Геология и геофизика, 2023, т. 64, № 1, с. 112–122, doi: 10.15372/GiG2021185
Поступила в редакцию 20.08.2021, принята в печать 26.11.2021 *Опубликована онлайн: 19.12.2022*

УДК 517.968:519.612:004.021

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ (*разделение аномалий от разноглубинных источников*)

П.С. Мартышко, И.В. Ладовский, Д.В. Гемайдинов

Институт геофизики УрО РАН, 620016, Екатеринбург, ул. Амундсена, 100, Россия

Разработана методика фильтрационной томографии для выделения составляющих гравитационных аномалий от неоднородностей горизонтально-слоистой плотностной модели. Фильтрационный алгоритм разделения полей опирается на решение прямой и обратной задачи аналитического продолжения гармонических функций через горизонтальную граничную плоскость. При продолжении поля «вниз», в направлении порождающих его источников, используются регуляризующие алгоритмы. Последовательные пересчеты полей «вверх—вниз» относительно заданных глубин позволяют разделить исходное (суммарное) поле на сумму полей от слоев при надлежащем выборе параметра адаптивной регуляризации α. Для устойчивости численного решения обратной задачи аналитического продолжения наблюденного гравитационного поля на глубину использована схема регуляризации по Лаврентьеву с применением метода *L*-кривой (для выбора параметра адаптивной регуляризации). При заданных последовательных интервалах глубин и шаге сетки наблюденного поля получены значения параметра регуляризации сглаживающего функционала, оптимальные для разделения наблюденного поля на составляющие от разноглубинных слоев. Программная реализация многопоточных параллельных вычислений для семейства различных высот разработана и численно реализована на суперкомпьютере «Уран».

Потенциальные геофизические поля, численное аналитическое продолжение, регуляризирующий алгоритм, фильтрация и разделения полей, параллельные вычисления

CHOOSING A REGULARIZATION PARAMETER IN THE PROBLEM OF ANALYTICAL CONTINUATION OF GRAVITATIONAL FIELDS (*separation of anomalies generated by shallow and deep sources*)

P.S. Martyshko, I.V. Ladovskii, D.V. Gemaidinov

We present a filtration tomography technique for isolating components of the gravity field anomalies generated by inhomogeneities of the horizontally layered density model. The filtration algorithm of field separation relies on the solution of the forward and inverse problems of analytical continuation of harmonic functions through the horizontal boundary plane. We applied the regularizing algorithms to analytical continuation of the gravity field «down» to its generating sources. The fields successively recalculated upward and downward relative to preset depths allowed us to partition the initial (total) field as the sum of the fields generated in the layers based on the properly selected adaptive regularization parameter α. For the sake of stability of the inverse problem solution in the analytical continuation of the observed gravity field to a certain depth, we used the Lavrentiev regularization scheme involving the *L*-curve method (for selecting the adaptive regularization parameter). The smoothing regularization parameter values obtained from the preset successive depth intervals and grid step for the observed field are shown to be optimal for dividing the observed field into components corresponding to different depths. The developed algorithms for massively parallel computing systems and their application to a group of different heights were numerically implemented on the Uran supercomputer.

Potential geophysical fields, numerical analytical continuation, regularizing algorithm, filtration and separation of gravitational fields, parallel calculations

ВВЕДЕНИЕ

Обратная трехмерная линейная задача гравиметрии в общей постановке (найти распределение плотности в изучаемом объеме) является некорректной: не имеет единственного решения и неустойчива. С практической точки зрения представляет интерес задача определения источников гравитационного поля, локализованных в слое между заданными глубинами, и определения латеральной плотности в этом слое. Для решения этой задачи необходимо разработать алгоритм «извлечения» поля этого слоя из наблюденных данных. Метод сглаживания полей при их пересчете на различные высоты и последующего продолжения на глубину в направлении источников может использоваться для фильтрации. Пере-

✉e-mail: pmart3@.mail.ru

счет поля на несколько высот и аналитическое продолжение вниз позволяют выделить из суммарного поля аномалии от неоднородностей, локализованных в горизонтальных слоях на соответствующих глубинах. Подчеркнем, что обратная задача определения латерально-переменной плотности в слое имеет единственное решение [Новоселицкий,1965].

В настоящей работе для разделения аномалий наблюденного поля по глубине использована оригинальная методика повысотной трансформации [Мартышко, Пруткин, 2003; Мартышко и др., 2014; Федорова, Рублев, 2019]. На начальном этапе решается задача об ослаблении (или возможном исключении) влияния источников в слое от земной поверхности до некоторой глубины H. Для этого наблюденное поле с плоской поверхности Земли пересчитывается вверх на горизонтальный уровень с отметкой высоты H по интегральной формуле Пуассона (решение задачи Дирихле для верхнего полупространства). Пересчитанное на высоту поле становится более гладким и менее изрезанным, так что вклад приповерхностных локальных источников если и не устраняется совсем, то значительно ослабевает. Для того чтобы исключить влияние приповерхностных локальных источников до глубины H, пересчитанное поле с высоты H аналитически продолжается вниз на глубину, равную высоте H. Аналитическое продолжение поля в направлении источников находится из решения обратной задачи (инверсии интегрального оператора формулы Пуассона). Так как эта задача относится к классу некорректно поставленных, используются методы с применением регуляризации. В решении с регуляризацией подавляется высокочастотная часть нерегулярной помехи — и тем сильнее, чем больше величина параметра регуляризации. Изменяя этот параметр, мы изменяем ширину окна полосового фильтра высоких частот. И основная цель вычислительной процедуры для пересчетов «вверх—вниз» состоит в том, чтобы восстановленное поле на глубине было максимально свободно от гравитационного влияния вышележащей толщи. Тем самым мы получаем поле от источников, расположенных ниже границы H. Но для возможности дальнейшего количественного сопоставления все поля следует привести к одному уровню, т. е. редуцированное поле с глубины H следует вновь пересчитать вверх на уровень земной поверхности. Вычитая это поле из наблюденного, получаем поле от верхнего слоя до глубины H. Повторяя эту процедуру для различных значений высот и глубин, последовательно выделяем поля от слоев с заданными границами.

