УДК 532.5 + 06

ОБТЕКАНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Ж. Карсян

Ростовский государственный университет путей сообщения, 344038 Ростов-на-Дону
E-mail: Agk16@yandex.ru

Рассмотрено нестационарное обтекание деформируемого сферического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса при заданной скорости набегающего потока. Определено гидродинамическое воздействие набегающего потока на тело с учетом малых радиальных перемещений поверхности тела. Учтено влияние деформации поверхности сферического тела на величину силы воздействия набегающего потока, в частности определена зависимость от времени малых радиальных перемещений поверхности обтекаемого тела, позволяющая минимизировать силовое воздействие набегающего потока.

Ключевые слова: вязкая жидкость, нестационарный поток, гидродинамическое воздействие, малые радиальные перемещения поверхности тела, приближение Стокса.

1. Известно, что подвижность поверхности тела рыб, морских животных уменьшает сопротивление потока жидкости и позволяет им развивать значительную скорость движения [1–6]. В работе [7] рассмотрено движение тела, вызванное деформациями его поверхности, приведено решение для эллипсоида вращения, вследствие деформации поверхности которого образуется бегущая волна с переменной амплитудой. В настоящей работе рассматривается осесимметричное обтекание неподвижного сферического тела с деформирующейся поверхностью нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности заданную скорость $\boldsymbol{U}(t) = U(t)\boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{x}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль потока. Исследуется влияние малых радиальных перемещений поверхности обтекаемого тела на величину силы воздействия на тело набегающего потока.

Для описания движения жидкости используются нестационарные уравнения Стокса и неразрывности в сферической системе координат для осесимметричного случая:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - {} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}V_\theta\Big); \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2\sin^2\theta}\Big); \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2V_r}{r} + \frac{V_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0, \qquad (1.3)$$

где $\boldsymbol{V}(V_r, V_\theta, V_\lambda)$ — вектор скорости; p — давление; $\nu = \mu/\rho$; μ — динамическая вязкость жидкости; V_r, V_θ — компоненты скорости в сферической системе координат; $V_\lambda = 0$ в силу симметрии обтекания.

Задача (1.1)–(1.3) рассматривается с учетом граничных условий в сферической системе координат, при этом полагаются заданными по времени малые радиальные перемещения поверхности сферического тела $\zeta(\theta, t)$. Граничные условия задаются на деформируемой поверхности сферического тела ($r = a + \zeta(\theta, t)$), но, поскольку радиальные перемещения поверхности обтекаемого тела полагаются бесконечно малыми $\zeta(\theta, t)/a \ll 1$, в процессе линеаризации граничные условия сносятся на недеформированную поверхность $r = a$. (Здесь a — радиус недеформированной сферы; $\zeta(\theta, t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i(t) P_i(\cos\theta)$ — зависимость от времени t малых радиальных перемещений поверхности сферы; $P_i(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.)

На поверхности сферы $r = a$ граничные условия имеют вид

$$V_r(r, \theta, t) = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \zeta(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \zeta(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}, \qquad V_\theta(r, \theta, t) = 0. \tag{1.4}$$

В предположении, что значение $\partial \zeta(\theta, t)/\partial \theta$ очень мало в силу малости радиальных перемещений поверхности сферы, граничные условия (1.4) принимают вид

$$V_r(r, \theta, t) = \frac{\partial \zeta(\theta, t)}{\partial t}, \qquad V_\theta(r, \theta, t) = 0.$$

В случае отсутствия малых радиальных перемещений поверхности сферы (рассматривается задача обтекания недеформируемой твердой сферы) граничные условия на поверхности сферы $r = a$ принимают вид

$$V_r(r, \theta, t)\big|_{r=a} = 0, \qquad V_\theta(r, \theta, t)\big|_{r=a} = 0.$$

На бесконечности $r \to \infty$ задаются скорость набегающего потока

$$V_r(r, \theta, t) \to U(t) \cos\theta, \qquad V_\theta(r, \theta, t) \to -U(t) \sin\theta$$

и давление

$$p \to p_0,$$

где p_0 — давление невозмущенного потока жидкости, удовлетворяющее соотношениям [8]

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\rho \frac{\partial V_r}{\partial t}, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = -\rho r \frac{\partial V_\theta}{\partial t}.$$

Начальные условия ($t = 0$) имеют вид

$$\boldsymbol{V}(r, \theta, t) = 0, \qquad \boldsymbol{U}(t) = 0, \qquad \zeta(\theta, t) = 0.$$

