

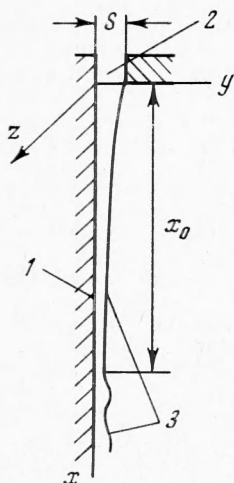
ЛОКАЛЬНАЯ ТОЛЩИНА ОРОШАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ
НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ

Е. Г. Воронцов, О. М. Яхно

(Киев)

Рассмотрен графоаналитический метод расчета локальной толщины пленки жидкости на входном участке преобразования щелевого течения в пленочное течение по вертикальной пластине. Предложенный метод может быть также использован при расчете локальных толщин тонкого слоя при течении жидкости по криволинейным поверхностям.

Широкое применение пленочного течения в современной технологии [1-4] ставит ряд проблем, касающихся особенностей гидродинамики потока в пленке. При орошении тонким слоем жидкости вертикальных и наклонных стенок четко выделяется гладкий входной участок преобразования щелевого течения в пленочное длиной x_0 (фиг. 1) и участок волнового установившегося течения пленки. На фиг. 1:



Фиг. 1

1 — орошаемая поверхность, 2 — щель, 3 — поверхность пленки. Одной из важных задач является определение локальной толщины орошающей пленки на входном участке.

Решение этой задачи необходимо для установления области существования пленочного течения (аналитический расчет значения минимальной плотности орошения для данных условий [1]), и для расчета локальных значений коэффициентов тепло- и массопереноса [1, 2, 4] на входном участке. Экспериментальное и теоретическое решение этой задачи затруднительно, поскольку толщина орошающего жидкостного слоя δ зависит от расхода жидкости, формы и кривизны орошаемой поверхности и ряда других факторов. Получить общее решение, учитывающее все эти факторы, не удалось [1,4], хотя для отдельных случаев такое решение может быть получено (орошение вертикальной пластины, вертикальных труб и др.).

Как известно [5], геометрические характеристики потока фигурируют в уравнении сплошности среды, которое можно записать в общем виде

$$(1) \quad \int_F w_x dF = \bar{w}F = \text{const}$$

где w_x — локальная скорость в направлении течения, F — площадь поперечного сечения потока, \bar{w} — средняя скорость течения.

Для преобразования уравнения (1) к более удобному виду воспользуемся безразмерными величинами

$$(2) \quad u = \bar{w}_x / w_S, \quad y = (\bar{w}_S / \nu S)^{0.5} y_i, \quad x = x_i / S$$

где предполагается, что \bar{w}_S — средняя скорость жидкости на выходе из щели распределительного устройства, S — ширина щели, x_i, y_i — координаты плоскости, в которой происходит течение (фиг. 1).

При дальнейшем преобразовании (1) будем считать, что течение пленки на входном участке ламинарное и на свободной поверхности пленки волны отсутствуют.

Вводя в уравнение (1) величины (2), получим, что для плоской орошаемой поверхности уравнение сплошности среды принимает вид

$$(3) \quad \int_0^{\delta^*} u dy = 1S^* = 0.5 \text{Re}^{0.5}$$

где $S^* = S(\bar{w}_S / \nu S)^{0.5}$ — безразмерная ширина распределительной щели; $\text{Re} = 4w\delta / \nu$ — критерий Рейнольдса для пленочного течения.

Решение уравнения (3) относительно δ осложняется тем, что не всегда можно определить интеграл, стоящий в левой части. Определение $\int_0^{\delta^*} u dy$ связано с нахождением закона распределения скоростей по сечению пленки на входном участке ее течения. Для стабилизированного течения, когда $u = u(y)$, эта задача проще, чем для случая входного участка, где $u = u(x, y)$. Для входного участка определение δ представляет большой интерес, так как в области входного участка складываются условия, влияющие на характер пленочного течения вниз по потоку.

Для течения на входном участке в общем случае справедливо уравнение движения, имеющее вид [1]

$$(4) \quad dw_x / d\tau = \nu (\partial^2 w_x / \partial x^2 + \partial^2 w_x / \partial y^2) + f_v$$

где τ — время, f_v — объемная сила, отнесенная к единице плотности и направленная вдоль оси x (ускорение свободного падения).