Фильтр повысотных трансформант — это разность последовательно пересчитанных полей между двумя указанными глубинами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Введем декартову прямоугольную систему координат, плоскость Oxy которой совпадает с земной поверхностью, а ось z направлена вниз по оси глубин. Предположим, что гравитирующие массы расположены в слое ниже горизонтальной плоскости $z = H > 0$. На этой глубине гравитационное поле обозначим через $u(x, y, H)$ и примем его в качестве граничной функции задачи Дирихле для полубесконечной (вышележащей) области. По значениям на границе решение задачи Дирихле восстанавливает гармоническую функцию поля всюду выше плоскости $z = H$. Так, для точек верхнего полупространства $z = \zeta < 0$, $-\zeta = |\zeta|$ решение для $U(x, y, \zeta)$ можно записать через интеграл Пуассона:

$$U(x,y,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H-\zeta}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(H-\zeta)^2\right]^{3/2}}\, u(x',y',H)\,dx'dy'. \tag{1}$$

В частности, если граничная плоскость $z = H = 0$ находится на уровне земной поверхности, то из (1) получаем стандартную формулу решения задачи Дирихле для верхнего полупространства [Тихонов, Самарский, 1972; Мудрецова, Веселов, 1990]

$$U(x,y,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\zeta|}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(\zeta)^2\right]^{3/2}}\, u(x',y',0)\,dx'dy'. \tag{2}$$

В практике гравитационного моделирования мы имеем распределение гравитационных аномалий на земной поверхности, это известная функция $g(x, y)$. Пересчет поля на высоту $z = -H$ рассчитывается по интегральной формуле прямой задачи (2) для функции $U(x, y, -H)$. Аналитическое продолжение пересчитанного поля $U(x, y, -H)$ вниз на глубину $z = H$ находится из решения интегрального уравнения Фредгольма (1) относительно неизвестной функции $u(x, y, H)$. Обратная задача аналитического продолжения относится к классу некорректно поставленных задач, и для ее решения требуется обязательная регуляризация. Для сопоставления с исходным полем $g(x, y)$ аналитическая часть продолженного поля вновь пересчитывается на уровень земной поверхности $z = \zeta = 0$ по интегральной формуле (1):

$$u(x,y,H) \Rightarrow U(x,y,0) = u(x,y,0).$$

Полученное решение предполагает отсутствие гравитирующих масс выше глубины *H*. И если аналитическая часть общего поля порождается слоем источников ниже глубины *H*, то оставшаяся часть поля будет связана исключительно с источниками верхнего слоя.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЕЙ НА ГЛУБИНУ

Редуцированные аномалии $g(x, y)$ наблюденного гравитационного поля (далее поле *g*) заданы на конечном участке площади (например, в картографическом прямоугольнике $\{D(x,y) \in R : a \le x \le b,$ $c \le y \le d,\ z = 0\}$). Пересчет измеренного на земной поверхности поля вверх на уровень $z = -H$ реализуется по формуле Пуассона, но заданной в конечных пределах:

$$U(x,y,-H) = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} \frac{H}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2\right]^{3/2}}\, g(x',y')dx'dy'. \tag{3}$$

Искажения, связанные с интегрированием в (3) по конечной области *D* наиболее значительны вблизи границ этой области. Поэтому с целью уменьшения искажений из измеренного поля $g(x, y)$ предварительно, т. е. до пересчета поля вверх, вычитается решение двумерной задачи Дирихле для внешности прямоугольника *D* с тем, чтобы поле за контуром интегрирования стало близким к нулю. Это даст возможность заменить в (3) конечные пределы интегрирования (*a*, *b*, *c*, *d*) на бесконечные $(-\infty, +\infty)$.

Для пересчета поля вниз из формул Пуассона (1) и (3) получаем интегральное уравнения Фредгольма первого рода, восстанавливающее аналитическую часть поля на глубине $z = +H$ по его значению на высоте $\zeta = -H$:

$$Ku = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{2H}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2H)^2\right]^{3/2}}\, u(x',y',H)dx'dy' = U(x,y,-H). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) (если существует) принимается за аналитическое продолжение поля с высоты $\zeta = -H$ на глубину $z = +H$:

$$u(x,y,+H) = K^{-1}U(x,y,-H). \tag{5}$$

Аналитическая часть поля с глубины $+H$ пересчитывается на уровень земной поверхности $z = 0$ по формуле прямой задачи (1):

$$u(x,y,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{H}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2\right]^{3/2}}\, u(x',y',H)dx'dy'. \tag{6}$$

В области гармоничности функции продолжение по любому замкнутому контуру возвращается к своим исходным значениям. Это означает, что восстановленная функция аналитического продолжения (6) на земной поверхности $u(x, y, 0)$ совпадает с исходным полем $g(x, y)$. Свойство консервативности гармонических функций далее будет использоваться в качестве естественного «граничного условия» при инверсии интегрального оператора уравнения Фредгольма (4), (5).

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

В настоящей работе исходной информацией для задачи пересчета (3) наблюденного поля $g(x, y)$ на высоту $z = -H$ использованы данные о гравитационных аномалиях в редукции Буге для фрагмента Уральского региона, расположенного в пределах градусной картографической трапеции в координатах 60—68° с.ш., 48—72° в.д. Численные значения аномального гравитационного поля заданы с шагом 1 км. Цифровой массив (долгота × широта) размером (1302 × 969) сеточных элементов, оформленный в виде карты гравитационного поля WGM 2012 миллионного масштаба, получен с интернет-портала [Bonvalot et al., 2012].

