с использованием (3.13), получим два уравнения

$$[P_j^{(a)}(\xi_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3) + P_j^{(a)}(2h-\xi_1)(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)] + P_j^{(a)}(0) + \\ + [Q_j^{(s)}(\xi_1)\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_3 + Q_j^{(s)}(2h-\xi_1)\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3] = u_{j0} \qquad (j=1,2).$$

Используя свойства (3.2) и (3.9), можно показать, что все слагаемые с переменной $\xi_1$ в квадратных скобках взаимно уничтожаются, поэтому

$$P_j^{(a)}(0) = u_{j0} \qquad (j=1,2). \tag{3.14}$$

Рассмотрим граничное условие в (1.4) для теплового потока на стороне $\xi_3 = 0$, которое после подстановки $T_j(x, y)$ из (3.11) принимает вид

$$[R_j^{(s)\prime}(\xi_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3) + R_j^{(s)\prime}(2h-\xi_1)(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)] + R_j^{(s)\prime}(0) = q_{j0}, \qquad j = 1, 2. \tag{3.15}$$

С помощью (3.2) и (3.9) можно доказать, что в (3.15) выражение в квадратных скобках равно нулю, и, следовательно,

$$R_j^{(s)\prime}(0) = q_{j0}, \qquad j = 1, 2. \tag{3.16}$$

Систему четырех уравнений (3.14), (3.16) относительно коэффициентов $F_1, \ldots, F_4$ представим в явном виде

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{2}\{p_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h) - F_{2k}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)] + \\
+ q_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h) + F_{2k}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]\} = u_{10}, \\
\sum_{k=1}^{2}\{p_{2k-1}[F_{2k-1}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h) + F_{2k}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)] + \\
+ q_{2k-1}[F_{2k}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h) - F_{2k-1}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]\} = u_{20}, \\
\sum_{k=1}^{2}\{F_{2k-1}[\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h) - \alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)] - \\
- F_{2k}[\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h) + \alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]\} = q_{10}, \\
\sum_{k=1}^{2}\{F_{2k-1}[\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h) + \alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)] + \\
+ F_{2k}[\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h) - \alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]\} = q_{20}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Решение линейной системы (3.17) на компьютере не вызывает затруднений. Остается выяснить, возможны ли случаи, когда данные уравнения не имеют решения. Покажем, что всегда определитель системы $\Delta_1^* > 0$. Используя свойства уравнений (3.17), введем вместо $F_1^*, \ldots, F_4^*$ новые неизвестные комплексы $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= F_1\operatorname{siCh}_{01}(h) - F_2\operatorname{coSh}_{01}(h), \qquad & x_2 &= F_1\operatorname{coSh}_{01}(h) + F_2\operatorname{siCh}_{01}(h), \\
x_3 &= F_3\operatorname{siCh}_{03}(h) - F_4\operatorname{coSh}_{03}(h), \qquad & x_4 &= F_3\operatorname{coSh}_{03}(h) + F_4\operatorname{siCh}_{03}(h).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

В обозначениях (3.18) система (3.17) упрощается:

$$\begin{gathered}
\beta_{01}x_1 - \alpha_{01}x_2 + \beta_{03}x_3 - \alpha_{03}x_4 = q_{10}, \qquad \alpha_{01}x_1 + \beta_{01}x_2 + \alpha_{03}x_3 + \beta_{03}x_4 = q_{20}, \\
p_1x_1 + q_1x_2 + p_3x_3 + q_3x_4 = u_{10}, \qquad -q_1x_1 + p_1x_2 - q_3x_3 + p_3x_4 = u_{20}.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Определитель уравнений (3.19) можно записать в удобной форме. После ряда преобразований для $\Delta_1^*$ получим выражение

$$\begin{gathered}
\Delta_1^* = [(\operatorname{coSh}_{01}(h))^2 + (\operatorname{siCh}_{01}(h))^2][(\operatorname{coSh}_{03}(h))^2 + (\operatorname{siCh}_{03}(h))^2] \times \\
\times [(P_1^*R_3^*)^2 + (P_3^*R_1^*)^2 - 2(P_1^*P_3^*R_1^*R_3^*)\cos(\psi_1 - \psi_3 + \varphi_3 - \varphi_1)] > 0, \qquad (3.20) \\
P_j^* = \sqrt{p_j^2 + q_j^2}, \qquad \psi_j = \operatorname{arctg}(q_j/p_j), \qquad j = 1, 3.
\end{gathered}$$