Решение уравнения (4) в общем виде аналитическим путем представляет собой большие трудности. Как показано в [6], в качестве первого приближения с удовлетворительной для практики степенью сходимости результатов течение в начальном участке пленки может быть описано уравнением, которое с учетом (2) имеет следующий безразмерный вид:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} = -f_v^*, \quad f_v^* = \frac{f_v S}{\bar{w}_S^2}$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения можно осуществить следующим образом.

Предположим, что функция $u(x, y)$ имеет вид

$$(6) \quad u = \varphi_0(y) + (x + \varepsilon)^{-1} \varphi_1(y) + (x + \varepsilon)^{-2} \varphi_2(y) + (x + \varepsilon)^{-3} \varphi_3(y) + \dots$$

где $\varepsilon = \text{const}$, φ_i — неизвестные пока функции.

Подставляя выражение (6) в (5) и собирая члены, имеющие общими множители $(x + \varepsilon)^k$, можно получить систему дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \dots$. Интегрирование этих уравнений позволит получить следующие выражения для φ_i :

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi_0(y) &= -f_v^* \frac{y^2}{2} + C_0 y, & \varphi_1(y) &= C_1 y \\ \varphi_2(y) &= \frac{C_1}{40} f_v^* y^5 - \frac{C_0 C_1}{12} y^4 + C_2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(y) &= f_v^* C_2 \frac{y^5}{20} - (C_1^2 + 2C_0 C_2) \frac{y^4}{12} + C_3 y \\ \Phi_4(y) &= -\frac{C_0 C_3 y^4}{4} + \frac{f_v^* 3C_3}{40} y^5 - \frac{C_1 C_2}{4} y^4 \\ \Phi_5(y) &= -\frac{(C_2^2 + 2C_1 C_3)}{6} y^4, \quad \Phi_6(y) = -\frac{5}{12} C_2 C_3 y^4\end{aligned}$$

Как показал анализ, функции $\Phi_i(y)$, начиная от $\Phi_7(y)$ и т. д., являются величинами малыми и в рассматриваемом случае ими можно пренебречь.

Постоянные интегрирования, входящие в (7), определяются из граничных условий на поверхности пленки и за пределами начального участка. Так, из условия при $x = \infty$ можно получить, что

$$C_0 = [6\text{Re}^{0.5}\text{Fr}_S^{-2}]^{1/3}, \quad \text{Fr}_S = \bar{w}_s / (f_v S)^{0.5}$$

Величины C_1, C_2, C_3 имеют более сложный вид и определяются из условия наименьшего отклонения от действительного решения Гаусса [7], согласно которому приращение скорости $p = u(x, y) |_{x=0} - u$ на начальном участке может быть определено из условия

$$(8) \quad \int_0^{0.5 \text{Re}^{0.5}} p^2 dy = \min$$

Выполнение требования минимума дает

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^{0.5 \text{Re}^{0.5}} p^2 dy = \int_0^{0.5 \text{Re}^{0.5}} p \frac{\partial p}{\partial C_i} dy = 0$$

Согласно (6) и выражению для $u(x, y)$ на выходе из распределительной щели (1) для p можно записать

$$(10) \quad \begin{aligned}p &= y \left[C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon} + \frac{C_2}{\varepsilon^2} + \frac{C_3}{\varepsilon^3} - 6(\text{Re})^{-0.5} \right] + y^2 \left[\frac{6}{\text{Re}} - \frac{1}{2\text{Fr}} \right] - \\ &- y^4 \left[\frac{C_0 C_1}{12\varepsilon^2} + \frac{(C_1^2 + 2C_0 C_2)}{12\varepsilon^3} + \frac{1}{4\varepsilon^4} (C_1 C_2 + C_0 C_3) + \frac{1}{6\varepsilon^5} (C_2^2 + 2C_1 C_3) + \right. \\ &\left. + \frac{5C_3 C_2}{12\varepsilon^6} \right] + y^5 \left[\frac{f_v^* C_1}{40\varepsilon^2} + \frac{f_v^* C_2}{20\varepsilon^3} + \frac{f_v^* 3C_3}{40\varepsilon^4} \right]\end{aligned}$$

