

является компонентой сдвига и определяет степень деформации материала. При этом условию (12) может быть придана форма

$$I_1 = I_0 + \rho v_0^2 \varepsilon_{xy} \sin^2 \beta \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13)—различные формы необходимого условия деформации стружкообразования жестко-пластического тела в одной плоскости. Они показывают, что при таком виде деформации упрочнение среды равно инерционному напряжению и выражают связь между геометрическими характеристиками задачи, скоростью v_0 , мерой деформации и упрочнением среды.

Из соотношения (11) следует, что в жестко-пластической среде с произвольной степенью упрочнения деформация стружкообразования в одной плоскости невозможна, так как в этом случае $h \neq 0$. Соотношение (13) показывает, что такая деформация невозможна и в идеально жестко-пластической среде, так как при $I_1 = I_0$ величина $\rho v_0^2 \varepsilon_{xy} \sin^2 \beta = 0$. Следовательно, все решения [1-5] задачи резания о деформации в одной плоскости как идеально жестко-пластического тела, так и жестко-пластического тела с произвольной степенью упрочнения оказались построенными на несовместных предположениях.

При решении задач об установившемся пластическом течении с разрывным полем скоростей обычно используются уравнения равновесия. Пример решения задачи резания показал, что такое использование этих уравнений не оправдано, учет инерционной силы коренным образом изменил представления об этой задаче.

Поступила 5 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C. An Analysis of the Mechanics of Metal Cutting. Journal of Applied Physics, 1949, vol. 20, No. 11.
2. Ли Е. и Шаффер Б. Применение теории пластичности к проблемам механической обработки металлов, ИЛ, Механика, 1952, № 5.
3. Hill R. The Mechanics of Machining: A New Approach. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1954, vol 3, No. 1.
4. Shaw M., Cook N., Finnie I. The shear — Angle Relationship in Metal Cutting. Transactions of the ASME, 1953, vol. 75, No. 2.
5. Кобаяси и Томсен. Анализ процесса резания металлов. ИЛ, Тр. америк. общества инженеров-механиков. Конструирование и машиностроение, 1962, № 1.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Госиздат, 1956.

ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

Д. А. Гохфельд, П. И. Ермаков (Челябинск)

Задача о прочности толстостенной трубы при повторных воздействиях внутреннего давления и температурного поля имеет значение для энергостроения и некоторых других областей техники [1]. Ниже рассматривается решение этой задачи на основе теории приспособляемости. Как известно, эта теория позволяет, исходя из допущения об идеальной пластичности, определить условия, при которых повторные нагружения не будут приводить к знакопеременной или нарастающей пластической деформации. При ограниченном числе циклов, характерном для термоциклической нагрузки, отсутствие повторной пластической деформации может с некоторым приближением рассматриваться как условие прочности. Ползучесть и релаксация в данной работе не учитываются; предполагается, что длительность пребывания трубы в условиях высокой температуры относительно невелика.

1. Основные уравнения. Рассмотрим напряжения в длинном полом цилиндре с днищами. Для дальнейшего удобно использовать безразмерные величины; в частности, в приводимых ниже выражениях напряжения отнесены к значению предела текучести при некоторой начальной температуре.

Напряжения от внутреннего давления в трубе равны [2]

$$\sigma_r = p \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta = p \left(1 + \frac{1}{\rho}\right), \quad \sigma_z = p \left(p = \frac{P_a k}{\sigma_s (1 - k)}, \quad \rho = \frac{r^2}{b^2}, \quad k = \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (1.1)$$

Здесь p — параметр нагрузки; P_a — внутреннее давление; a , b , r — внутренний, наружный и текущий радиусы соответственно.

Примем, что труба находится под действием осесимметричного теплового поля, не изменяющегося по ее длине. Допуская квазистационарный режим нагрева и охлаждения, будем считать, что температура распределяется по логарифмическому закону

$$t = t_b + t_1 \frac{\ln p}{\ln k} \quad (t_1 = t_a - t_b) \quad (1.2)$$

Индексами отмечены значения температуры на соответствующих радиусах, t_1 — температурный перепад.