Из замкнутой системы уравнений (3.17) найдем постоянные $F_1, \ldots, F_4$, явные выражения для которых из-за громоздкости не приводятся.

Граничное условие для касательного напряжения в (1.4) в соответствии с (1.1) можно записать следующим образом:

$$\tau_n\big|_\Gamma = 2\mu\gamma_n\big|_\Gamma + 2\eta\,\frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_n\Big|_\Gamma = \tau_{10}\cos\omega t + \tau_{20}\sin\omega t. \tag{3.21}$$

Если нормальное направление на границе $\Gamma$ определяется единичным вектором $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$, то касательное направление на $\Gamma$ для плоской задачи — единичным вектором $\boldsymbol{\tau} = (-n_y, n_x)$. Тогда выражение для касательной составляющей вектора перемещений на $\Gamma$ записывается в виде

$$u_\tau\big|_\Gamma = (-un_y + vn_x)\big|_\Gamma.$$

Так как в граничных условиях (1.4) на $\Gamma$ нормальная составляющая $u_n$ задается постоянной по точкам границы, то выражения для сдвига $\gamma_n$ и скорости сдвига $\partial\gamma_n/\partial t$ можно упростить:

$$2\gamma_n\big|_\Gamma = \frac{\partial u_\tau}{\partial n}\Big|_\Gamma = \Big(\frac{\partial v}{\partial n}\,n_x - \frac{\partial u}{\partial n}\,n_y\Big)\Big|_\Gamma, \qquad 2\,\frac{\partial}{\partial t}\,\gamma_n\Big|_\Gamma = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial v}{\partial n}\,n_x - \frac{\partial u}{\partial n}\,n_y\Big)\Big|_\Gamma.$$

В результате граничные условия (3.21) на стороне треугольника $\xi_3 = 0$ имеют вид

$$\begin{gathered}\mu\,\frac{\partial}{\partial n_3}\,(V_1n_{3x} - U_1n_{3y})\big|_{\xi_3=0} + \eta\omega\,\frac{\partial}{\partial n_3}\,(V_2n_{3x} - U_2n_{3y})\big|_{\xi_3=0} = \tau_{10},\\ \mu\,\frac{\partial}{\partial n_3}\,(V_2n_{3x} - U_2n_{3y})\big|_{\xi_3=0} - \eta\omega\,\frac{\partial}{\partial n_3}\,(V_1n_{3x} - U_1n_{3y})\big|_{\xi_3=0} = \tau_{20}.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Из (3.22) следует

$$\frac{\partial}{\partial n_3}\,(V_jn_{3x} - U_jn_{3y})\big|_{\xi_3=0} = \tau_j^*, \qquad \tau_j^* = \frac{\mu\tau_{j0} + (-1)^j\eta\omega\tau_{(3-j)0}}{\mu^2 + \eta^2\omega^2} \qquad (j = 1, 2). \tag{3.23}$$

Если в левую часть граничных условий (3.23) подставить $U_j$ и $V_j$ из (3.11), то получим два уравнения

$$\begin{multline}\frac{\partial}{\partial n_3}\,[-P_j^{(a)}(\xi_1)\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_3 - P_j^{(a)}(\xi_2)\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3 + \\ + Q_j^{(s)}(\xi_1)\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3 + Q_j^{(s)}(\xi_2)\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3 + Q_j^{(s)}(\xi_3)]\Big|_{\xi_3=0} = \tau_j^* \qquad (j = 1, 2).\end{multline} \tag{3.24}$$

