

УДК 532; 536.66

## ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Р. Кэндэзэми, И. Мухэймин, Х. Б. Саим

Университет Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия  
E-mail: future990@gmail.com

С использованием группового анализа изучены характеристики теплопереноса несжимаемой ньютоновской жидкости, вязкость которой зависит от температуры, на вертикальной растягивающейся поверхности при наличии теплового излучения и химической реакции. Для описания потока теплового излучения в уравнении энергии используется приближение Росселенда, для учета возможности отсоса или вдува вертикальная поверхность полагается проницаемой. С использованием анализа группы Ли получены и преобразованы дифференциальные уравнения течения, которые решены численно с помощью схемы Рунге — Кутты — Джилла и метода стрельбы. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с ранее опубликованными данными для различных частных случаев задачи.

**Ключевые слова:** анализ группы Ли, химическая реакция, свободный конвективный поток, вязкость жидкости, зависящая от температуры, источник тепла, тепловое излучение.

**Введение.** Исследование теплопередачи теплового излучения от наклонной или вертикальной поверхности с учетом влияния зависимости вязкости жидкости от температуры имеет большое значение вследствие ее широкого применения в технологических приложениях. В настоящей работе к задаче о пограничном слое при свободной конвекции применяются методы симметрии, главное преимущество которых заключается в том, что они могут использоваться при решении нелинейных дифференциальных уравнений. Одним из свойств симметрии дифференциальных уравнений является существование непрерывных групп преобразований, при которых эти уравнения остаются инвариантными, т. е. группа симметрии отображает любое решение на другое решение. Решения, полученные с использованием свойства симметрии, достаточно часто используются, так как позволяют сократить число независимых переменных задачи.

В работе [1] впервые изучено установившееся движение жидкости, окружающей линейно растягивающуюся поверхность. Задача теплопередачи была решена в работе [2], в которой исследовались различные аспекты теплопередачи, происходящей в бесконечной жидкой среде, окружающей растягивающуюся пластину. В этих исследованиях поверхность пленки полагалась плоской и свободной от любых напряжений. Как известно, в пограничном слое поток отрывается в областях с неблагоприятным градиентом давления, что приводит к увеличению сопротивления тела, погруженного в поток, и оказывает негативное влияние на теплопередачу на поверхности этого тела. Для управления отрывом потока были развиты несколько методов. Отрыв можно предотвратить с помощью

отсоса, поскольку жидкость, обладающая низкой энергией, удаляется из пограничного слоя [3, 4]. Пристенное сдвиговое напряжение и, следовательно, сопротивление трения, наоборот, уменьшаются при вдуве. Интерес к исследованию свободной конвекции обусловлен необходимостью изучения течений, вызываемых плавучестью, в атмосфере, воде и таких квазитвердых телах, как земля. Изучение свободно-конвективных течений, вызываемых температурными перепадами, имеет большое значение для приложений в промышленности. Также плавучесть играет важную роль в случаях, когда разность температур на земле и в воздухе приводит к возникновению сложного течения в помещениях, например в проветриваемых и нагреваемых комнатах [5].

В работах [6, 7] изучалось свободно-конвективное течение во влажной пористой среде, в [8] исследовалось комбинированное вынужденное и свободно-конвективное течение вдоль полубесконечной пластины, простирающейся вертикально вверх и имеющей горизонтальный передний край. В работе [9] обнаружено устойчивое свободно-конвективное течение в пограничном слое на неизотермической вертикальной пластине. В [10–12] проведены исследования устойчивого свободно-конвективного течения в пограничном слое при перемещении вертикальных пластин с учетом эффекта сил плавучести. Эффекты излучения при наличии химической реакции имеют важные приложения в физике и инженерии, особенно в космической технике и высокотемпературных процессах. Недостаточно изучены эффекты излучения в пограничном слое, несмотря на то что они могут играть важную роль в управлении тепломассопереносом при производстве полимеров, когда качество конечного продукта в определенной степени зависит от факторов, управляющих тепловым нагревом. Высокотемпературная плазма, охлаждение ядерных реакторов, жидких металлических носителей, систем выработки энергии — некоторые важные применения лучистой теплопередачи от вертикальной стенки в серые теплопроводные жидкости [13–15].

В указанных выше работах вязкость жидкости полагалась постоянной. Однако известно, что физические свойства жидкости могут значительно меняться при изменении температуры. Для смазочных жидкостей выделение тепла, произведенного внутренним трением, сопровождается соответствующим повышением температуры и приводит к изменению вязкости жидкости, которая, таким образом, не может считаться постоянной. Увеличение температуры вызывает усиление локального переноса, уменьшение вязкости в пограничном слое и, следовательно, изменение скорости теплопередачи на стенке. Поэтому при описании поведения потока необходимо учитывать изменение вязкости для несжимаемых жидкостей. Согласно [16, 17] учет этого эффекта позволяет получить характеристики потока, существенно отличающиеся от характеристик, полученных в предположении постоянной вязкости. В работе [18] исследовалось МГД-течение жидкости с переменной вязкостью в пограничном слое на нагретой растягивающейся пластине. В [19] изучались эффекты теплового излучения и переменной вязкости жидкости в свободном конвективном течении и при теплопередаче на пористой растягивающейся поверхности.

Химическую реакцию можно рассматривать как гетерогенный или гомогенный процесс в зависимости от того, происходит она на поверхности раздела фаз или как объемная реакция единственной фазы. Существует ряд областей, в которых важную роль играет тепломассоперенос с учетом химической реакции и теплового излучения: проектирование оборудования для химического обогащения руд, формирование и рассеивание тумана, регулирование температуры и влажности на сельскохозяйственных угодьях, защита зерновых культур от вымерзания, производство холодильного оборудования для пищевой промышленности, охлаждение больших количеств воды в градирнях и т. д.

В настоящей работе впервые с использованием группового анализа группы Ли решается задача о тепломассопереносе в свободно-конвективном течении на растягивающейся пластине при различных параметрах.