Гравитационные аномалии $g(x, y)$, редуцированные на «плоскую» земную поверхность, заданы на равномерной прямоугольной сетке $M \times N$. Для сглаживания и пересчета поля с поверхности Земли на высоту $\zeta = -H$ по формуле (3) предусмотрено расширение области исходных данных практически до бесконечных пределов. Непрерывное продолжение исходного поля за границы картографического контура реализовано путем численного решения внутренней задачи Дирихле для кольцевой области [Черноскутов, 2017]: внутренний контур ограничивает область задания наблюденного поля; внешний контур выбирается исходя из априорного условия скорости затухания поля на бесконечности. В пределах исходного контура вводится поправка за граничные условия задачи Дирихле; разностное поле в кольцевой области близко к нулю. Приведение поля g к асимптотическим нулевым значениям в расширенной области используется для вычисления интеграла (3) в бесконечных пределах.

Зададим арифметический вектор поля $g(x, y)$ в расширенной области:

$$g(x,y) = g(M,N) = g_i\,,\quad i = (1, MN).$$

Дискретный аналог формулы Пуассона (3) и уравнения (4) на сетке поля приводит к матричной форме задачи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). По интегральной формуле прямой задачи (3) вычисляем вектор пересчитанного поля на высоте $\zeta = -H$:

$$U(x,y,-H) = U(M,N) = U_i\,.$$

Сеточная аппроксимация интегрального оператора обратной задачи (4) по квадратурным формулам образует вектор искомых неизвестных $u(M, N)$ и квадратную (симметричную) матрицу оператора $K[MN \times MN]$:

$$u(x,y,+H) = u(M,N) = u_j\,,\quad j = (1, MN);$$

$$K\left[(x-x'), (y-y'), 2H\right] = K_{i,j}\left(\left[2H\right]\right),\ \ i,j = (1, MN).$$

Для решения СЛАУ

$$K_{i,j}\left(\left[2H\right]\right) \times u_j(+H) = U_i(-H)$$

используется простая регуляризация сдвигом по схеме Лаврентьева [Лаврентьев, 1962]:

$$(K + \alpha I)u = U, \tag{7}$$

где I — единичная матрица, α — параметр регуляризации (матричные индексы (i, j) в системе (7) мы опускаем).

Регуляризованная СЛАУ (7) (с определителем, отличным от нуля) всегда имеет устойчивое решение $u = u_\alpha$ для всех α, начиная с некоторого минимального значения. Для поиска устойчивого решения СЛАУ могут быть использованы итерационные методы градиентного типа [Васин, Еремин, 2005]: итеративно-регуляризованный метод простой итерации (МПИ), метод минимальных невязок (ММН), метод минимальной ошибки (ММО), метод наискорейшего спуска (МНС). Показано, что метод простой итерации требует намного меньше вычислительных процедур и объема памяти из всех вышеперечисленных методов [Акимова, Гемайдинов, 2007; Акимова и др., 2007]. Воспользуемся формулой последовательных приближений алгоритма МПИ:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{\lambda_{\max}}\left[(K + \alpha I)u^k - U\right], \tag{8}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы СЛАУ $(K + \alpha I)$, k — номер итерации, u^k — решение на k-й итерации.

Условием для остановки итерационного процесса (8) является выполнение условия $(K + \alpha I)u^k - U / U < \varepsilon$ при достаточно малом ε.

При построении геофизических моделей миллионного масштаба для больших территорий (в пределах нескольких десятков градусов) приходится иметь дело с большими массивами входных данных ~(10^6—10^8) элементов, что приводит к значительным затратам времени при вычислениях на однопроцессорных компьютерах. Использование параллельных алгоритмов для многопроцессорных вычислительных систем значительно сокращает времена расчетов.

Распараллеливание итерационного метода простой итерации [Мартышко и др., 2014] (этап пересчета поля вниз) основано на разбиении матрицы K для СЛАУ (7) горизонтальными или вертикальными полосами на m блоков, а вектора решения u и вектора правой части U на m частей так, что $n = m \times P$, где $n = M \times N$ — размерность системы уравнений, m — число процессоров, P — число строк или столбцов матрицы в блоке. На текущей итерации каждый из m процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы K на вектор решений u каждый из m процессоров умножает свою часть строк матрицы K на вектор u. Host-процессор (ведущий) отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

Параллельный алгоритм повысотных трансформаций на основе метода простой итерации разработан и численно реализован на суперкомпьютере «Уран» ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург). Программы написаны с помощью библиотеки MVAPICH2 (MPI) на языке программирования Фортран.

СЕМЕЙСТВО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ. МЕТОД *L*-КРИВОЙ

Устойчивость итеративного решения (7), (8) обратной задачи численного аналитического продолжения полей зависит от выбора параметра регуляризации α. При однозначной, в частности, монотонной зависимости от α, устойчивое решение будет еще и единственным. Множество различных значений параметра регуляризации α порождает множество регуляризированных (эквивалентных) решений обратной задачи:

$$u = u_\alpha\left(x, y, +H\right) = \left[K + \alpha I\right]^{-1} U\left(x, y, -H\right). \tag{9}$$

При большой величине параметра регуляризации решение задачи численного аналитического продолжения становится сильно сглаженным, и в пределе при $\alpha \to \infty$ норма решения $\|u_\alpha\|$ стремится к нулю. При уменьшении величины параметра регуляризации α норма решения $\|u_\alpha\|$ возрастает, а при некоторых α амплитуда пересчитанных полей (6) на уровне земной поверхности может даже превышать исходные значения наблюденного поля g (x, y). Заметим, что неустойчивые решения характеризуются высокоамплитудными пилообразными колебаниями пересчитанных полей с чередованием максимумов и минимумов на резко градиентном фоне и становятся расходящимися при $\alpha \to 0$.