Возникающие тепловые напряжения определяются выражениями [2], которые могут быть приведены к следующему виду (q — параметр теплового поля):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q \left(1 - \frac{1}{p} + \delta \ln p \right), & \sigma_\theta &= -q \left[1 + \frac{1}{p} + \delta (2 + \ln p) \right] \\ \sigma_z &= -2q [1 + \delta (1 + \ln p)] & \left(q = t_1^0 \frac{k}{1-k}, \quad t_1^0 = \frac{\alpha E t_1}{2\sigma_s (1-\nu)}, \quad \delta = \frac{1-k}{k \ln k} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Состояние самонапряжения в твердом теле является функцией бесконечного числа параметров. При решении поставленной задачи будем считать, как это обычно принято, отличным от нуля только один из параметров m , а соответствующее ему состояние самонапряжения — подобным распределению тепловых напряжений (1.3). Такое допущение идет «в запас прочности», так как при этом получается нижняя оценка приспособляющих значений нагрузки и температуры [3].

Таким образом, суммарные напряжения в трубе определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p \left(1 - \frac{1}{p} \right) + (m - q) \left(1 - \frac{1}{p} + \delta \ln p \right) \\ \sigma_\theta &= p \left(1 + \frac{1}{p} \right) + (m - q) \left[1 + \frac{1}{p} + \delta (2 + \ln p) \right] \\ \sigma_z &= p + 2(m - q) [1 + \delta (1 + \ln p)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Примем, что предел текучести остается постоянным при $t \leq t_b$, а при более высокой температуре понижается по линейному закону

$$\sigma_{st} = \sigma_s [1 - n(t - t_b)] = \sigma_s (1 - \lambda q \delta \ln p), \quad \lambda = \frac{2(1-\nu)n\sigma_s}{\alpha E} \quad (1.5)$$

Тогда условие пластичности Губера—Мизеса (для безразмерных напряжений) будет иметь вид

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2(1 - \lambda q \delta \ln p)^2 \quad (1.6)$$

2. Область возможных состояний. Если выражения для напряжений (1.4) подставить в условие пластичности (1.6), получим уравнение семейства предельных поверхностей, ограничивающих области изменения параметров p , q , m , внутри которых деформации на соответствующих радиусах трубы будут упругими

$$a_{11}q^2 + a_{22}m^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}qm + 2a_{23}mp + 2a_{13}qp + 2a_{14}q + a_{44} = 0 \quad (2.1)$$

Коэффициенты уравнения (2.1) являются функциями текущего радиуса

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} - a_{14}^2, & a_{13} &= -a_{23} = -\frac{3}{p} \left(\frac{1}{p} + \delta \right), & a_{14} &= \lambda \delta \ln p \\ a_{22} &= -a_{12} = [1 + \delta (1 + \ln p)]^2 + 3 \left(\frac{1}{p} + \delta \right)^2, & a_{33} &= \frac{3}{p^2}, & a_{44} &= -1 \end{aligned}$$

Уравнение (2.1) определяет семейство эллиптических конусов, имеющих в качестве общей оси биссектрису координатного угла в плоскости $p = 0$. Координаты вершин конусов равны

$$q_0 = m_0 = \frac{1}{a_{14}} = \frac{1}{\lambda \delta \ln p} \quad (2.2)$$

Для точек трубы, расположенных на наружном радиусе ($p = 1$), как видно из (2.2), вершина удаляется в бесконечность, и из (2.1) получаем уравнение цилиндра

$$4(1 + \delta)^2 (q - m)^2 - 6(1 + \delta)(q - m)p + 3p^2 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

Область возможных (упругих) состояний [4] для трубы показана на фиг. 1. Она ограничена поверхностями конуса, построенного для значения $p = k$, и цилиндра (2.3). Поверхности семейства (2.1), соответствующие другим значениям текущего радиуса, расположены вне указанной области.