Для упрощения (3.24) используем следующее свойство для производных:

$$\frac{\partial}{\partial n_3}\,F(\xi_j) = F'(\xi_j)\boldsymbol{n}_j\boldsymbol{n}_3 = -\frac{1}{2}\,F'(\xi_j) \quad (j = 1, 2), \qquad \frac{\partial}{\partial n_3}\,F(\xi_3) = F'(\xi_3). \tag{3.25}$$

С учетом (3.25) и свойств (3.2) граничные условия (3.24) приводятся к виду

$$\begin{multline}(\sqrt{3}/4)[P_j^{(a)\prime}(2h - \xi_1) - P_j^{(a)\prime}(\xi_1)] + \\ + (1/4)[Q_j^{(s)\prime}(\xi_1) + Q_j^{(s)\prime}(2h - \xi_1)] + Q_j^{(s)\prime}(0) = \tau_j^* \qquad (j = 1, 2).\end{multline} \tag{3.26}$$

В силу свойств (3.9) в (3.26) выражения в квадратных скобках равны нулю, и, следовательно,

$$Q_j^{(s)\prime}(0) = \tau_j^* \qquad (j = 1, 2).$$

Отсюда найдем коэффициенты $G_1$ и $G_2$:

$$G_1 = [\tau_1^*(\beta_{00}\,\mathrm{siCh}_{00}(h) - \alpha_{00}\,\mathrm{coSh}_{00}(h)) + \tau_2^*(\alpha_{00}\,\mathrm{siCh}_{00}(h) + \beta_{00}\,\mathrm{coSh}_{00}(h))]/\Delta_{q1},$$
$$G_2 = [\tau_2^*(\beta_{00}\,\mathrm{siCh}_{00}(h) - \alpha_{00}\,\mathrm{coSh}_{00}(h)) - \tau_1^*(\alpha_{00}\,\mathrm{siCh}_{00}(h) + \beta_{00}\,\mathrm{coSh}_{00}(h))]/\Delta_{q1}. \qquad (3.27)$$

Для определителя $\Delta_{q1}$ имеем выражение

$$\Delta_{q1} = (\alpha_{00}^2 + \beta_{00}^2)[\mathrm{ch}\,(\alpha_{00}2h) - \cos\,(\beta_{00}2h)]/2 > 0. \qquad (3.28)$$

Из неравенства (3.28) следует, что решение (3.27) единственное. Все выражения первого точного решения задачи (1.2)–(1.4) для вязкоупругого стержня, поперечное сечение которого представляет собой треугольник, громоздкие, поэтому не будем приводить его окончательный вид, укажем только последовательность вычислений, которые позволяют получить данное решение: перемещения $u$, $v$ и температура $T$ определяются из (1.6), амплитуды $U_j$, $V_j$ и $T_j$ — из (3.11), $P_j^{(a)}$, $R_j^{(s)}$ и $Q_j^{(s)}$ — из (3.10), коэффициенты $F_1, \ldots, F_4$ — из алгебраической системы (3.17), $G_1$, $G_2$ — из (3.20), определители $\Delta_1^*$, $\Delta_{q1}$ — из (3.20) и (3.28). При численной реализации решения все действия необходимо выполнять в обратном порядке: сначала вычислить определители $\Delta_1^*$, $\Delta_{q1}$ из (3.20) и (3.28), затем — коэффициенты $F_1, \ldots, F_4$ из (3.17) и $G_1$, $G_2$ из (3.27) и т. д. Перемещения $u$, $v$ и температура $T$ выражаются через непрерывные и дифференцируемые функции, поэтому по известным формулам линейной теории термовязкоупругости можно найти температуру, деформации и скорости деформаций, а из (1.1) — напряжения.