Для выбора регуляризатора авторами использовался метод *L*-кривой [Hansen, 1992; Hansen, O'Leary, 1993; Vogel, 1996]. Под *L*-кривой понимается зависимость логарифма нормы регуляризированного решения (9) на глубине $z = H$ от логарифма нормы невязки СЛАУ на высоте пересчета $\zeta = -H$. Чтобы воспользоваться методом *L*-кривой, необходимо рассчитать множество решений u_α обратной задачи (7) при различных значениях параметра регуляризации α и построить график зависимости:

$$L\left(\alpha\right) := \left\{Y|X\right\} = \left\{\log\left\|u_\alpha\right\| \log\left\|\left(K + \alpha I\right) u_\alpha - U\right\|\right\}. \tag{10}$$

L-кривая (10) представляет собой график неявной монотонно-убывающей функции переменной α. Схематически ее можно изобразить двумя отрезками ортогональных (вертикальной и горизонтальной) прямых. Вертикальная часть *L*-кривой соответствует решениям, в которых величина $\|u_\alpha\|$ наиболее чувствительна к изменениям параметра регуляризации, т. е. изменяется значительно быстрее, чем норма невязки $\left\|\left(K + \alpha I\right) u_\alpha - U\right\|$. Горизонтальная часть соответствует решениям, в которых норма невязки $\left\|\left(K + \alpha I\right) u_\alpha - U\right\|$ более чувствительна к изменениям параметра регуляризации, чем норма решения $\|u_\alpha\|$.

Искомая величина параметра α принадлежит угловой точке *L*-кривой. Здесь по минимальной невязке $\left\|\left(K + \alpha I\right) u_\alpha - U\right\|$ выбирается решение с минимальной нормой u_α. Регуляризованное решение, локализованное по α в окрестности угла *L*-кривой, используется на практике для решении задач восстановления зашумленных помехами «размытых» образов, увеличения их четкости и контрастности [Agarwal, 2003; Wang et al., 2010]. С ростом α амплитуда и норма решения u_α уменьшаются. Это свойство затухания регуляризованных решений СЛАУ вдоль *L*-кривой в дальнейшем мы применили к задачам (3), (4) аналитического продолжения потенциальных полей и их разделению на длинно- и коротковолновые составляющие на разных глубинах.

ТИПЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕСЧИТАННЫХ ПОЛЕЙ. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В предлагаемом алгоритме оператор обратной задачи (4) продолжения полей на глубину задаем на базе пересчета $2H$. На той же базе вычисляется параметр α регуляризованного решения (9). Для каждой из высот график (10) повторяет форму *L*-кривой, но отображает различные числовые значения. Чем больше высота пересчета, тем более сглаженным становится поле (3), пересчитанное вверх на уровень $\zeta = -H$. Эта сглаженная составляющая входит в правую часть интегрального уравнения (4). Поэтому устойчивость решения обратной задачи численного аналитического продолжения вниз на глубину $z = +H$ достигается при меньших значениях параметра регуляризации. С другой стороны, увеличение базы пересчетов $\Delta z = 2H$ уменьшает элементы (и определитель) матрицы $K_{i,j}([2H])$, что требует большей регуляризации. И в рамках этих двух взаимно противоположных тенденций формируется множество допустимых значений параметра α регуляризированных решений (9).

Для пояснения сказанного, по исходным данным поля (рис. 1) рассчитаем множество решений $\|u_\alpha\|$ обратной задачи (9) для базиса пересчета $2H = 40$ км (высота и глубина пересчета равны 20 км) и построим зависимость (10) нормы решения u_α от нормы невязки $\|(K + \alpha I)\, u_\alpha - U\|$ в интервале значений

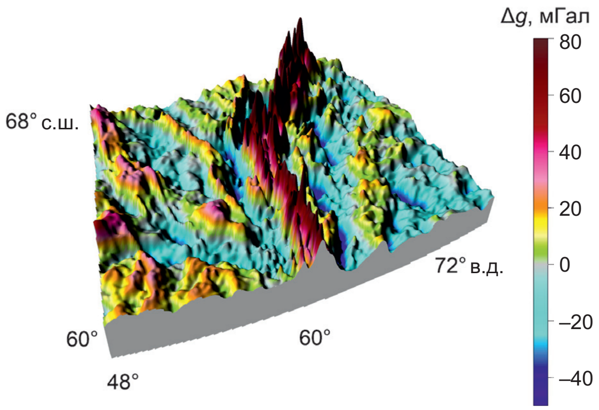

Рис. 1. Карта аномалий гравитационного поля.

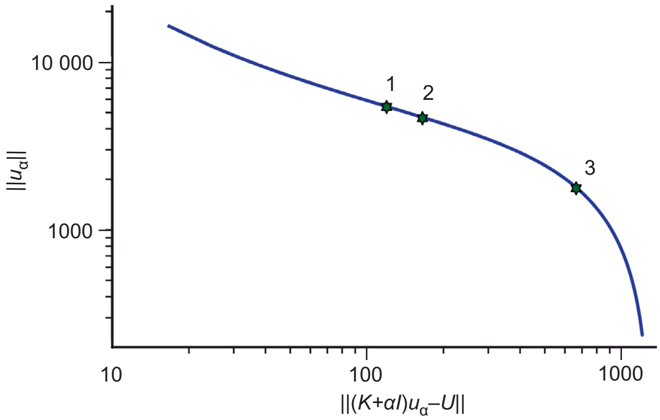

Рис. 2. *L*-кривая, построенная в логарифмических координатах.

На кривой выделены три точки, допускающие геометрическую и математическую интерпретацию.

$\alpha \in (10^{-4}, 1)$. Этот график лишь отчасти напоминает классическую *L*-кривую [Hansen, 1992]. Можно лишь предположить существование угловой точки в левой части кривой, в окрестности которой норма решения начинает возрастать по мере уменьшения невязки поля на высоте пересчета. Однако на нисходящей ветви нашей *L*-кривой мы выделили еще три характерные точки: 1 — точку перегиба кривой; 2 — нейтральную точку «равновесия» полей; 3 — угловую точку. Точки 1 и 3 вычисляются по нулевой и максимальной кривизне *L*-кривой; в точке 2 численное решение приобретает свойство консервативности аналитического продолжения сеточных гармонических функций.