Вид предельных поверхностей определяется условием пластичности, а также принятыми допущениями относительно состояния самонапряжения и закона изменения предела текучести по температуре [3]. Аналогичное решение достаточно просто может быть получено на основе условия пластичности Сен-Венана. В этом случае вместо эллиптических конусов будем иметь шестигранные пирамиды, а вместо цилиндра — призму.

Рассматривая сечения области возможных состояний плоскостями $p = \text{const}$, получим следующие выражения, определяющие максимальные значения параметра теплового поля, при которых возможна приспособляемость:

при относительно малых давлениях

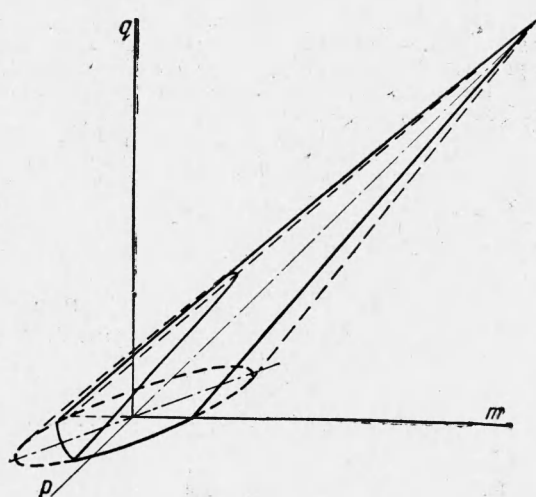
$$q_1^\circ = \frac{(1 + k\delta) \sqrt{4k^2 - 3p^2} - \lambda k(1 - k)}{2(1 + k\delta)^2 - 0.5\lambda^2(1 - k)^2} \quad (2.4)$$

при более высоких давлениях

$$q_2^\circ = \frac{3p - \sqrt{4 - 3p^2}}{4(1 + \delta)} - \frac{3p - \sqrt{4k^2 - 3p^2}}{4(1 + k\delta)} \quad (2.5)$$

Отсюда можно получить зависимость между температурой приспособляемости (наибольшим значением температурного перепада t_1 , при котором будет иметь место приспособляемость) и внутренним давлением в трубе, не изменяющимся в течение цикла. Соответствующие кривые даны на фиг. 2, где температура приспособляемости определяется как функция отношения внутреннего давления к его предельному значению (построение выполнено для отношения $a/b = 0.8$ и $\lambda = 0.17$). Кривая 1 определяет максимальные значения температурного перепада в трубе, при котором повторные нагревы и охлаждения не будут приводить к знакопеременной пластической деформации; кривая 2 — перепады, при которых эти

Фиг. 1. Область возможных (упругих) состояний

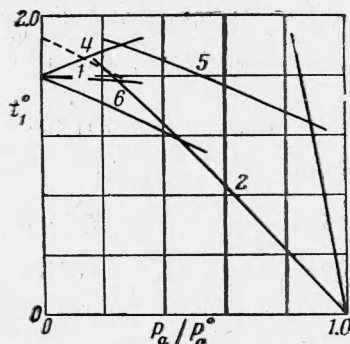


воздействия не вызовут нарастания пластической деформации с каждым циклом.

В литературе [6] отмечалась аналогия диаграммы приспособляемости (фиг. 2) с «конечным соотношением» между нагрузками в теории предельного состояния (по А. А. Ильюшину). Нетрудно заметить также, что кривые 1 и 2 аналогичны известной диаграмме Хэя, определяющей зависимость между постоянной и переменной составляющими предельных циклов напряжений.

Сечения области возможных состояний плоскостями $q = \text{const}$ дают возможность определить предельное давление для трубы и его зависимость от температурного перепада (кривая 3 на фиг. 2). Сопоставление кривых 1 и 2 с кривой 3 иллюстрирует влияние переменности теплового поля на прочность трубы.