**4. Второе точное решение.** Решение задачи (1.7)–(1.9) с граничными условиями (1.5) представим в виде сумм

$$U_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3}[P_j^{(s)}(\xi_k)n_{kx} - Q_j^{(a)}(\xi_k)n_{ky}], \qquad T_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3} R_j^{(a)}(\xi_k),$$
$$V_j(x,y) = \sum_{k=1}^{3}[P_j^{(s)}(\xi_k)n_{ky} + Q_j^{(a)}(\xi_k)n_{kx}], \qquad j = 1, 2, \qquad (4.1)$$

где

$$P_1^{(s)}(\xi) = \sum_{k=1}^{2}\{p_{2k-1}[F_{2k}^*\,\mathrm{coCh}_{0(2k-1)}(\xi) - F_{2k-1}^*\,\mathrm{siSh}_{0(2k-1)}(\xi)] - q_{2k-1}[F_{2k-1}^*\,\mathrm{coCh}_{0(2k-1)}(\xi) + F_{2k}^*\,\mathrm{siSh}_{0(2k-1)}(\xi)]\},$$

$$P_2^{(s)}(\xi) = \sum_{k=1}^{2}\{q_{2k-1}[F_{2k-1}^*\,\mathrm{siSh}_{0(2k-1)}(\xi) - F_{2k}^*\,\mathrm{coCh}_{0(2k-1)}(\xi)] - p_{2k-1}[F_{2k-1}^*\,\mathrm{coCh}_{0(2k-1)}(\xi) + F_{2k}^*\,\mathrm{siSh}_{0(2k-1)}(\xi)]\},$$

$$Q_1^{(a)}(\xi) = G_1^*\,\mathrm{coSh}_{00}(\xi) + G_2^*\,\mathrm{siCh}_{00}(\xi), \qquad Q_2^{(a)}(\xi) = G_2^*\,\mathrm{coSh}_{00}(\xi) - G_1^*\,\mathrm{siCh}_{00}(\xi),$$

$$R_1^{(a)}(\xi) = F_1^*\,\mathrm{coSh}_{01}(\xi) + F_2^*\,\mathrm{siCh}_{01}(\xi) + F_3^*\,\mathrm{coSh}_{03}(\xi) + F_4^*\,\mathrm{siCh}_{03}(\xi),$$

$$R_2^{(a)}(\xi) = F_2^*\,\mathrm{coSh}_{01}(\xi) - F_1^*\,\mathrm{siCh}_{01}(\xi) + F_4^*\,\mathrm{coSh}_{03}(\xi) - F_3^*\,\mathrm{siCh}_{03}(\xi),$$

$$F_1^* = 2(A_{01} - A_{02}), \qquad F_2^* = 2(C_{01} - C_{02}), \qquad F_3^* = 2(A_{03} - A_{04}),$$
$$F_4^* = 2(C_{03} - C_{04}), \qquad G_1^* = 2(D_1 - D_3), \qquad G_2^* = 2(D_2 + D_4).$$

При построении второго точного решения, когда граничные условия заданы в виде (1.5), из условия для касательной составляющей вектора перемещений $u_\tau\big|_\Gamma = (vn_x - un_y)\big|_\Gamma$ следует

$$(V_j n_x - U_j n_y)\big|_\Gamma = v_{j0}, \qquad j = 1, 2. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в (4.2), при $\xi_3 = 0$ получаем выражение

$$-[P_j^{(s)}(\xi_1)(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_3) + P_j^{(s)}(2h - \xi_1)(\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3)] + \\ + [Q_j^{(a)}(\xi_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3) + Q_j^{(a)}(2h - \xi_1)(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)] + Q_j^{(a)}(0) = v_{j0} \qquad (j = 1, 2). \tag{4.3}$$