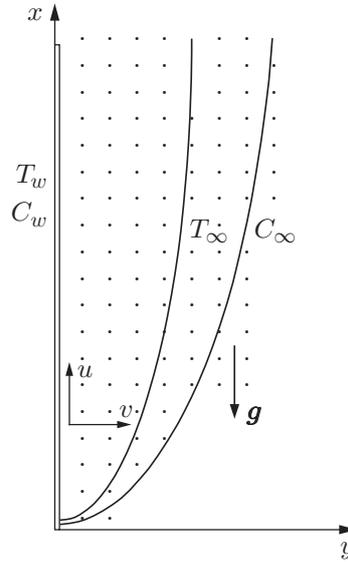


Рис. 1. Схема течения в пограничном слое на вертикальной растягивающейся поверхности

**1. Математическая модель.** Рассмотрим свободно-конвективное ламинарное течение в пограничном слое и тепломассоперенос вязкой несжимаемой жидкости на вертикальной растягивающейся пластине, начинающей движение из разреза в начале координат ( $x = 0, y = 0$ ) и перемещающейся с неоднородной скоростью  $U(x)$  при наличии теплового излучения (рис. 1). В уравнении импульса учитываются изменение плотности и эффект плавучести (приближение Буссинеска), концентрация веществ вдали от пластины  $C_\infty$  полагается бесконечно малой, член вязкой диссипации в уравнении энергии опускается (поскольку скорость жидкости очень мала).

В принятых обозначениях определяющие уравнения для рассматриваемого типа течения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty)]; \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varkappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{Q}{\rho c_p} (T_\infty - T); \tag{3}$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - k_1 C; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u = U(x), \quad v = -V(x), \quad C = C_w, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = 0, \quad C = C_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

В (1)–(5)  $u, v$  — проекции компонент скорости на оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $T, \varkappa$  — температура и теплопроводность жидкости;  $D$  — коэффициент диффузии;  $\beta, \beta^*$  — температурные коэффициенты линейного и объемного расширения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $T_\infty$  — температура жидкости на бесконечности;  $U(x)$  — скорость пластины;  $k_1$  — скорость химической реакции (при  $k_1 > 0$  происходит реакция разрушения, при  $k_1 = 0$  реакция отсутствует, при  $k_1 < 0$

имеет место реакция порождения);  $V(x)$  — скорость отсоса (вдува) жидкости;  $T_w$  — температура стенки; в приближении Росселенда для излучения [20]  $q_r = -(4\sigma_1/(3k^*)) \partial T^4/\partial y$ ;  $\sigma_1$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $k^*$  — коэффициент поглощения; член  $Q(T_\infty - T)$  представляет собой удельное количество произведенного (поглощенного) тепла;  $Q$  — константа, которая может иметь положительные или отрицательные значения.

Положим разность температур в потоке такой, что  $T^4$  можно разложить в ряд Тейлора. Тогда, разлагая  $T^4$  в окрестности  $T_\infty$  и пренебрегая более высокими порядками  $T$ , получаем  $T^4 \simeq 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4$ . Поэтому соотношение (3) принимает вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\rho c_p} (T_\infty - T). \quad (6)$$

Для  $u, v, \theta, \varphi$  введем следующие зависимости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}. \quad (7)$$

Выражения для скорости вдоль потока и скорости отсоса (вдува) принимаются в виде

$$U(x) = cx^m, \quad V(x) = V_0 x^{(m-1)/2}. \quad (8)$$

В (6)–(8)  $c > 0$  — постоянная;  $T_w$  — температура стенки; показатель степени  $m$  также является постоянным. Далее полагается  $c = 1$ .

Зависимость вязкости жидкости от температуры задается формулой [21]

$$\mu = \mu^* [a + b(T_w - T)],$$

где  $\mu^*$  — постоянное значение вязкости вдали от пластины;  $a, b > 0$  — константы. В работе [22] для вязкой жидкости предложена зависимость вязкости от температуры  $T$  в виде  $\mu = \mu_\infty/[1 + \gamma(T - T_\infty)]$  ( $\gamma$  — коэффициент, зависящий от тепловых характеристик жидкости;  $\mu_\infty$  — вязкость вдали от горячей пластины), не отличающаяся от формулировки, полученной в настоящей работе. Рассматриваемый диапазон температуры  $T_w - T_\infty = 0 \div 23$  °С.

Подставляя (7) в уравнения (2)–(4), получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \nu^* \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu^* [a + \zeta(1 - \theta)] \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + g \frac{\zeta}{b} (\beta \theta + \beta^* \varphi); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left( \frac{\kappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{Q(T_w - T_\infty)}{\rho c_p} \theta; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_1 (C_w - C_\infty) \varphi, \quad (11)$$

где  $\zeta = b(T_w - T_\infty)$ ;  $\nu^* = \mu^*/\rho$ .

Граничные условия (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^m, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_0 x^{(m-1)/2}, \quad \theta = \varphi = 1 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем упрощенную форму преобразований группы Ли, а именно группу масштабного преобразования [18]:

$$\begin{aligned} \Gamma: \quad x^* = x e^{\varepsilon \alpha_1}, \quad y^* = y e^{\varepsilon \alpha_2}, \quad \psi^* = \psi e^{\varepsilon \alpha_3}, \\ u^* = u e^{\varepsilon \alpha_4}, \quad v^* = v e^{\varepsilon \alpha_5}, \quad \theta^* = \theta e^{\varepsilon \alpha_6}, \quad \varphi^* = \varphi e^{\varepsilon \alpha_7}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) можно рассматривать как точечное преобразование, которое переводит координаты  $x, y, \psi, u, v, \theta, \varphi$  в координаты  $x^*, y^*, \psi^*, u^*, v^*, \theta^*, \varphi^*$ .