Фиг. 2. Диаграмма приспособляемости



Как и следовало ожидать, предельное давление, определенное при помощи диаграммы возможных состояний, оказывается несколько меньшим, чем его точное значение [2]

$$p_a^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \ln a \quad (2.6)$$

Это отличие является следствием принятого допущения относительно распределения начальных напряжений и соответствует известному экстремальному принципу [3]. Оно получается небольшим и, естественно, уменьшающимся с ростом отношения внутреннего и наружного радиусов трубы (фиг. 3). Возможно, полученная нижняя оценка для температуры приспособляемости также мало (и тем меньше, чем больше отношение a/b) отличается от ее действительного значения.

Область упругих состояний позволяет также исследовать циклы, в которых не только температура, но и давление является переменным. Если принять пропорциональную зависимость между параметрами нагрузки и теплового поля, для их приспособляющих значений получим формулы

$$q_1^0 = \frac{(2k+3p)(1+k\delta) - \lambda k(1-k)}{4(1+k\delta)^2 - \lambda^2(1-k)^2} + \frac{\sqrt{[(2k+3p)(1+k\delta) - \lambda k(1-k)]^2 - 3p(k+p)[4(1+k\delta)^2 - \lambda^2(1-k)^2]}}{4(1+k\delta)^2 - \lambda^2(1-k)^2} \quad (2.7)$$

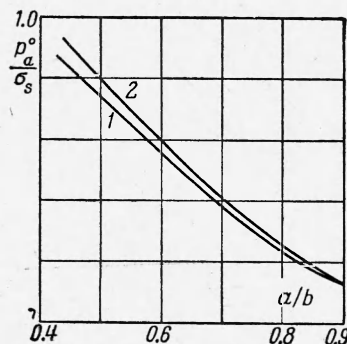
$$q_2^0 = \frac{3p - \sqrt{4 - 3p^2}}{4(1+\delta)} + \frac{k}{2(1+k\delta)} \quad (2.8)$$

На диаграмме приспособляемости (фиг. 2) этим выражениям соответствуют кривые 4 и 5. Отметим, что при относительно больших давлениях в данных условиях приспособляющая нагрузка совпадает с предельной.

Наконец, для цикла, соответствующего общей постановке задачи теории приспособляемости, когда давление и температура могут изменяться по произвольной программе, рассматривая сечения области возможных состояний плоскостями $m = \text{const}$ и исключая этот параметр из уравнений, получим

$$q_1^0 = \frac{2k - 3p + \sqrt{4k^2 - 3p^2}}{2[2(1+k\delta) + \lambda(1-k)]} \quad (2.9)$$

Этому выражению соответствует кривая 6 на фиг. 2. Формула для q_2^0 совпадает с (2.5).



Фиг. 3. Кривые предельных давлений: 1 — приближенно, по области возможных состояний; 2 — точно, по формуле (2.6)

На той же фигуре штриховыми линиями показано положение кривых для цикла с произвольной программой без учета влияния температуры на предел текучести ($\lambda=0$). Сравнение показывает, что влияние температуры на предел текучести в данной задаче сводится к некоторому уменьшению области приспособляемости; при этом изменяется только положение линии 6, определяющей условия знакопеременной деформации на внутреннем контуре сечения трубы.

Поступила 25 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. Изд-во Московск. ун-та, 1960.
2. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, II, Машгиз, 1958.
3. Койтер В. Новая общая теорема о приспособляемости упруго-пластических конструкций. Сб. пер. «Механика», ИЛ, 1957, № 3.
4. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Госстройиздат, 1954.
5. Гохфельд Д. А. О приспособляемости в условиях повторных тепловых воздействий. АН УССР, Сб. Тепловые напряжения в элементах турбомашин, 1961, вып. 1.
6. Розенблюм В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 6.