С использованием свойств (3.2) и (3.9) можно показать, что выражения в квадратных скобках, содержащие переменную $\xi_1$, равны нулю, поэтому из (4.3) следует

$$Q_j^{(a)}(0) = v_{j0} \qquad (j = 1, 2). \tag{4.4}$$

Запишем два уравнения (4.4) относительно $G_1^*$ и $G_2^*$:

$$G_1^* \cos(\beta_{00}h)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{00}h) + G_2^* \sin(\beta_{00}h)\,\mathrm{ch}\,(\alpha_{00}h) = -v_{10},$$
$$-G_1^* \sin(\beta_{00}h)\,\mathrm{ch}\,(\alpha_{00}h) + G_2^* \cos(\beta_{00}h)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{00}h) = -v_{20}.$$

Определитель этих уравнений $\Delta_{q2} > 0$, поэтому данная система имеет решение

$$G_1^* = [v_{20} \sin(\beta_{00}h)\,\mathrm{ch}\,(\alpha_{00}h) - v_{10} \cos(\beta_{00}h)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{00}h)]/\Delta_{q2},$$
$$G_2^* = -[v_{10} \sin(\beta_{00}h)\,\mathrm{ch}\,(\alpha_{00}h) + v_{20} \cos(\beta_{00}h)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{00}h)]/\Delta_{q2},$$
$$\Delta_{q2} = \mathrm{ch}\,(2\alpha_{00}h) - \cos(2\beta_{00}h) > 0.$$

Для удовлетворения второму граничному условию в (1.5) преобразуем выражение для нормального напряжения. Так как на границе $\Gamma$ касательная составляющая $u_\tau$ постоянна, напряжение $\sigma_n\big|_\Gamma$ можно представить в виде

$$\sigma_n\big|_\Gamma = \lambda_0 \frac{\partial u_n}{\partial n}\Big|_\Gamma + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_\Gamma = \sigma_{10}\cos\omega t + \sigma_{20}\sin\omega t. \tag{4.5}$$

Подставляя $u_n\big|_\Gamma$ из выражения (3.12) в (4.5), получаем

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \frac{\partial}{\partial n_3}(U_1 n_{3x} + V_1 n_{3y})\big|_{\xi_3=0} + \zeta_0\omega \frac{\partial}{\partial n_3}(U_2 n_{3x} + V_2 n_{3y})\big|_{\xi_3=0} = \sigma_{10}, \\ &\lambda_0 \frac{\partial}{\partial n_3}(U_2 n_{3x} + V_2 n_{3y})\big|_{\xi_3=0} - \zeta_0\omega \frac{\partial}{\partial n_3}(U_1 n_{3x} + V_1 n_{3y})\big|_{\xi_3=0} = \sigma_{20}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует

$$\frac{\partial}{\partial n_3}(U_j n_{3x} + V_j n_{3y})\big|_{\xi_3=0} = N_j, \qquad N_j = \frac{\lambda_0\sigma_{j0} + (-1)^j\zeta_0\omega\sigma_{(3-j)\,0}}{\lambda_0^2 + \zeta_0^2\omega^2} \qquad (j = 1, 2). \tag{4.7}$$

Если в левую часть граничных условий (4.7) подставить $U_j$ и $V_j$ из (4.1), то получим два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial n_3}[P_j^{(s)}(\xi_1)\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3 + P_j^{(s)}(\xi_2)\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3 + P_j^{(s)}(\xi_3) + \\ + Q_j^{(a)}(\xi_1)\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_3 + Q_j^{(a)}(\xi_2)\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3]\big|_{\xi_3=0} = N_j \qquad (j = 1, 2). \tag{4.8}$$

С учетом свойств (3.2) и (3.23) граничные условия (4.8) принимают вид

$$(1/4)[P_j^{(s)\prime}(\xi_1)+P_j^{(s)\prime}(h-\xi_1)]+ \\ +(\sqrt{3}/4)[Q_j^{(a)\prime}(h-\xi_1)-Q_j^{(a)\prime}(\xi_1)]+P_j^{(s)\prime}(0)=N_j \qquad (j=1,2). \tag{4.9}$$