Подставляя (10) в (9), получим систему четырех нелинейных уравнений. Если воспользоваться новыми переменными

$$(11) \quad \begin{aligned}a_1 &= C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon} + \frac{C_2}{\varepsilon^2} + \frac{C_3}{\varepsilon^3} - 6(\text{Re})^{-0.5} \\ a_4 &= -\left[\frac{C_0 C_1}{12\varepsilon^2} + \frac{(C_1^2 + 2C_0 C_2)}{12\varepsilon^3} + (4\varepsilon^4)^{-1} (C_1 C_2 + C_0 C_3) + \right. \\ &\left. + (6\varepsilon^5)^{-1} (C_2^2 + 2C_1 C_3) + \frac{5}{12} \frac{C_2 C_3}{\varepsilon^6} \right] \\ a_5 &= \frac{f_v^* C_1}{40\varepsilon^2} + \frac{f_v^* C_2}{20\varepsilon^3} + \frac{3f_v^* C_3}{40\varepsilon^4}, \quad K = \left(\frac{6}{\text{Re}} - \frac{1}{2\text{Fr}} \right)\end{aligned}$$

то можно получить более простую систему уравнений.

При обозначениях (11) величина p будет равна

$$(12) \quad p = a_1 y + K y^2 + a_4 y^4 + a_5 y^5$$

Преобразование (11) возможно в том случае, если функциональный определитель преобразования принимает значения, не равные нулю.

В этом случае имеем

$$(13) \quad F = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial C_1} & \frac{\partial a_1}{\partial C_2} & \frac{\partial a_1}{\partial C_3} \\ \frac{\partial a_4}{\partial C_1} & \frac{\partial a_4}{\partial C_2} & \frac{\partial a_4}{\partial C_3} \\ \frac{\partial a_5}{\partial C_1} & \frac{\partial a_5}{\partial C_2} & \frac{\partial a_5}{\partial C_3} \end{vmatrix} = \frac{f_v^* 6 C_3}{480 \varepsilon^6} \neq 0$$

Следовательно, принятое преобразование допустимо.

С учетом обозначений (11) требования Гаусса запишутся в виде трех алгебраических уравнений относительно a_i . Неизвестные a_1 , a_4 и a_5 определяются из этих уравнений по правилу Крамера. Затем осуществляется переход к величинам C_1 , C_2 и C_3 .

Подставляя уравнение (7) в выражение (6), получим закон распределения скоростей на входном участке течения пленки в форме

$$(14) \quad u = \left[C_0 y - f_v^* \frac{y^2}{2} \right] + (x + \varepsilon)^{-1} C_1 y + (x + \varepsilon)^{-2} \left[\frac{f_v^* C_1}{40} y^5 - \frac{C_0 C_1}{12} y^4 + C_2 y \right] + (x + \varepsilon)^{-3} \left[\frac{f_v^* C_2}{20} y^5 - (C_1^2 + 2 C_0 C_2) \frac{y^4}{12} + C_3 y \right] + (x + \varepsilon)^{-4} \left[\frac{3 f_v^* C_3}{40} y^5 - \frac{C_0 C_3 + C_1 C_2}{4} y^4 \right] + (x + \varepsilon)^{-5} \times \\ \times \left[- \frac{C_2^2 + 2 C_1 C_3}{6} y^4 \right] + (x + \varepsilon)^{-6} \left[- \frac{C_2 C_3}{12} y^4 \right]$$

Входящая в уравнение (14) постоянная ε определяется на основании уравнения (3) для $x = 0$, т. е. через заданный расход жидкости в распределительном устройстве.

Зная закон распределения скоростей по сечению стекающей пленки, уравнение сплошности среды (3) можно проинтегрировать в пределах изменения y от 0 до δ^* и получить следующее уравнение:

$$(15) \quad \frac{C_0}{2} (\delta^*)^2 - \frac{f_v^*}{6} (\delta^*)^3 + \frac{C_1}{2(x + \varepsilon)} (\delta^*)^2 + (x + \varepsilon)^{-2} \times \\ \times \left[\frac{f_v^* C_1}{240} (\delta^*)^6 - \frac{C_0 C_1}{60} (\delta^*)^5 + \frac{C_2}{2} (\delta^*)^2 \right] + (x + \varepsilon)^{-3} \times \\ \times \left[\frac{f_v^* C_2}{120} (\delta^*)^6 - \frac{C_1^2 + 2 C_0 C_2}{60} (\delta^*)^5 + 0.5 C_3 (\delta^*)^2 \right] + \\ + (x + \varepsilon)^{-4} \left[\frac{3 f_v^* C_3}{240} (\delta^*)^6 - \frac{C_0 C_3 + C_1 C_2}{20} (\delta^*)^5 \right] + \\ + (x + \varepsilon)^{-5} \frac{2 C_1 C_3 + C_2^2}{30} (\delta^*)^5 - (x + \varepsilon)^{-6} \frac{C_2 C_3}{12} (\delta^*)^5 = 0.5 \text{Re}^{0.5}$$