Подставляя (13) в (9)–(11), получаем

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)} \left( \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^*\partial y^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^{*2}} \right) &= -\zeta\nu^* e^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)} \left( \frac{\partial\theta^*}{\partial y^*} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^{*2}} \right) + \\ &+ \nu^*(a + \zeta) e^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3)} \frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^{*3}} - \zeta\nu^* e^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)} \theta^* \frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^{*3}} + \\ &+ g \frac{\zeta}{b} (\beta e^{-\varepsilon\alpha_6} \theta^* + \beta^* e^{-\varepsilon\alpha_7} \varphi^*); \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)} \left( \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial y^*} \right) &= \left( \frac{\varkappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right) e^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_6)} \frac{\partial^2\theta^*}{\partial y^{*2}} + \\ &+ \frac{Q(T_w - T_\infty)}{\rho c_p} e^{-\varepsilon\alpha_6} \theta^*; \quad (15) \end{aligned}$$

$$e^{\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_7)} \left( \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial\varphi^*}{\partial y^*} \right) = D e^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_7)} \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^{*2}} - k_1(C_w - C_\infty) e^{-\varepsilon\alpha_7} \varphi^*. \quad (16)$$

В случае если система инвариантна при группе преобразований  $\Gamma$ , имеем соотношения

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 3\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = -\alpha_6 = -\alpha_7,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 2\alpha_2 - \alpha_6 = -\alpha_6, \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_7 = 2\alpha_2 - \alpha_7 = -\alpha_7,$$

из которых следует  $\alpha_6 = \alpha_7 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1/4 = \alpha_3/3$ .

Из граничных условий (12) получаем  $\alpha_4 = m\alpha_1 = \alpha_1/2$ ,  $\alpha_5 = (m-1)\alpha_1/2 = -\alpha_1/4$  (при  $m = 1/2$ ). Тогда эти граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} &= (x^*)^{1/2}, \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} = -V_0(x^*)^{-1/4}, \quad \theta^* = \varphi^* = 1 \quad \text{при} \quad y^* = 0, \\ \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} &\rightarrow 0, \quad \theta^* \rightarrow 0, \quad \varphi^* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y^* \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Множество преобразований  $\Gamma$  сокращается:

$$\begin{aligned} x^* &= x e^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = y e^{\varepsilon\alpha_1/4}, \quad \psi^* = \psi e^{3\varepsilon\alpha_1/4}, \\ u^* &= u e^{\varepsilon\alpha_1/2}, \quad v^* = v e^{-\varepsilon\alpha_1/4}, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi. \end{aligned}$$

Разлагая данные функции в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon$  и удерживая члены до порядка  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} x^* - x &= x\varepsilon\alpha_1, \quad y^* - y = y\varepsilon\alpha_1/4, \quad \psi^* - \psi = 3\psi\varepsilon\alpha_1/4, \\ u^* - u &= u\varepsilon\alpha_1/2, \quad v^* - v = -v\varepsilon\alpha_1/4, \quad \theta^* - \theta = \varphi^* - \varphi = 0. \end{aligned}$$

Решая характеристические уравнения

$$\frac{dx}{x\alpha_1} = \frac{dy}{y\alpha_1/4} = \frac{d\psi}{3\psi\alpha_1/4} = \frac{du}{u\alpha_1/2} = \frac{dv}{-v\alpha_1/4} = \frac{d\theta}{0} = \frac{d\varphi}{0},$$

находим

$$y^*(x^*)^{-1/4} = \eta, \quad \psi^* = (x^*)^{3/4} F(\eta), \quad \theta^* = \theta(\eta), \quad \varphi^* = \varphi(\eta). \quad (18)$$

С помощью соотношений (18) выражения (14)–(16) запишем в форме

$$2F'^2 - 3FF'' = -4\zeta\nu^*\theta'F'' + 4(a + \zeta)\nu^*F''' - 4\zeta\nu^*\theta F''' + 4g(\zeta/b)(\beta\theta + \beta^*\varphi); \quad (19)$$

$$4\left(\frac{\varkappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*}\right)\theta'' + 4\frac{Q(T_w - T_\infty)}{\rho c_p}\theta + 3F\theta' = 0; \quad (20)$$

$$4D\varphi'' + 3F\varphi' - 4k_1(C_w - C_\infty)\varphi = 0. \quad (21)$$

Граничные условия (17) принимают вид

$$F' = 1, \quad F = -4V_0/3, \quad \theta = \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ F' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Введя для  $\eta$ ,  $F$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  в (19)–(21) преобразования

$$\eta = (g\beta/b)^{\alpha_1}(\nu^*)^{b_1}\eta^*, \quad F = (g\beta/b)^{\alpha'_1}(\nu^*)^{b'_1}F^*, \\ \theta = (g\beta/b)^{\alpha''_1}(\nu^*)^{b''_1}\theta^*, \quad \varphi = (g\beta^*/b)^{\alpha''_1}(\nu^*)^{b''_1}\varphi^*$$

и положив  $F^* = f$ ,  $\bar{\theta} = \theta$  и  $\bar{\varphi} = \varphi$ , уравнения (19)–(21) можно записать в форме

$$4(a + \zeta)F'''' - 4\zeta\theta F'''' - 4\zeta\theta F'' - 2F'^2 + 3FF'' + 4\zeta(\theta + \varphi) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{4}{\text{Pr}}\left(1 + \frac{4}{3N}\right)\theta'' + 4\delta\theta + 3F\theta' = 0; \quad (23)$$

$$4\varphi''/\text{Sc} + 3F\varphi' - 4\gamma_c\varphi = 0, \quad (24)$$

где  $\text{Pr} = \nu^*\rho c_p/\varkappa = \mu^*c_p/\varkappa$  — число Прандтля;  $\gamma_c = k_1(C_w - C_\infty)U/\nu^*$  — параметр химической реакции;  $N = \varkappa k^*/(4\sigma_1 T_\infty^3)$  — параметр теплового излучения;  $\delta = Q(T_w - T_\infty)U/(\rho c_p)$  — параметр источника ( $\delta > 0$ ) или стока ( $\delta < 0$ ) тепла;  $\text{Sc} = \nu^*/D$  — число Шмидта. Граничные условия принимают следующий вид:

$$f' = 1, \quad f = S, \quad \theta = \varphi = 1, \quad \text{при} \quad \eta^* = 0, \\ f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta^* \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Здесь  $S = -(4V_0/3)(g\beta_1/b)^{-1/4}\nu^{-1/2}$  ( $S > 0$  соответствует отсосу,  $S < 0$  — вдуву).