2. Решение задачи строится с помощью преобразования Лапласа по времени t и разложения искомых и заданных функций в ряды по полиномам Лежандра. В частности, выражения для компонент скорости и давления в трансформантах Лапласа ищем в виде

$$p = \Big(C_0 + \frac{C_1}{r}\Big) P_0(\cos\theta) + \Big(B_1 r + \frac{A_1}{r^2}\Big) P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

$$V_r = \frac{C_1}{\nu\rho\alpha r^2}\,P_0(\cos\theta) - \Big(\frac{B_1}{\nu\rho\alpha} - \frac{2A_1}{\nu\rho\alpha r^3}\Big)P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\,\frac{A_n}{\nu\rho\alpha r^{n+2}}\,P_n(\cos\theta) +$$
$$+\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha r}}\Big[\frac{D_0}{r^2}\,P_0(\cos\theta) + \frac{D_1}{r^2}\Big(\frac{1}{r} + \sqrt{\alpha}\Big)P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big)^{n+1}\Big(r^{n+1}\,\frac{D_n}{r^2}\,P_n(\cos\theta)\Big)\Big],$$
$$V_\theta = \frac{A_0}{\sin\theta} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}r}\,\frac{1}{r}\Big[D_0\sqrt{\alpha}\,\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{2}\,D_1\Big(\alpha + \frac{\sqrt{\alpha}}{r} + \frac{1}{r^2}\Big)\,\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} +$$
$$+\,D_2\Big(\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6} + \frac{\alpha}{2r} + \frac{\sqrt{\alpha}}{r^2} + \frac{1}{r^3}\Big)\,\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}\Big] +$$
$$+\,\frac{1}{\nu\rho\alpha}\Big[-\Big(\frac{A_1}{r^3} + B_1\Big)\,\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)A_n}{r^{n+2}}\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\Big] +$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_n r}{n(n+1)}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[r^{n+1}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big)^{n+1}\mathrm{e}^{-r\sqrt{\alpha}} + 2r^n\Big(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big)^{n+1}\mathrm{e}^{-r\sqrt{\alpha}}\ \Big]\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — неизвестные переменные, определяемые из граничных условий; $\alpha = \sigma/\nu$; σ — параметр преобразования Лапласа. С учетом граничных условий и условия на бесконечности составлена система, решение которой позволяет определить в трансформантах Лапласа радиальную, тангенциальную компоненты скорости и динамическое давление. По найденным давлению и компонентам скорости в трансформантах Лапласа определяются компоненты тензора напряжений. Проекция вектора силы, действующей на деформируемую сферу со стороны потока жидкости, на направление $\boldsymbol{x}_0$ в трансформантах Лапласа определяется по формуле [8]

$$W(\sigma) = 2\pi a^2\int_0^{\pi}\big(p_{rr}(\sigma)\cos\theta - p_{r\theta}(\sigma)\sin\theta\big)\sin\theta\,d\theta, \qquad (2.1)$$

где $p_{rr}(\sigma)$, $p_{r\theta}(\sigma)$ — компоненты тензора напряжений в трансформантах Лапласа. Подставляя в выражение (2.1) найденные значения компонент тензора напряжений, получаем формулу для определения в трансформантах Лапласа силового воздействия набегающего потока с учетом малых радиальных перемещений поверхности сферы:

$$W(\sigma) = 2U(\sigma)\pi\rho\nu a\Big(a^2\,\frac{\sigma}{\nu} + 3 + 3a\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}\ \Big) - 2\zeta_1(\sigma)\pi\rho\nu a\Big(a\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}\,\sigma + \sigma + \frac{a^2}{3}\,\frac{\sigma}{\nu}\,\sigma\Big). \qquad (2.2)$$

После обращения по Лапласу формула (2.2) принимает вид

$$W(t) = 6\pi a^2\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,\frac{dU(\tau)}{d\tau} + \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{dU(t)}{dt} + \frac{4}{3}\,\pi a^3\rho\,\frac{dU(t)}{dt} +$$
$$+\,6\pi a\nu\rho U(t) - 2\pi a^2\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,\frac{d^2\zeta_1(\tau)}{d\tau^2} - 2\pi a\rho\nu\,\frac{d\zeta_1(t)}{dt} + 2\pi\,\frac{a^3}{3}\,\rho\,\frac{d^2\zeta_1(t)}{dt^2}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) позволяет определить зависимость силы воздействия нестационарного потока вязкой несжимаемой жидкости с учетом малых радиальных перемещений поверхности сферы от времени t. В случае отсутствия малых радиальных перемещений поверхности сферы ($\zeta(\theta,t) = 0$) формула (2.3) принимает вид

$$W(t) = 6\pi a^2\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,\frac{dU(\tau)}{d\tau} + \frac{2}{3}\,\pi a^3\rho\,\frac{dU(t)}{dt} + \frac{4}{3}\,\pi a^3\rho\,\frac{dU(t)}{dt} + 6\pi a\nu\rho U(t), \qquad (2.4)$$

где $(2/3)\pi a^3\rho\, dU(t)/dt$ — сила присоединенных масс; $(4/3)\pi a^3\rho\, dU(t)/dt$ — сила инерции; $6\pi a\nu\rho U(t)$ — сила Стокса; $6\pi a^2\rho\sqrt{\dfrac{\nu}{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,\dfrac{dU(\tau)}{d\tau}$ — сила Бассе — Буссинеска [9, 10].