При аналитическом продолжении гармонической функции по любому замкнутому пути она возвращается к исходным значениям. Это позволяет найти величину параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{opt}$ (точка 2), при котором исходное наблюденное поле на земной поверхности $g(x, y)$ и пересчитанное поле $u_\alpha(x, y, 0)$ будут наиболее близки:

$$u_\alpha(x,y,H) \Rightarrow u_\alpha(x,y,0),$$

$$\min_{\alpha=\alpha_{opt}} g(x,y) - u_\alpha(x,y,0). \tag{11}$$

На рисунке 2 построен график нормы невязки $\left\| g(x,y) - u_\alpha(x,y,0) \right\|$ для восстановленного поля (6), пересчитанного с глубины $H = 20$ км. Минимум кривой соответствует оптимальному параметру регуляризации $\alpha = \alpha_{opt}(20) = 0.037$.

L-кривая (10) является графиком монотонно убывающей функции (9), неявно зависящей от переменного параметра α (рис. 3). Место положение точек 1 и 3 на *L*-кривой находится по ее кривизне $k(\alpha)$. Введем логарифмические координаты для функции (9), относительно которых вычисляется кривизна *L*-кривой [Hansen, 1992]:

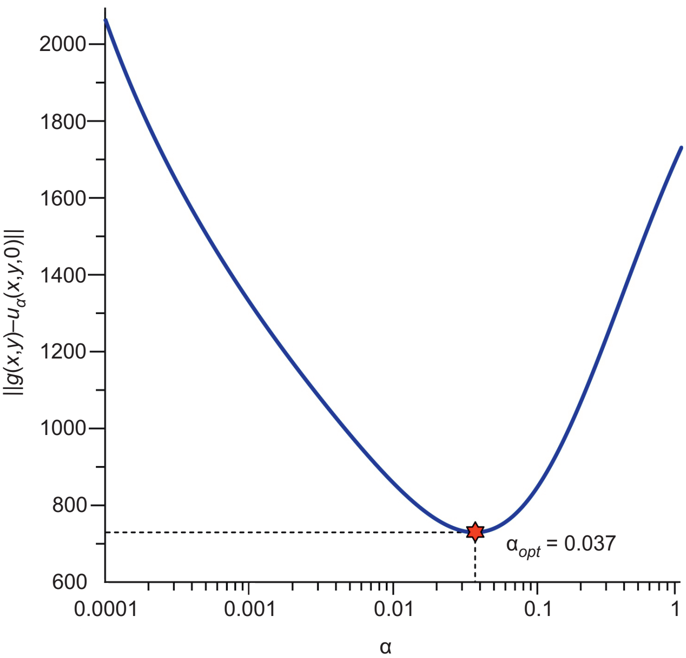

Рис. 3. Кривая выбора оптимального параметра регуляризации α_{opt}, $H = 20$ км.

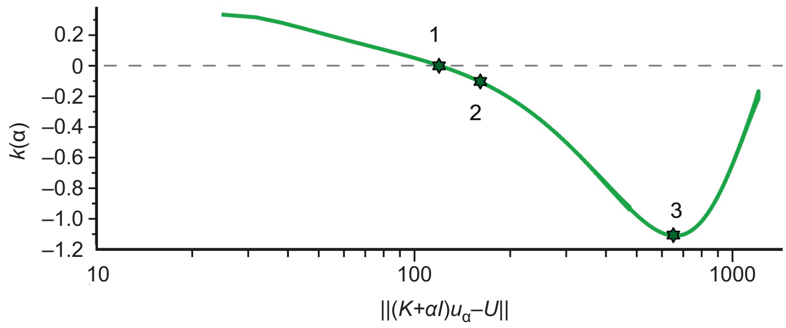

Рис. 4. Кривизна *L*-кривой *k*(α).

$$\hat{p} = p(\alpha) = 2\log\left\|(K + \alpha I)u_\alpha - U\right\|;\ \hat{\eta} = \eta(\alpha) = 2\log\left(\|u_\alpha\|\right),$$

$$k(\alpha) = \frac{\hat{p}'\hat{\eta}'' - \hat{p}''\hat{\eta}'}{\left[\left(\hat{p}'\right)^2 + \left(\hat{\eta}'\right)^2\right]^{3/2}},$$

где $\hat{p}'$, $\hat{\eta}'$, $\hat{p}''$ и $\hat{\eta}''$ — первая и вторая производная от $\hat{p}$, $\hat{\eta}$ по переменной α.

График кривизны *L*-кривой как функции невязки поля приведен на рис. 4.

По графику мы определяем точку 1 с нулевой кривизной и точку 3, для которой модуль кривизны $k(\alpha)$ достигает максимального значения. В точке 1 расчетный параметр регуляризации равен $\alpha = \alpha_0(20) = 0.022$; в точке 3 этот параметр больше и равен $\alpha = \alpha_\Phi(20) = 0.363$.

В точке равновесия 2 норма разности (11) восстановленного и исходного поля минимальна. Среднеквадратичное отклонение *RMS* равно:

$$RMS(\alpha_{opt}) = \frac{\left\|g(x,y) - u_\alpha(x,y,0)\right\|}{\sqrt{MN}} = 2.84 \text{ мГал.}$$

В точке нулевой кривизны 1 при $\alpha = \alpha_0$ восстановленное поле незначительно превышает оптимальное. Среднеквадратичное отклонение $RMS(\alpha_0) = 2.94$ мГал; в угловой точке 3 максимума модуля кривизны при $\alpha = \alpha_\Phi$ норма и амплитуда регуляризованного решения значительно меньше оптимального $RMS(\alpha_\Phi) = 5.14$ мГал. На рисунке 5 приведены фрагменты сеточного решения (6), пересчитанные с глубины $H = 20$ км. Верхний ряд — исходное наблюденное поле $g(x, y)$, заданное на сетке $M \times N = (1302 \times 962)$; нижний ряд — расчетное поле на земной поверхности $u_\alpha(x, y, 0)$ для трех значений параметра регуляризации α. Для сопоставления там же указаны 1%-е доверительные интервалы изменения амплитуд соответствующих полей.