Из (3.9) следует, что выражения в квадратных скобках равны нулю, поэтому из (4.9) получаем два уравнения

$$P_j^{(s)\prime}(0)=N_j \qquad (j=1,2). \tag{4.10}$$

Остается удовлетворить граничному условию в (1.5) для температуры на стороне треугольника $\xi_3=0$, которое после подстановки $T_j(x,y)$ из (4.1) принимает вид

$$[R_j^{(a)}(\xi_1)+R_j^{(a)}(2h-\xi_1)]+R_j^{(a)}(0)=T_{j0}, \qquad j=1,2. \tag{4.11}$$

С помощью (3.9) можно показать, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Тогда из (4.11) получаем

$$R_j^{(a)}(0)=T_{j0}, \qquad j=1,2. \tag{4.12}$$

Систему четырех уравнений (4.10), (4.12) относительно коэффициентов $F_1^*,\dots,F_4^*$ запишем в явном виде

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{2}\{q_{2k-1}F_{2k-1}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)-\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]+ \\
+q_{2k-1}F_{2k}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)+\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]+ \\
+p_{2k-1}F_{2k}^*[\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)-\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]+ \\
+p_{2k-1}F_{2k-1}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)+\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]\}=N_1, \\
\sum_{k=1}^{2}\{q_{2k-1}F_{2k}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)-\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]- \\
-q_{2k-1}F_{2k-1}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)+\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]+ \\
+p_{2k-1}F_{2k-1}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)-\beta_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]+ \\
+p_{2k-1}F_{2k}^*[\alpha_{0(2k-1)}\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)+\beta_{0(2k-1)}\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)]\}=N_2, \\
\sum_{k=1}^{2}[F_{2k-1}^*\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)+F_{2k}^*\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]=-T_{10}, \\
\sum_{k=1}^{2}[F_{2k}^*\operatorname{coSh}_{0(2k-1)}(h)-F_{2k-1}^*\operatorname{siCh}_{0(2k-1)}(h)]=-T_{20}.
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Решение линейной системы четырех уравнений (4.13) на компьютере не вызывает затруднений. Остается выяснить, возможны ли случаи, когда данные уравнения не имеют решения. Докажем, что всегда определитель системы $\Delta_2^*>0$. Для записи определителя в удобной форме используем свойства уравнений (4.13) и вместо коэффициентов $F_1^*,\dots,F_4^*$ введем новые неизвестные комплексы $x_1^*,\dots,x_4^*$:

$$\begin{gathered}
x_1^*=F_1^*\operatorname{siCh}_{01}(h)-F_2^*\operatorname{coSh}_{01}(h), \qquad x_2^*=F_1^*\operatorname{coSh}_{01}(h)+F_2^*\operatorname{siCh}_{01}(h), \\
x_3^*=F_3^*\operatorname{siCh}_{03}(h)-F_4^*\operatorname{coSh}_{03}(h), \qquad x_4^*=F_3^*\operatorname{coSh}_{03}(h)+F_4^*\operatorname{siCh}_{03}(h).
\end{gathered} \tag{4.14}$$

В обозначениях (4.14) система (4.13) имеет более простой вид:

$$(p_1\alpha_{01} - q_1\beta_{01})x_1 + (p_1\beta_{01} + q_1\alpha_{01})x_2 + (p_3\alpha_{03} - q_3\beta_{03})x_3 + (p_3\beta_{03} + q_3\alpha_{03})x_4 = N_1,$$
$$(p_1\alpha_{01} - q_1\beta_{01})x_2 - (p_1\beta_{01} + q_1\alpha_{01})x_1 - (p_3\beta_{03} + q_3\alpha_{03})x_3 + (p_3\alpha_{03} - q_3\beta_{03})x_4 = N_2, \quad (4.15)$$
$$-x_1 - x_3 = -T_{20}, \qquad x_2 + x_4 = -T_{10}.$$

