$l = 0$. При этом случаи точек B, C можно интерпретировать как вытеснение некоторой двухфазной смеси однофазной смесью (газом или жидкостью). Действительно, для точек B, C можно построить решение с разрывом при $\xi = 0$, для которого $V > 0$, причем при $\xi < 0$ реализуется однофазное течение, а при $\xi > 0$ — двухфазное.

Из рассмотренного примера видно, что в общем случае, когда при некотором давлении p_* система (14) обладает однофазным и двухфазным решениями, можно построить решение фильтрационной задачи со скачком при давлении p_*. На скачке будет происходить переход от однофазного течения к двухфазному.

Для нахождения конкретного аналитического вида $p = p(\xi)$ необходимо решить уравнения (16), (17). Если фазовые проницаемости линейно зависят от насыщенности и известны зависимости F, n_g, n_l, μ_g, μ_l от p, то квадратное относительно насыщенности s уравнение (17) решается в явном виде и можно выписать формальное неявное решение

$$\xi = \int dp/\Phi(p),$$

где $\Phi = \Phi(p)$ — явное выражение для правой части уравнения (16). При нелинейной зависимости f_l, f_g от s задача (16), (17) может решаться численными методами.

Полученные решения могут использоваться для описания процессов в газоконденсатных и газонефтяных месторождениях при их разработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
2. Гуревич Г.Р., Брусиловский А.И. Справочное пособие по расчету фазового состояния и свойств газоконденсатных смесей. — М.: Недра, 1984.
3. Басниев К.С., Бедриковецкий П.Г. Многофазное вытеснение смешивающихся жидкостей из пористых сред // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. Т. 3. — М.: ВИНИТИ, 1988.
4. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. — Л.: Химия, 1982.
5. Уэйлес С. Фазовые равновесия в химической технологии. В 2 частях. — М.: Мир, 1989.

г. Москва *Поступила 7/V 1993 г.*

УДК 532.546

А.М. Аметов

НАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Основные положения теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористой среде изложены в [1]. В настоящей работе приводится общее решение первой и второй краевых задач о фильтрации в трещинах.

1. Предположим, что в трещиновато-пористой среде, занимающей полупространство $x \geqslant 0$, давление равно нулю. С момента $t = 0$ на границе $x = 0$ давление начинает изменяться по закону $p_1(t,0) = f(t)$. Распределение давления в трещинах определяется из решения задачи [1]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \eta\,\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t}; \tag{1.1}$$

$$p_1(t,0) = f(t); \tag{1.2}$$

$$\varkappa\frac{\partial^2 p_1(0,x)}{\partial x^2} - Ap_1(0,x) = -Ap_2(0,x); \tag{1.3}$$

$$p_2(0,x) = 0,\ p_1(0,0) = f(0).$$

Здесь p_1, p_2 — давление в трещинах и блоках; $\varkappa$, η, A — коэффициенты, введенные в [1], там же было показано, что начальное распределение давления в трещинах должно находиться из задачи (1.3), решение которой

$$p_1(0,x) = f(0)\exp(-x/\sqrt{\eta}). \tag{1.4}$$

Легко проверяется утверждение: решение первой краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4) есть функция

$$p_1(t,x) = \frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^t f(u)\int_0^\infty \exp(-\varkappa(t-u)\beta^2/(1+\eta\beta^2))\,\frac{\beta\sin(x\beta)}{(1+\eta\beta^2)^2}\,d\beta du + \tag{1.5}$$
$$+ f(t)\exp(-x/\sqrt{\eta}).$$

При $\eta \to 0$ задача (1.1), (1.2), (1.4) превращается в первую краевую задачу для уравнения пьезопроводности [2, формула 861.21]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2},\ p_1(t,0) = f(t),\ p_1(0,x) = 0, \tag{1.6}$$