Расчетные значения и вид *L*-кривой, так же как и выбор параметров регуляризации α в характерных точках, зависят от базисного расстояния 2*H* между отметками высот и равным им отметками глубин. В таблице приведены параметры α_0, α_{opt} и α_Φ для глубин пересчета *H*, заданных с шагом 10 км.

В целом значения параметров регуляризации уменьшаются с увеличением высоты пересчета. Это дает возможность перейти к решению задачи о разделении полей по глубине и послойной фильтрации разномасштабных гравитационных аномалий с последующим выделением эндогенных источников поля в горизонтальных слоях [Мартышко и др., 2014].

ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СГЛАЖИВАЮЩЕГО ФИЛЬТРА ПОСЛОЙНОГО РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ

Применение числовых схем разновысотных пересчетов «вверх—вниз» для разделения полей по глубине опирается на ту часть регуляризированных решений (9) $u_\alpha(x, y, H)$, норма и амплитуда которых на уровне земной поверхности (6) $u_\alpha(x, y, 0)$ не превосходит исходных значений гравитационных аномалий $g(x, y)$. Это возможно только для тех значений параметров регуляризации, которые больше оптимальных: $\alpha > \alpha_{opt}$, (см. рис. 3, рис. 5; таблицу). Как отмечено выше, восстановленная функция пересче-

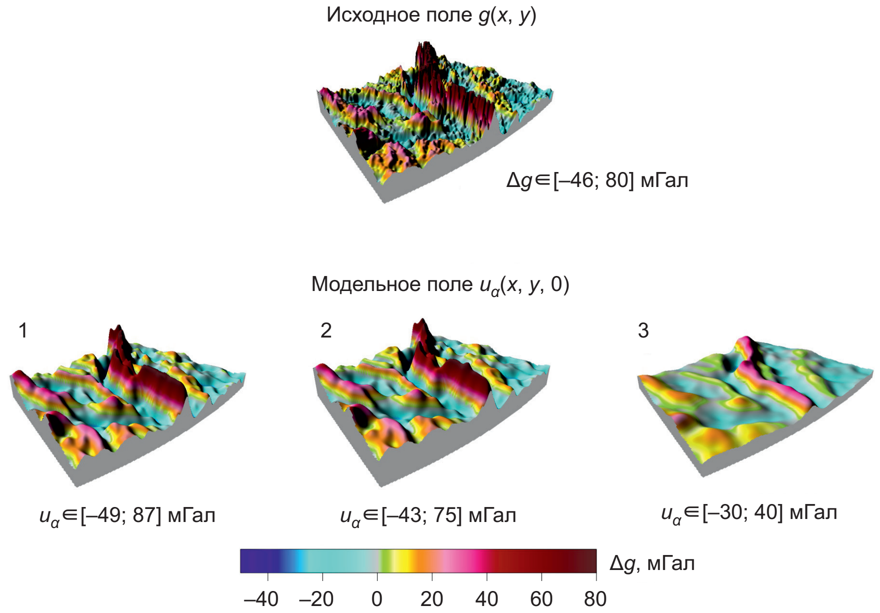

Рис. 5. Модельные поля аналитического продолжения, пересчитанные на земную поверхность с глубины *H* = 20 км при трех значениях параметров регуляризации на *L*-кривой:

1 — $\alpha_0 = 0.023$; 2 — $\alpha_{opt} = 0.037$; 3 — $\alpha_\Phi = 0.33$.

тов $u_\alpha(x, y, 0)$ ассоциируется с полями источников ниже глубины H, а разность полей $\left\{g\left(x,y\right)-u_\alpha\left(x,y,0\right)\right\}$ интерпретируется как поле от источников в верхнем слое $z\in\left(0;H\right)$. Если исходить из «критерия угловой точки», то параметру разделения полей соответствует точка 3 на нисходящей ветви L-кривой при $\alpha = \alpha_\Phi$ (см. рис. 2). Это точка максимального модуля кривизны (см. рис. 4), правее которой норма регуляризированного решения (9) быстро убывает вплоть до нулевых значений. Помимо уменьшения амплитуды, меняется и частотная характеристика пересчитанного поля (см. рис. 5). Сглаженная, низкочастотная составляющая приурочена к слою источников ниже глубины H, тогда как высокочастотная составляющая разностного поля $\left\{g\left(x,y\right)-u_\alpha\left(x,y,0\right)\right\}$ приурочена к слою выше глубины H. Схема пересчета «вверх—вниз» эквивалентна применению полосового фильтра высоких частот. Пороговая грань частотного и пространственного разделения полей относительно глубины H задается значением параметра регуляризации $\alpha = \alpha_\Phi$.

Алгоритм послойного разделения полей состоит в следующем. Для набора высот и глубин H_i вычисленные значения порогового параметра фильтрации $\alpha = \alpha_\Phi(H_i)$ разделяют разномасштабные гравитационные аномалии относительно глубины H_i по схеме:

$$\left(0\rightarrow -H_i\rightarrow +H_i\rightarrow 0\right). \tag{12}$$

Разновысотные значения параметров регуляризации α на *L* -кривой

H, км	α_0	α_{opt}	α_Φ
10	0.023	0.043	0.544
20	0.022	0.037	0.363
30	0.020	0.034	0.250
40	0.012	0.031	0.195
50	0.007	0.025	0.217
60	0.004	0.020	0.251
70	0.002	0.015	0.252
80	0.001	0.012	0.254

При пересчете с земной поверхности на высоту $\zeta = -H_i$ исходное поле гравитационных аномалий (см. рис. 1) заведомо становится гармоническим. На промежуточном этапе аналитического продолжения гармонической функции с высоты $\zeta = -H_i$ на глубину $z = +H_i$ определяются оптимальный $\alpha = \alpha_{opt}$ (см. рис. 3) и ближайший к нему параметр пороговой фильтрации $\alpha = \alpha_\Phi(H_i) > \alpha_{opt}$ по характерным точкам на L-кривой (см. рис. 4). Регуляризированные решения с глубины $z = +H_i$ пересчитываются на земную поверхность $z=0: u_\alpha\left(x,y,H_i\right)\Rightarrow u_\alpha^i\left(x,y,0\right)$. Подчеркнем, что приведение полей с разных глубин к одному опорному уровню необходимо для их сравнения и последующего анализа.