**2. Численное решение.** Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (22)–(24) с граничными условиями (25) решена с помощью схемы Рунге — Кутты — Джилля [23] и метода стрельбы при заданных параметрах  $\gamma_c$ ,  $\zeta$ ,  $\delta$ ,  $N$ . Численное решение получено с использованием программного обеспечения Matlab. Для того чтобы удовлетворить критерию сходимости  $10^{-7}$ , почти во всех случаях размер шага выбирался равным  $\Delta\eta = 0,001$ . Значение  $\eta_\infty$  вычислялось для каждой итерации:  $\eta_\infty = \eta_\infty + \Delta\eta$ . Максимальное значение  $\eta_\infty$  для каждой группы параметров  $\gamma_c$ ,  $\zeta$ ,  $N$  определялось из условия, что при  $\eta = 0$  значения неизвестных граничных условий меняются на итерации на величину, не превышающую  $10^{-7}$ . Эффекты тепломассопереноса изучались при различных значениях параметров химической реакции, интенсивности теплового излучения, источника и стока тепла, температурной зависимости вязкости при наличии отсоса или вдува. Далее подробно обсуждаются результаты.

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Для того чтобы проанализировать результаты, с использованием метода, описанного в п. 2, выполнен численный расчет при  $a = 1,0$ , значениях параметра химической реакции  $0,5 \leq \gamma_c \leq 2,0$ , параметра температурной зависимости вязкости  $0,5 \leq \zeta \leq 2,0$ , параметра отсоса (вдува)  $-2,0 \leq S \leq 1,5$ , числа Прандтля  $0,3 \leq \text{Pr} \leq 1,0$ , параметра источника и стока тепла  $-1,0 \leq \delta \leq 1,5$ , числа Шмидта  $0,22 \leq \text{Sc} \leq 0,78$ , параметра теплового излучения  $0,1 \leq N \leq 2,0$  и различных

Результаты расчета характеристик течения, полученные в настоящей работе и в работе [24] при  $\zeta = 0,8$ ,  $Pr = 1,0$  и различных значениях параметра  $N$

| $N$ | Данные [24] |              | Данные настоящей работы |              |
|-----|-------------|--------------|-------------------------|--------------|
|     | $f''(0)$    | $\theta'(0)$ | $f''(0)$                | $\theta'(0)$ |
| 0   | 0,5050      | 0,5469       | 0,504 874               | 0,546 651    |
| 0,5 | 0,5994      | 0,3107       | 0,599 663               | 0,310 587    |
| 1,0 | 0,6423      | 0,2466       | 0,642 271               | 0,246 579    |
| 2,0 | 0,6886      | 0,1900       | 0,688 591               | 0,189 882    |
| 3,0 | 0,7150      | 0,1615       | 0,714 878               | 0,161 489    |

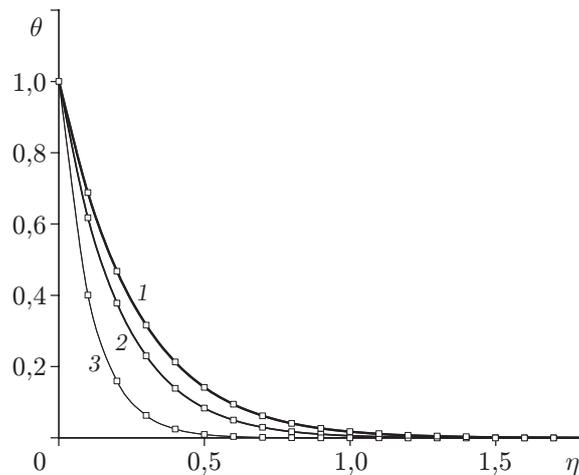


Рис. 2. Зависимость температуры от переменной  $\eta$  при различных значениях числа Прандтля:

1 —  $Pr = 0,3$ , 2 —  $Pr = 0,5$ , 3 —  $Pr = 1,0$ ; точки — данные работы [19], линии — результаты настоящей работы

значениях параметра термофореза  $\tau$  (рис. 2–8). Для тестирования используемого метода решения было проведено сравнение значений параметров, полученных в настоящей работе и в работе [24] (см. таблицу).

Для того чтобы установить точность численных расчетов, проведено сравнение результатов исследования при отсутствии собственной диффузии с результатами точного решения [19] (рис. 2), показавшее хорошее согласование данных. На рис. 2 видно, что для данного  $N$  при увеличении числа Прандтля температура уменьшается. Это происходит вследствие того, что при увеличении числа Прандтля уменьшается толщина теплового пограничного слоя (ср. кривые 1, 3 на рис. 2). Такое поведение означает, что при малом значении числа Прандтля жидкости более чувствительны к воздействию теплового излучения, чем при большом значении числа Прандтля.

На рис. 3 представлены безразмерные профили концентрации  $\varphi(\eta)$  при различных значениях параметра химической реакции  $\gamma_c$ . Видно, что при наличии однородного отсоса и источника тепла увеличение параметра химической реакции приводит к уменьшению концентрации жидкости вдоль поверхности. В случае отсоса химическая реакция замедляет изменение концентрации жидкости вдоль поверхности, тогда как скорость и температура жидкости слабо зависят от параметра  $\gamma_c$ . Установлено, что реакция разрушения оказывает более сильное влияние на профили концентрации, чем реакция порождения. В частности, концентрация жидкости постепенно уменьшается только в случае, если значение скорости химической реакции  $k_1$  превышает значение кинематической вязкости  $\nu$  жидкости. Такое