Определитель уравнений (4.15) можно записать в компактной форме. После ряда преобразований для $\Delta_2^*$ получим выражение

$$\Delta_2^* = [(\mathrm{coSh}_{01}(h))^2 + (\mathrm{siCh}_{01}(h))^2][(\mathrm{coSh}_{03}(h))^2 + (\mathrm{siCh}_{03}(h))^2] \times$$
$$\times [(q_1\beta_{01} - p_1\alpha_{01} - q_3\beta_{03} + p_3\alpha_{03})^2 + (p_1\beta_{01} + q_1\alpha_{01} - p_3\beta_{03} - q_3\alpha_{03})^2] > 0.$$

Из замкнутой системы уравнений (4.13) найдем постоянные $F_1^*, \ldots, F_4^*$, явные выражения для которых из-за громоздкости не приводятся.

В термовязкоупругом стержне возможно распространение одной температурной и двух упругих волн (сдвиговой и продольной). Характеристики этих волн определяются действительными и мнимыми частями корней $\alpha_j$ и $\beta_j$ ($j = 1, \ldots, 4$). Для того чтобы установить, какие корни соответствуют перечисленным волнам, в уравнении (2.13) коэффициенты связности и вязкости положим равными нулю ($k = \zeta_0 = 0$), т. е. $M_e = M_v = M_\zeta = 0$. Тогда из (2.14) найдем

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2b}}\,(1 + i), \qquad \alpha_{3,4} = \pm\sqrt{N_0\,\frac{\omega}{b}} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda_0}}\,.$$

Отсюда следует, что корни $\alpha_{1,2}$ определяют параметры температурной волны, а корни $\alpha_{3,4}$ — параметры продольной упругой волны. При этом следует учитывать, что на температурной волне в силу связности модели помимо температуры изменяются упругие деформации, а на продольной упругой волне изменяется также температура. Только сдвиговая волна не оказывает влияния на температурное поле. В общем случае скорости температурной $v_T$, сдвиговой $v_\mu$ и продольной $v_\lambda$ упругих волн могут быть вычислены по формулам

$$v_T = \omega/\beta_{01}, \qquad v_\mu = \omega/\beta_{00}, \qquad v_\lambda = \omega/\beta_{03}. \quad (4.16)$$

Длины этих волн определяются из выражений

$$L_T = 2\pi/\beta_{01}, \qquad L_\mu = 2\pi/\beta_{00}, \qquad L_\lambda = 2\pi/\beta_{03}. \quad (4.17)$$

Формулы (4.16), (4.17) и экспериментальные данные могут быть использованы для вычисления реологических характеристик термовязкоупругого материала. Например, до сих пор не определены коэффициенты вязкости многих твердых тел. Из формул для характеристических корней следует, что на температурное и деформационное поля существенное влияние оказывает безразмерный параметр $R_0$. Кроме того, с уменьшением коэффициента связности $k$ уменьшаются параметры $M_e$, $M_v$ и $R_0$. Таким образом, если параметр $R_0$ мал, то связностью в постановке задачи можно пренебречь, а если $R_0 \sim 1$ или $R_0 > 1$, то связность следует учитывать. Учет связности зависит также от необходимой точности вычислений при решении задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабешко В. А., Калинчук В. В.** Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 285–292.
2. **Ломазов В. А., Немировский Ю. В.** Учет термочувствительности в задаче диагностики термоупругих сред // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 176–184.

3. **Попов Г. Я.** Точные решения некоторых смешанных задач несвязной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 4. С. 694–704.
4. **Чернышов А. Д.** Динамические плоские краевые задачи для криволинейных термовязкоупругих тел // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 158–169.
5. **Рейнер М.** Реология. М.: Наука, 1965.
6. **Купрадзе В. Д.** Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
7. **Чернышов А. Д.** Решение плоской, осесимметричной и пространственной однофазной задачи Стефана // Инж.-физ. журн. 1974. Т. 27, № 2. С. 341–350.

*Поступила в редакцию 26/VI 2006 г.*