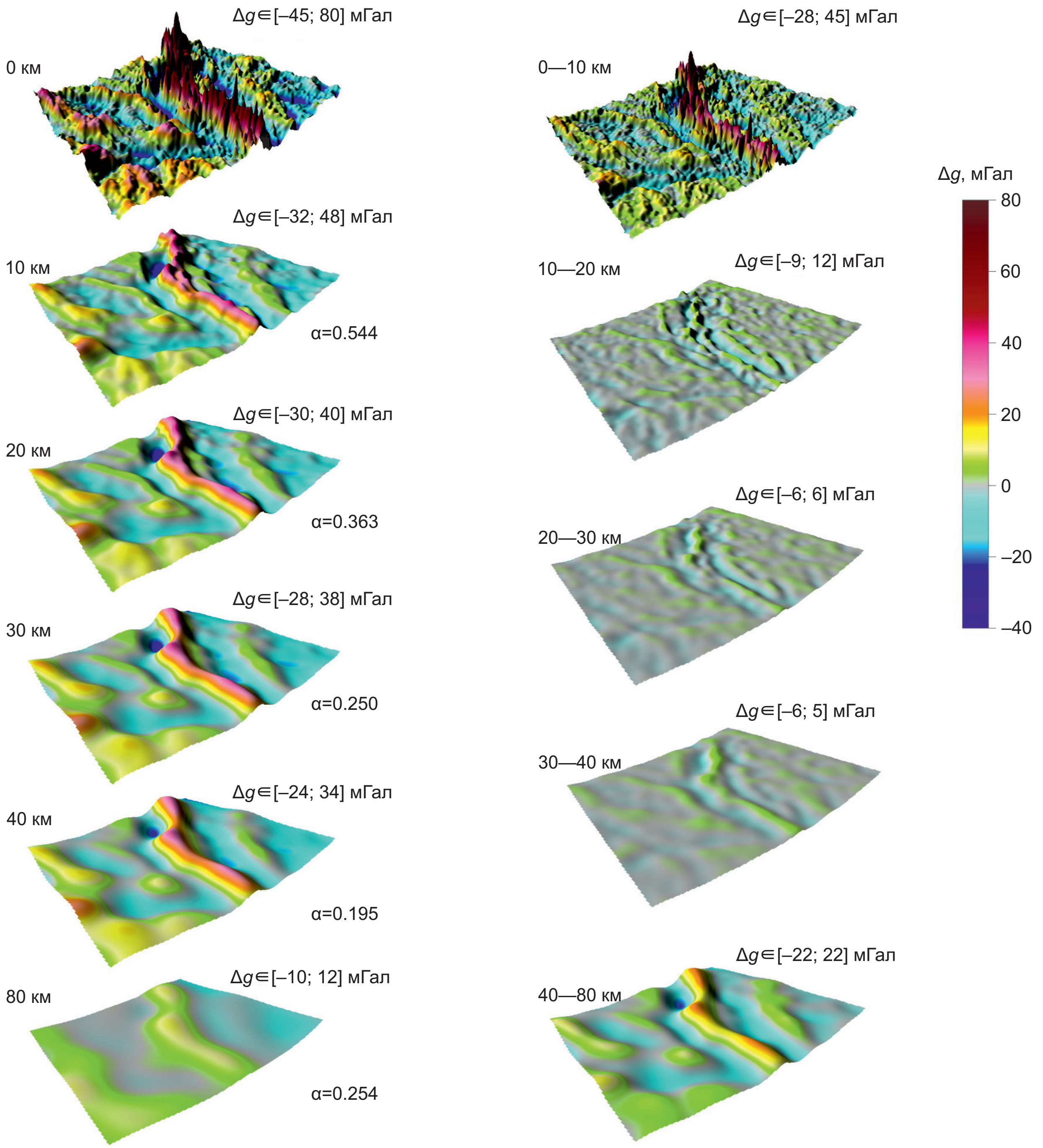

Рис. 6. Схема фильтрационного пересчета гравитационного поля и его разделение по горизонтальным слоям между двумя указанными глубинами.

Преобразование (12) в области гармоничности функции $U\left(x, y, -H_i\right)$ и ее непрерывного продолжения $u = u_\alpha\left(x, y, +H_i\right)$ предполагает возможность выделения составляющей поля от внешних источников в полупространстве ($z \geq H_i$). Аналогично, продолженное поле с высоты ($\zeta = -H_{i+1}$) на глубину ($z = +H_{i+1}$) выделяет источники в полупространстве ($z \geq H_{i+1}$). Разность двух полей, восстановленных на уровне земной поверхности $\left\{u_\alpha^{i+1}\left(x, y, 0\right) - u_\alpha^{i}\left(x, y, 0\right)\right\}$ принимается за поле источников в слое $\Delta H_i = (H_{i+1} - - H_i)$ [Мартышко, Пруткин, 2003]. Значения высот и глубин могут быть произвольными. Но для нашего тестового примера разбиение по глубине выбиралось с постоянным шагом дискретизации $\Delta H_i = 1$ км.

На рисунке 6 показаны значения пересчитанных полей для системы нескольких высот при экстремальных значениях параметра регуляризации $\alpha = \alpha_\Phi(H_i)$, определенных по угловой точке на нисходящей ветви L-кривой. Слева решения представлены в виде поверхностей полей, пересчитанных ниже указанной глубины H_i; справа — разностные поля от слоев $\Delta H_i = (H_{i+1} - H_i)$. Нулевая высота пересчета (верхний левый рисунок) соответствует исходным значениям наблюденного гравитационного поля. Для демонстрации работы полосового фильтра разделения полей выбраны 5 высот H_i = 10, 20, 30, 40 и 80 км. Мощность слоев земной коры ΔH_i = 10 км; мощность нижнего (мантийного) слоя ΔH_M = 40 км. Для возможности сопоставления на рис. 6 даны интервальные значения амплитуд Δg_i разделенных полей.