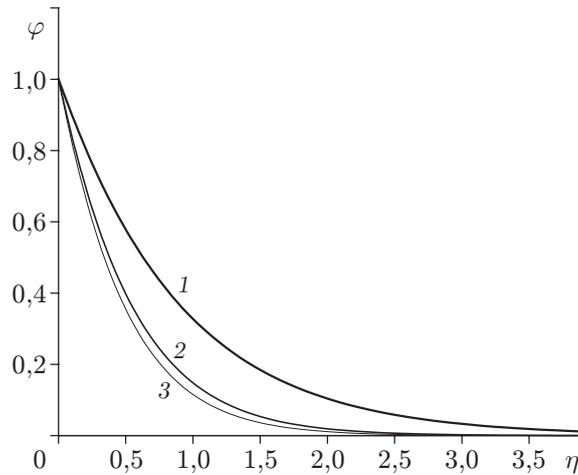


Рис. 3. Зависимость концентрации от переменной  $\eta$  при  $Sc = 0,67$ ,  $N = 0,1$ ,  $a = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\zeta = 0,5$  и различных значениях параметра химической реакции  $\gamma_c$ :  
1 —  $\gamma_c = 0,5$ , 2 —  $\gamma_c = 1,0$ , 3 —  $\gamma_c = 2,0$

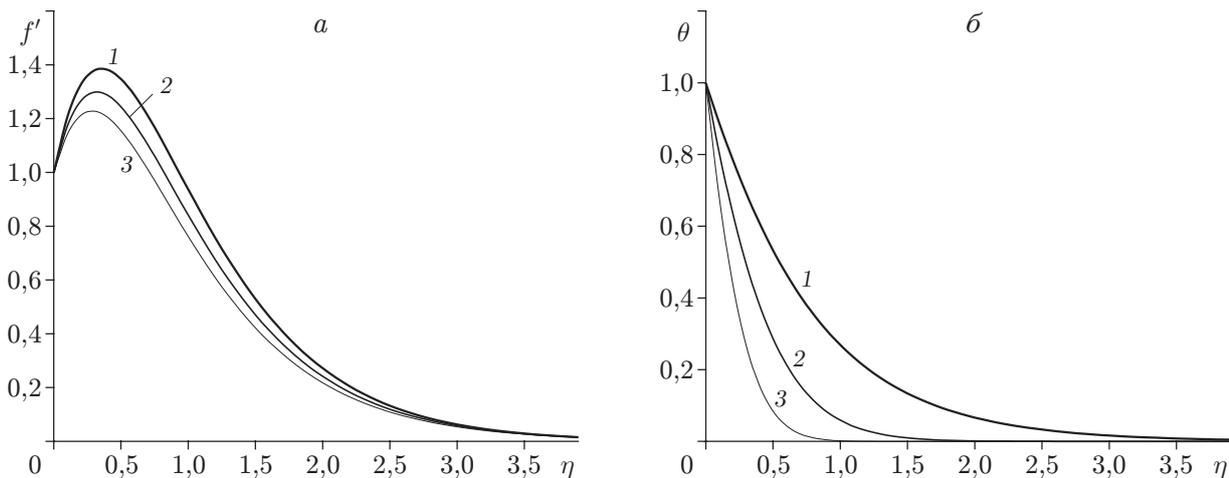


Рис. 4. Зависимости скорости (а) и температуры (б) от переменной  $\eta$  при  $\gamma_c = 1,0$ ,  $Sc = 0,67$ ,  $a = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\zeta = 0,5$  и различных значениях параметра теплового излучения  $N$ :  
1 —  $N = 0,1$ , 2 —  $N = 1,0$ , 3 —  $N = 2,0$

поведение обусловлено комбинированным воздействием теплового излучения и зависимости вязкости жидкости от температуры.

Влияние параметра теплового излучения  $N$  на профили скорости и температуры в пограничном слое показано на рис. 4. Установлено, что при наличии однородной химической реакции с увеличением параметра теплового излучения  $N$  скорость и температура жидкости уменьшаются, тогда как концентрация жидкости существенно не меняется. Это объясняется тем, что уменьшение величины  $N = \varkappa k^* / (4\sigma_1 T_\infty^3)$  для данных  $k^*$  и  $T_\infty$  означает уменьшение теплопроводности  $\varkappa$  в параметре теплового излучения Росселенда. Согласно уравнениям (2), (3) дивергенция потока теплового излучения  $\partial q_r / \partial y$  возрастает, тогда как теплопроводность  $\varkappa$  уменьшается, что в свою очередь приводит к увеличению величины теплового излучения, переданного жидкости. Следовательно, скорость движения жидкости и ее температура уменьшаются.

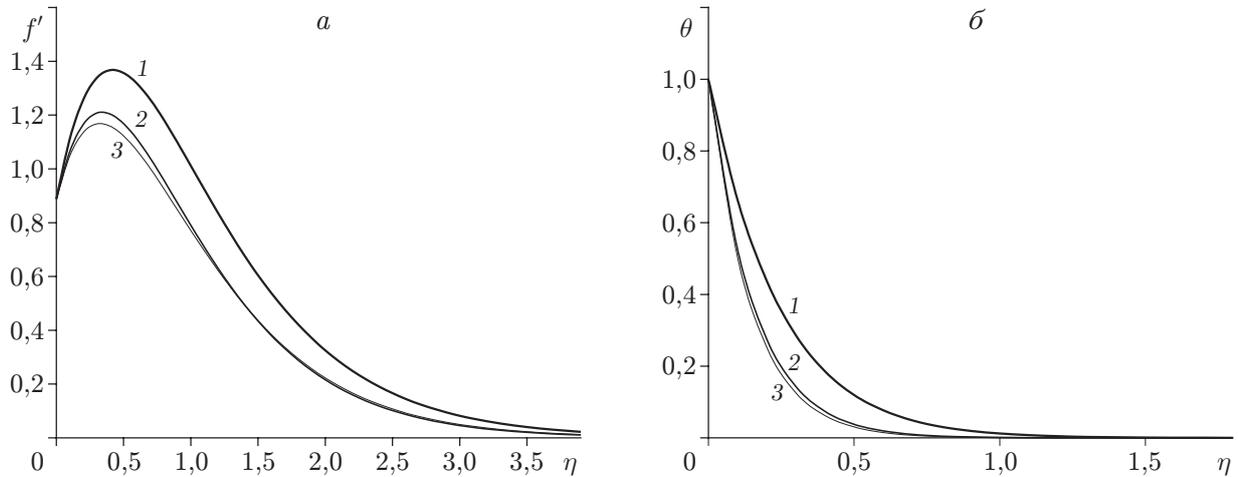


Рис. 5. Зависимости скорости (а) и температуры (б) от переменной  $\eta$  при  $\gamma_c = 1,0$ ,  $Sc = 0,67$ ,  $a = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $N = 0,1$ ,  $\zeta = 0,5$  и различных значениях параметра  $\delta$ :  
 1 —  $\delta = 1,5$ , 2 —  $\delta = 0,1$ , 3 —  $\delta = -1,0$