Задача об обтекании шара, движущегося неравномерно поступательно с заданной скоростью $V(t)$ в безграничной области, заполненной вязкой жидкостью, решена в работе [11]. Если не учитывать силу инерции, то решение задачи, полученное в настоящей работе, переходит в решение задачи Буссинеска [11]. При $t\to\infty$ формула (2.4) преобразуется в известную формулу Стокса [10] $W=6\pi a\nu\rho U_0$.

Минимизируем силовое воздействие набегающего потока за счет малых радиальных перемещений поверхности сферического тела. Рассмотрим случай обтекания нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости деформируемого сферического тела с заданной скоростью $U(t)=U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})$, где U_0, b — положительные постоянные, измеряемые в метрах в секунду и секундах в минус первой степени соответственно.

Полагая силовое воздействие равным нулю: $W(\sigma)=0$, из формулы (2.2) получаем

$$\zeta_1(\sigma)=\frac{3U(\sigma)}{\sigma}=\frac{3U_0 b}{\sigma^2(\sigma+b)}. \tag{2.5}$$

После обращения по Лапласу [12, 13] формула (2.5) принимает вид

$$\zeta_1(t)=3U_0(\mathrm{e}^{-bt}+bt-1). \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) позволяет определить зависимость от времени t малых радиальных перемещений поверхности сферы, при которых силовое воздействие набегающего потока жидкости на сферу равно нулю. При малых радиальных перемещениях поверхности сферы имеем

$$r=a+\zeta(\theta,t),$$

где $\zeta(\theta,t)=\zeta_1(t)P_1(\cos\theta)=3U_0(\mathrm{e}^{-bt}+bt-1)P_1(\cos\theta)$; гидродинамическое сопротивление сферы равно нулю.

В случае отсутствия малых радиальных перемещений поверхности сферы ($\zeta(\theta,t)=0$) получаем задачу об обтекании твердой сферической частицы нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости для случая заданной скорости набегающего потока, и формула (2.4) принимает вид

$$W(t)=6\rho a\pi U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})\nu+2\rho a^3\pi U_0 b\,\mathrm{e}^{-bt}\,\nu+ \\ +6\pi a^2\rho\sqrt{\nu/\pi}\,(-\operatorname{erf}(\sqrt{t}\sqrt{-b}))U_0\sqrt{\pi}\sqrt{-b}\;\mathrm{e}^{-bt}. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) позволяет оценить силу воздействия потока вязкой несжимаемой жидкости в зависимости от времени t. После обращения по Лапласу выражения для радиальной и тангенциальной компонент скорости, давления принимают вид

$$V_r=P_1(\cos\theta)\Big[U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})-\frac{a^3}{r^3}U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})-\frac{3a\nu}{r^3 b}U_0(bt-(1-\mathrm{e}^{-bt}))- \\ -\frac{3\sqrt{\nu}\,a^2}{r^3\sqrt{b}}U_0\Big(2\sqrt{\frac{bt}{\pi}}+I(\mathrm{e}^{-bt}\operatorname{erf}(I\sqrt{bt}))\Big)+ \\ +\frac{3a\nu U_0}{r^3 b}\Big(-\operatorname{erfc}\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)+\operatorname{erfc}\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)bt+Z_2^2\operatorname{erfc}\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)-\frac{Z_3}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-Z_1^2/4}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-bt}(A_1+B_1)\Big)+$$

$$
+\frac{3a\sqrt{\nu}}{r^2\sqrt{b}}\,U_0\Big(2\sqrt{\frac{bt}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-Z_1^2/4}-Z_2\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-bt}\,\Big(\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}-I\sqrt{bt}\,\Big)\,\mathrm{e}^{-Z_1 I}\,I-{}
$$

$$
-\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}+I\sqrt{bt}\,\Big)\,\mathrm{e}^{Z_1 I}\,I\Big)\Big)\Big],
$$

$$
V_\theta=\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\Big[U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})+\frac{a^3}{2r^3}\,U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})-\frac{3aU_0}{2r}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)+{}
$$

$$
+\frac{3aU_0}{2r}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-bt}(A_2+B_2)+\frac{3a\nu U_0}{2r^3b}\,(bt-(1-\mathrm{e}^{-bt}))-{}
$$