Следует подчеркнуть, что количественные оценки параметров в задаче аналитического продолжения и морфологические характеристики разделенных полей при их последовательных пересчетах «вверх—вниз» не являются универсальными, а носят чисто иллюстративный характер. Возможность разделения поля по глубине опирается только на выбор экстремальных (по кривизне L-кривой) значений параметра регуляризации $\alpha_Ф$ как параметра полосового фильтра высоких частот. Тем самым мы заведомо добиваемся устойчивости решения обратной задачи аналитического продолжения полей в направлении источников. И, как показывают расчеты, главными факторами, влияющим на величину $\alpha_Ф$, являются морфология исходного наблюденного поля (частота максимумов и минимумов) и шаг сеточного разбиения (дискретизации) при формировании цифрового массива входных данных.

Количество экстремумов поля в пределах исследуемого участка предопределяет выбор минимального шага сетки. Амплитуды и градиенты аномалий гравитационного поля, их видимая полуширина задают требуемую базу пересчетов «вверх—вниз» для сглаживания полей и возможности подавления высокочастотной составляющей локальных аномалий как помехи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения обратной задачи численного аналитического продолжения гравитационного поля на глубину использован метод простой итерации с регуляризацией по Лаврентьеву. Пересчет поля на несколько высот и аналитическое продолжение вниз позволяют выделить из суммарного поля аномалии от неоднородностей, локализованных в горизонтальных слоях на соответствующих глубинах. Для выбора параметра регуляризации использовался метод L-кривой. Оригинальный вклад авторов состоит в том, что в качестве регуляризующего предложено использовать параметр $\alpha = \alpha_Ф$, который определяется по максимальному модулю кривизны на нисходящей ветви L-кривой. Реализована схема пересчета поля «вверх—вниз», эквивалентная применению полосового фильтра высоких частот. Пороговая грань частотного и пространственного разделения полей относительно глубины H задается значением параметра регуляризации $\alpha = \alpha_Ф(H)$.

Показано, что при значении параметра регуляризации, определенного по максимальному модулю кривизны L-кривой, процедура пересчета полей «вверх—вниз» в области отсутствия источников поля устойчиво восстанавливает значение некоторой гармонической функции на глубине. Это отфильтрованное значение функции принимается за аналитическую часть гравитационного поля на глубине $z = +H$. Следовательно, при практическом использовании аналитического продолжения вниз с расчетными параметрами сглаживающего фильтра и с привлечением дополнительной информации структурно-геологического плана можно построить достаточно информативную модель разделения полей и распределения соответствующих источников по глубине. Предложенный метод применим и для магнитного поля.

Разработан и программно реализован параллельный алгоритм повысотных трансформаций на суперкомпьютере «Уран». Результаты решения при параметрах регуляризации, определенных по L-кривой, продемонстрированы на практическом примере разделения гравитационного поля для фрагмента модели приарктической части Уральского региона. Для этого примера разбиение по глубине выбиралось с постоянным шагом дискретизации ΔH_i = 1 км. Полученные числовые массивы значений полей от слоев можно использовать как для качественного анализа плотностной структуры, так и для определения латеральной плотности [Martyshko et al., 2018].

ЛИТЕРАТУРА

Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Труды института математики и механики УрО РАН, 2007, т. 13, № 3, с. 3—21.

Акимова Е.Н., Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Тимерханова Л.Ю., Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Вычислительные методы и программирование, 2007, т. 8, № 1, с. 107—116.

Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург, УрО РАН, 2005, 210 с.

Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической геофизики. Новосибирск, СО АН СССР, 1962, 92 с.

Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал, 2003, т. 25, № 3, с. 159—168.

Мартышко П.С., Федорова Н.В., Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Изучение структурных особенностей гравитационного и магнитного полей литосферы с использованием параллельных алгоритмов // Физика Земли, 2014, № 4, с. 50—55.

Мудрецова Е.А., Веселов К.Е. Гравиразведка. М., Недра, 1990, 607 с.

Новоселицкий В.М. К теории определения изменения плотности в горизонтальном пласте по аномалиям силы тяжести // Физика Земли, 1965, № 5, с. 25—32.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972, 300 с.

Федорова Н.В., Рублев А.Л. Численное моделирование источников магнитных аномалий в земной коре Южного Урала // Геология и геофизика, 2019, т. 60 (11), с. 1639—1649, doi: 10.15372/GiG2019106.

Черноскутов А.И. Аппроксимация геофизических данных с помощью численного решения двумерных внутренних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа // Восемнадцатая уральская молодежная научная школа по геофизике: сборник науч. материалов. Пермь, ГИ УрО РАН, 2017, с. 243—247.

Agarwal V. Total Variation Regularization and L-curve method for the selection of regularization parameter // ECE 599, 2003.

Bonvalot S., Balmino G., Briais A., Kuhn M., Peyrefitte A., Vales N., Biancale R., Gabalda G., Moreaux, G., Reinquin F., Sarrailh M. World gravity map. Commission for the geological map of the world / Eds. BGI-CGMW-CNES-IRD, Paris, 2012.

Hansen P.C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Rev., 1992, v. 34, p. 561—580.

Hansen P.C., O'Leary D.P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems // SIAM J. Sci. Comput., 1993, v. 14, p. 1487—1503.

Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Byzov D.D., Tsidaev A.G. Gravity data inversion with method of local corrections for finite elements models // Geosciences, 2018, v. 8 (10), 373—380.

Vogel C.R. Non-convergence of the L-curve regularization parameter selection method // Inverse Probl., 1996, v. 12, p. 535—547.

Wang W., Cai J., Yang L. Electrical impedance tomography image reconstruction using iterative Lavrentiev and L-curve-based regularization algorithm // J. Electromagn. Anal. Appl., 2010, v. 2, p. 45—50.