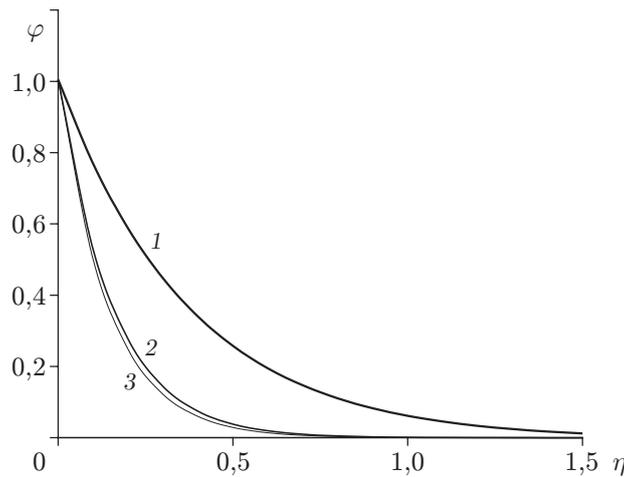


Рис. 6. Зависимость концентрации от переменной  $\eta$  при  $\gamma_c = 1,0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $a = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $N = 0,1$ ,  $\zeta = 0,5$  и различных значениях числа Шмидта:  
 1 —  $Sc = 0,22$ , 2 —  $Sc = 0,67$ , 3 —  $Sc = 0,78$

Таким образом, влияние теплового излучения более существенно при  $N \rightarrow 0$  ( $N \neq 0$ ), а при  $N \rightarrow \infty$  им можно пренебречь. Увеличение радиационного параметра означает высвобождение тепловой энергии из области течения, вследствие чего импульсный и тепловой пограничные слои становятся более тонкими, а скорость движения и температура жидкости уменьшаются.

На рис. 5 показано влияние источника ( $\delta > 0$ ) или стока ( $\delta < 0$ ) тепла в пограничном слое на поля скорости и температуры. Наличие в пограничном слое источника тепла приводит к увеличению скорости и температуры жидкости, что в свою очередь увеличивает эффект плавучести. Наличие в пограничном слое стока тепла приводит к поглощению энергии, вследствие чего скорость и температура жидкости уменьшаются.

На рис. 6 показано влияние числа Шмидта  $Sc$  на профиль концентрации. Видно, что при увеличении числа Шмидта скорость перемещения массы увеличивается. Следовательно, концентрация уменьшается с увеличением  $Sc$ . На рис. 6 видно, что при больших зна-