а ее решение — в решение задачи (1.6)

$$\lim_{\eta\to 0}\Big[\frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^t f(u)\int_0^\infty \exp(-\varkappa(t-u)\beta^2/(1+\eta\beta^2))\,\frac{\beta\sin(x\beta)}{(1+\eta\beta^2)^2}\,d\beta du +$$
$$+ f(t)\exp(-x/\sqrt{\eta})\Big] = \frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^t f(u)\int_0^\infty \exp(-\varkappa(t-u)\beta^2)\beta\sin(x\beta)d\beta du =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_0^t f(u)(t-u)^{-3/2}\exp(-x^2/4\varkappa(t-u))du.$$

Отметим, что давление в блоках определяется из уравнения [1]

$$p_2(t,x) = p_1(t,x) - \frac{\varkappa}{A}\frac{\partial^2 p_1(t,x)}{\partial x^2}.$$

2. Рассмотрим задачу притока к дренажной галерее. Тогда условия (1.2), (1.4) и решение (1.5) запишутся в виде

$$p_1(t,0) = p_0 = \mathrm{const},\ p_1(0,x) = p_0\exp(-x/\sqrt{\eta}), \tag{2.1}$$

$$p_1(t,x) = p_0\Big[1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{\varkappa t}{\eta}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\Big)\frac{\sin((x/\sqrt{\eta})\beta)}{\beta(1+\beta^2)}d\beta\Big].$$

Вычислим поток жидкости через границу $x = 0$. Продифференцировав выражение (2.1) по x при $x = 0$, получим

$$q = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{2p_0k_1}{\pi\sqrt{\eta}\mu}\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{\varkappa t}{\eta}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\Big)\frac{d\beta}{1+\beta^2}, \tag{2.2}$$

где k_1 — проницаемость трещин; μ — вязкость жидкости. Применяя метод Лапласа (см., например, [3]), найдем асимптотические выражения для давления (2.1) при малых x и потока (2.2) при $t \to \infty$:

$$p_1(t,x) \sim p_0\left(1 - \frac{x}{\sqrt{\pi \varkappa t}}\left(1 + \frac{\eta}{4\varkappa t}\right)\right), \; q \sim \frac{p_0}{\sqrt{\pi \varkappa t}}\left(1 + \frac{\eta}{4\varkappa t}\right). \tag{2.3}$$

Из выражений (2.3) видно, что при фильтрации в пористой среде ($\eta = 0$) давление будет больше, а поток меньше, чем в случае трещиновато-пористой среды. Это связано с тем, что вследствие обмена жидкостью между блоками и трещинами жидкость, поступающая к границе, частично выделяется ближайшими к ней блоками. Получается, что блоки являются «стоками» давления из трещин и «источниками» жидкости для трещин. При $t < \eta/\varkappa$ из зависимости (2.2) получим

$$q(t) \sim \frac{p_0 k_1}{\sqrt{\eta}\mu}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varkappa t}{\eta}\right). \tag{2.4}$$

3. Найдем распределение давления при заданном потоке жидкости через границу (вторая краевая задача). Для этого заменим граничное условие (1.2) на следующее:

$$\frac{\partial p_1(t,0)}{\partial x} = -\frac{\mu}{k_1}q(t). \tag{3.1}$$

Соответственно изменится и начальное условие (1.4):

$$p_1(0,x) = \frac{\mu}{k_1}q(0)\sqrt{\eta}\exp(-x/\sqrt{\eta}). \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что решение задачи (1.1), (3.1), (3.2) дается формулой

$$p_1(t,x) = \frac{2\varkappa\mu}{\pi k_1}\int_0^t q(u)\int_0^\infty \exp\left(-\varkappa(t-u)\frac{\beta^2}{1+\eta\beta^2}\right)\frac{\cos(x\beta)}{(1+\eta\beta^2)^2}d\beta du + \frac{\mu}{k_1}q(t)\sqrt{\eta}\exp(-x/\sqrt{\eta}). \tag{3.3}$$