$$
-\Big(-\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)+\Big(bt+\frac{Z_2^2}{2}\Big)\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)-Z_3\,\mathrm{e}^{-Z_1^2/4}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-bt}(A_1+B_1)\Big)\frac{3a\nu U_0}{2r^3b}+{}
$$

$$
+\frac{3a^2\sqrt{\nu}\,U_0}{2r^3\sqrt{b}}\Big(2\sqrt{\frac{bt}{\pi}}+I(\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{erf}\,(I\sqrt{bt}\,))\Big)-{}
$$

$$
-\frac{3a\sqrt{\nu}\,U_0}{2r^2\sqrt{b}}\Big(2\sqrt{\frac{bt}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-Z_1^2/4}-Z_2\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}\Big)+\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{2}\Big(\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}-I\sqrt{bt}\Big)\frac{\mathrm{e}^{-IZ_2}}{-I}+{}
$$

$$
+\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}+I\sqrt{bt}\Big)\frac{\mathrm{e}^{IZ_2}}{I}\Big)\Big)\Big],
$$

$$
p=P_1(\cos\theta)\Big(-U_0br\rho\,\mathrm{e}^{-bt}-\frac{3a\nu\rho U_0}{2r^2}\,(1-\mathrm{e}^{-bt})-{}
$$

$$
-\frac{3\sqrt{\nu}\,\rho a^2U_0b}{2r^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{\sqrt{-b}}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{-b}\sqrt{t}\,)-\frac{a^3\rho}{2r^2}\,U_0b\,\mathrm{e}^{-bt}\Big),
$$

где

$$
Z_1=\frac{r-a}{\sqrt{t\nu}},\qquad Z_2=\frac{(r-a)\sqrt{b}}{\sqrt{\nu}},\qquad Z_3=\frac{(r-a)b\sqrt{t}}{\sqrt{\nu}},
$$

$$
A_1=\mathrm{e}^{-Z_2I}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}-I\sqrt{bt}\,\Big),
$$

$$
A_2=\mathrm{e}^{-i(r-a)\sqrt{b}/\sqrt{\nu}}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{r-a}{2\sqrt{t\nu}}-I\sqrt{b}\sqrt{t}\,\Big)=\mathrm{e}^{-iZ_2}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}-I\sqrt{bt}\,\Big),
$$

$$
B_1=\mathrm{e}^{Z_2I}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}+I\sqrt{bt}\,\Big),
$$

$$
B_2=\mathrm{e}^{i(r-a)\sqrt{b}/\sqrt{\nu}}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{r-a}{2\sqrt{t\nu}}+I\sqrt{b}\sqrt{t}\,\Big)=\mathrm{e}^{iZ_2}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{Z_1}{2}+I\sqrt{bt}\,\Big).
$$

Заключение. В работе получено аналитическое решение задачи о гидродинамическом воздействии нестационарного потока вязкой несжимаемой жидкости на деформируемое сферическое тело. При условии $U(t)=U_0(1-\mathrm{e}^{-bt})$ выведен закон изменения с течением времени формы тела, обеспечивающий нулевое силовое воздействие набегающего потока на сферу. Для случая отсутствия малых радиальных перемещений поверхности обтекаемого сферического тела получено решение задачи об обтекании неподвижной недеформируемой сферы нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gray J.** Studies of animal locomotion. 6. The propulsiv power of the dolphin // J. Exp. Biol. 1936. V. 13, N 2. P. 192–199.
2. **Kramer M. O.** The dolphins' secret // New Sci. 1960. V. 7, N 181. P. 1118–1120.
3. **Бабенко В. В., Гнитецкий Н. А., Козлов Л. Ф.** Предварительные результаты исследования упругих свойств кожи живых дельфинов // Бионика. 1969. Вып. 3. С. 12–19.
4. **Бабенко В. В.** Исследование упругости кожи живых дельфинов // Бионика. 1979. Вып. 13. С. 43–52.
5. **Логвинович Г. В.** Гидродинамика тонкого гибкого тела (оценка гидродинамики рыб) // Бионика. 1970. Вып. 4. С. 5–11.
6. **Логвинович Г. В.** Гидродинамика плавания рыб // Бионика. 1973. Вып. 7. С. 3–8.
7. **Ильгамов М. А., Федяев В. Л.** О движении деформируемого твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости // Рос. журн. биомеханики. 2003. Т. 7, № 1. С. 90–106.
8. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Наука, 1963. Т. 2.
9. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. Т. 5.
10. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
11. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
12. **Диткин В. А.** Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высш. шк., 1966.
13. **Лурье А. И.** Операционное исчисление. М.: Гостехтеоретиздат, 1951.

Поступила в редакцию 15/V 2012 г.,
в окончательном варианте — 26/III 2013 г.