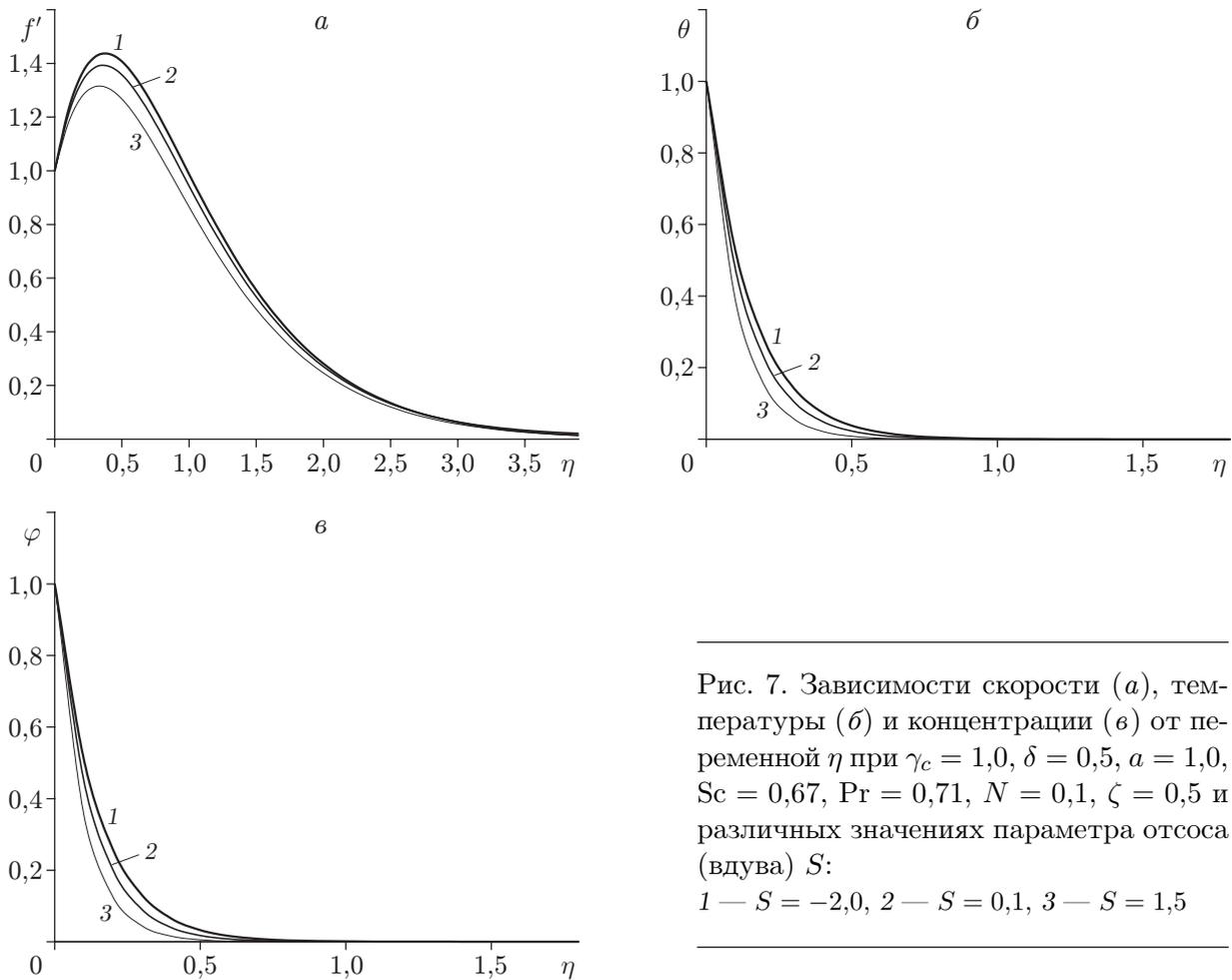


Рис. 7. Зависимости скорости (а), температуры (б) и концентрации (в) от переменной  $\eta$  при  $\gamma_c = 1,0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $a = 1,0$ ,  $Sc = 0,67$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $N = 0,1$ ,  $\zeta = 0,5$  и различных значениях параметра отсоса (вдува)  $S$ :  
 1 —  $S = -2,0$ , 2 —  $S = 0,1$ , 3 —  $S = 1,5$

чениях  $\eta$  концентрация  $\varphi(\eta)$  достигает своего предельного значения  $C_\infty$ . Из рис. 6 также следует, что безразмерная концентрация уменьшается с увеличением числа Шмидта. При умеренном изменении числа Шмидта толщина теплового пограничного слоя, скорость и температура жидкости изменяются незначительно.

На рис. 7 показано влияние параметра отсоса (вдува)  $S$  на профили скорости, температуры и концентрации в пограничном слое. Видно, что при увеличении параметра отсоса ( $S > 0$ ) скорость жидкости в области пограничного слоя уменьшается (см. рис. 7,а). Физическое объяснение такого поведения следующее. В случае отсоса нагретая жидкость, в которой действуют силы плавучести, перемещается к стенке, что тормозит жидкость вследствие влияния вязкости и приводит к уменьшению сдвигового напряжения на стенке. Из рис. 7,б,в следует, что при увеличении параметра отсоса ( $S > 0$ ) температура  $\theta(\eta)$  и концентрация  $\varphi(\eta)$  в пограничном слое также уменьшаются. Такое поведение обусловлено тем, что в случае отсоса жидкость приближается к поверхности и толщины теплового и концентрационного пограничных слоев уменьшаются. По сути, наличие пристенного отсоса приводит к уменьшению толщины теплового пограничного слоя и пограничного слоя растворенного вещества. Однако при наличии вдува поведение жидкости будет противоположным (см. рис. 7).

На рис. 8,а приведены профили скорости при различных значениях параметра температурной зависимости вязкости жидкости  $\zeta$ . Видно, что при наличии однородного теплово-

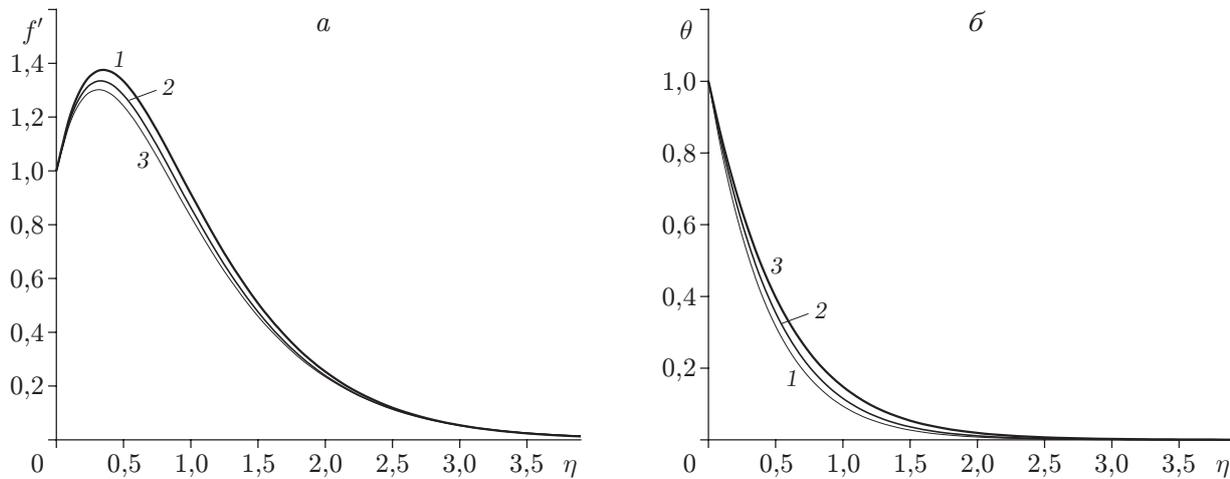


Рис. 8. Зависимости скорости (а) и температуры (б) от переменной  $\eta$  при  $\gamma_c = 1,0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $a = 1,0$ ,  $Sc = 0,67$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $N = 0,1$ ,  $S = 0,5$  и различных значениях вязкости  $\zeta$ :  
 1 —  $\zeta = 2,0$ , 2 —  $\zeta = 1,0$ , 3 —  $\zeta = 0,5$

го излучения с увеличением параметра  $\zeta$  скорость жидкости увеличивается при некоторых значениях  $\eta$ , за исключением областей вблизи стенки и вдали от нее ( $\eta = 5$ ), где скорость жидкости с увеличением значения  $\eta$  и параметра  $\zeta$  постепенно уменьшается. Это объясняется тем, что увеличение параметра  $\zeta$  приводит к уменьшению роста толщины граничного слоя. При стоке тепла поведение скорости меняется на противоположное.