При $q(t) = q_0 = \text{const}$ из зависимости (3.3) имеем

$$p_1(t,x) = \frac{\mu}{k_1}q_0\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\exp(-\varkappa t\beta^2/(1+\eta\beta^2))}{\beta^2}\frac{\cos(x\beta)}{1+\eta\beta^2}d\beta + \sqrt{\eta}\exp(-x/\sqrt{\eta})\right]. \tag{3.4}$$

При $t < \eta/\varkappa$ из соотношения (3.4) следует

$$p_1(t,0) \sim \frac{\mu}{k_1}q_0\sqrt{\eta}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varkappa t}{\eta}\right). \tag{3.5}$$

Сравнивая формулы (2.4) и (3.5), видим, что они подобны друг другу, так как последнюю можно преобразовать

$$q_0 \sim \frac{p_1(t,0)k_1}{\sqrt{\eta}\mu}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\varkappa t}{\eta}} \sim \frac{p_1(t,0)k_1}{\sqrt{\eta}\mu}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varkappa t}{\eta}\right),$$

и из них следует, что для поддержания постоянного потока жидкости через границу давление должно линейно возрастать, а при фиксированном давлении на галерее поток линейно убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.

2. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.
3. **Найфэ А.** Введение в теорию возмущений. — М.: Мир, 1984.

г. Ухта *Поступила 2/XI 1992 г., в окончательном варианте — 19/III 1993 г.*

УДК 534.222 + 539.374

Н.Н. Мягков

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Введение. При рассмотрении волновых задач в конденсированных средах необходимо, как известно, учитывать упругопластическое поведение, которое может быть описано сильнонелинейной и гистерезисной зависимостью напряжение сдвига — деформация сдвига или максвелловской моделью с нелинейным временем релаксации касательных напряжений. Такое поведение характерно не только для традиционных задач физики удара при нагружении с амплитудами от нескольких до десятков гигапаскалей [1], но и при значительно меньших амплитудах в металлах, когда существенны эффекты микропластичности [2,3] (так называемая «аномальная нелинейность» упругих сред), в полимерах с деструктивной пластичностью [3] и т.д. В большинстве практически интересных перечисленных случаев волны можно считать слабыми в смысле малости напряжения в волне по сравнению с модулем всестороннего сжатия.

Для решения задач распространения волн малой, но конечной амплитуды в гидродинамике развит [4,5] эффективный асимптотический метод многих масштабов, позволяющий из сложной исходной системы получить нелинейное уравнение, дающее равномерно пригодное первое приближение к решению исходной системы. Обнаружение в [6] с помощью этой техники способа факторизации исходной системы на систему независимых нелинейных уравнений, относящихся к различным семействам характеристик, позволило, кроме турбулентности Бюргерса в [6], рассмотреть задачи, в которых также существенно встречное взаимодействие волн, например акустический резонатор [7] и упругий слой [8].

В настоящей работе проведена факторизация системы уравнений нелинейного тела Максвелла, являющейся универсальной для описания динамического поведения конденсированных сред с упругопластической кинетикой, и получены приближенные системы независимых нелинейных уравнений для волн, относящихся к различным семействам продольных характеристик; волны связываются неявно через неоднородный сдвиг фаз. Вид уравнения для фазовой функции, описывающей взаимодействие вследствие упругопластичности, следует из рассмотрения задачи распространения плоской ударной волны по постоянному фону и в общем случае подсказан групповыми соображениями. Приближенные системы получены для неограниченной в поперечных направлениях среды и применимы для описания традиционных ударно-волновых экспериментов в слое (этот случай разобран более подробно) и для тонкого стержня с микропластической кинетикой деформирования.

Аналитически решена задача о самовоздействии плоской ударной волны при ее выходе на свободную поверхность для модели идеального упругопластического материала. Эта задача представляет значительный практический интерес, так как эксперименты по измерению профиля скорости