На рис. 8,б показано изменение температурного поля  $\theta(\eta)$  при различных значениях  $\zeta$ . Из рис. 8,б следует, что увеличение параметра температурной зависимости вязкости жидкости  $\zeta$  приводит к уменьшению толщины теплового пограничного слоя и температуры  $\theta(\eta)$ . Следовательно, скорость частиц жидкости также уменьшается. Таким образом, частицы жидкости подвергаются воздействию двух сил, одна из которых обуславливает увеличение скорости жидкости вследствие уменьшения ее вязкости (с ростом  $\zeta$ ), другая — уменьшение скорости жидкости вследствие уменьшения температуры  $\theta$ . Вблизи поверхности, где температура  $\theta(\eta)$  высока, преобладает первая сила, вдали от поверхности, где температура  $\theta(\eta)$  низка, преобладает вторая сила. При стоке тепла поведение скорости меняется на противоположное.

**Заключение.** В результате анализа группы Ли найдена симметрия дифференциальных уравнений в частных производных, затем с использованием масштабного подобия и трансляционной симметрии полученные уравнения сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получены точные решения для трансляционной симметрии и численное решение масштабного подобия. На основе анализа результатов показано, что увеличение параметра температурной зависимости вязкости приводит к увеличению скорости потока и уменьшению температуры. Следует отметить, что температура воды уменьшается значительно быстрее температуры воздуха. Показано, что при наличии источника (стока) тепла химическая реакция разрушения оказывает более существенное влияние на поле течения и, таким образом, на скорость теплопереноса от пластины к жидкости. Установлено, что уменьшение концентрации вследствие увеличения числа Шмидта происходит постепенно.

Результаты проведенного исследования представляют интерес, поскольку течения на вертикальной растягивающейся поверхности имеют большое значение в технических приложениях и во многих транспортных процессах в природе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. Angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21, N 1. S. 645–647.
2. **Anderson H. I., Aarseth J. B., Dandapat B. S.** Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2000. V. 43, N 2. P. 69–74.
3. **Saikrishnan P., Roy S.** Non-uniform slot injection (suction) into steady laminar water boundary layers over (i) a cylinder and (ii) a sphere // *Intern. J. Engng Sci.* 2003. V. 41, N 1. P. 1351–1365.
4. **Roy S., Saikrishnan P.** Non-uniform slot injection (suction) into steady laminar water boundary layer flow over a rotating sphere // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2003. V. 46, N 2. P. 3389–3396.
5. **Elbashbeshy E. M. A., Bazid M. A. A.** Heat transfer in a porous medium over a stretching surface with internal heat generation and suction or injection // *Appl. Math. Comput.* 2004. V. 158, N 1. P. 799–807.
6. **Cheng P., Minkowycz W. J.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a disk // *J. Geophys. Res.* 1963. V. 82, N 2. P. 2040–2044.
7. **Cheng P.** The influence of lateral mass flux on a free convection boundary layers in saturated porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1977. V. 20, N 1. P. 201–206.
8. **Wilks G.** Combined forced and free convection flow on vertical surfaces // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1973. V. 16, N 10. P. 1958–1964.
9. **Boutros Y. Z., Abd-el-Malek M. B., Badran N. A.** Group theoretic approach for solving time-independent free convective boundary layer flow on a non-isothermal vertical flat plate // *Arch. Mech.* 1990. V. 42, N 2. P. 377–395.
10. **Chen T. S., Strobel F. A.** Buoyancy effects in boundary layer adjacent to a continuous moving horizontal flat plate // *J. Heat Transfer.* 1980. V. 102, N 1. P. 170–172.
11. **Ramachandran B. F., Armaly B. F., Chen T. S.** Correlation for laminar mixed convection on boundary layers adjacent to inclined continuous moving sheets // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1987. V. 30, N 2. P. 2196–2199.
12. **Lee S. L., Tsai J. S.** Cooling of a continuous moving sheet of finite thickness in the presence of natural convection // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1990. V. 33, N 3. P. 457–464.
13. **Hossain M. A., Takhar H. S.** Radiation effect on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1996. V. 31, N 1. P. 243–248.
14. **Takhar H. S., Gorla R. S. R., Soundalgekar V. M.** Radiation effects on MHD free convection flow of a gas past a semi-infinite vertical plate // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 1996. V. 6, N 2. P. 77.
15. **Hossain M. A., Alim M. A., Rees D. A.** The effect of radiation on free convection from a porous vertical plate // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1999. V. 42, N 1. P. 181–191.
16. **Gary J., Kassoy D. R., Tadjeran H., Zebib A.** The effects of significant viscosity variation on convective heat transport in water saturated porous medium // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 117, N 2. P. 233.
17. **Mehta K. N., Sood S.** Transient free convection flow with temperature-dependent viscosity in a fluid saturated porous medium // *Intern. J. Engng Sci.* 1992. V. 30, N 1. P. 1083–1087.
18. **Mukhopadhyay S., Layek G. C., Samad S. A.** Study of MHD boundary layer flow over a heated stretching sheet with variable viscosity // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48, N 2. P. 4460–4466.
19. **Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Effects of thermal radiation and variable fluid viscosity on free convective flow and heat transfer past a porous stretching surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 51, N 2. P. 2167–2178.

20. **Brewster M. Q.** Thermal radiative transfer properties. S. l.: John Wiley and Sons, 1992.
21. **Batchelor G. K.** An introduction to fluid dynamics. L.: Cambridge Univ. Press, 1987.
22. **Ling J. X., Dybbs A.** Forced convection over a flat plate submersed in a porous medium: variable viscosity case: Paper / Amer. Soc. Mech. Engrs. N 87-WA/HT-23. N. Y., 1987.
23. **Gill S.** A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. V. 47, iss. 1. P. 96–108.
24. **Hossain A., Khanafer M. K., Kambiz Vafai.** The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate // Intern. J. Thermal Sci. 2001. V. 40, N 1. P. 115–124.

*Поступила в редакцию 14/VII 2009 г.,  
в окончательном варианте — 14/IX 2009 г.*

---