Полученное алгебраическое уравнение необходимо решить относительно величины $\delta^* = (\bar{w}_S / \nu S)^{0.5} \delta$. В связи с тем, что уравнение (15) сложное и его аналитическое решение имеет громоздкий вид, величину δ^* удобно получить, используя графический метод.

При графическом методе решение уравнения (15) для определенного значения x , при котором отыскивается толщина пленки, следует построить в системе координат $\int_0^{\delta^*} u dy$ — y кривую, характеризующую левую часть уравнения (15), подставляя вместо δ^* значения y . Так как при определенном значении $y = \delta^*$ левая часть уравнения (15) равна правой, то на оси ординат отыскивается точка, значение которой соответствует $0.5 \text{Re}^{0.5}$.

Точка пересечения кривой $\int_0^{\delta^*} u dy$ с линией, параллельной оси абсцисс и проходящей на расстоянии $0.5Re^{0.5}$ от этой оси, дает искомое значение δ^* .

В качестве примера определим толщину пленки, образованной потоком воды с температурой $t = 80^\circ \text{C}$, который вытекает из плоскощелевого распределительного устройства шириной $S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. При этом предполагается, что число Рейнольдса в рассматриваемом случае $Re = 465$. Это значит, что средняя скорость истечения из щели $\bar{w}_S = 0.25 \text{ м/сек}$, а величина $S^* = 0.5Re^{0.5} \approx 10.8$.

Для данного случая постоянные C_0, C_1, C_2 и C_3 , входящие в уравнение (15), равны

$$(16) \quad C_0 = 14.8847, \quad C_1 = -0.119296 \\ C_2 \approx +0.0777034, \quad C_3 \approx +0.0612$$

Функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и φ_5 можно представить в виде

$$(17) \quad \varphi_0(y) = 0.5f_v^*y^2 + 14.8847y \\ \varphi_1(y) \approx -0.119296y \\ \varphi_2(y) \approx -0.0002f_v^*y^5 + \\ + 0.147932y^4 + 0.0777034y \\ \varphi_3(y) = 0.00038f_v^*y^5 - \\ - 0.1226y^4 + 0.0612y$$

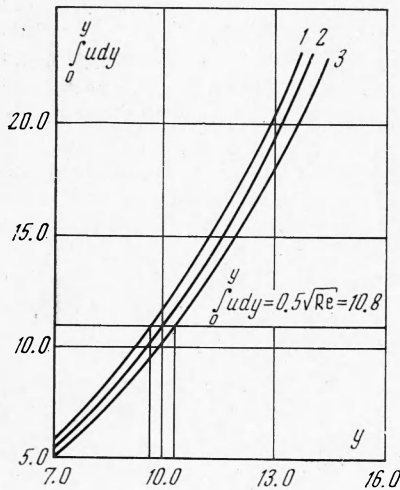
$$\varphi_4(y) = -0.227507y^4 + 0.0046y^5, \quad \varphi_5(y) = 0.00014y^4 \\ \varphi_6(y) = 0.00001y^4$$

На основании значений функций $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), приведенных в уравнениях (17), закон распределения скоростей (6) принимает вид

$$(18) \quad u(x, y) = -0.5 f_v^*y^2 + 14.8847 y - 0.119296 (x + \varepsilon)^{-1} y + \\ + (x + \varepsilon)^{-2} (0.0777034 y + 0.147932 y^4 - 0.0002 f_v^*y^5) + \\ + (x + \varepsilon)^{-3} (0.00038 f_v^*y^5 - 0.1226y^4 + 0.0612 y) + \\ + (x + \varepsilon)^{-4} (0.0046y^5 - 0.2275071 y^4) + \\ + (x + \varepsilon)^{-5} 0.00014 y^4 + (x + \varepsilon)^{-6} 0.00001 y^4$$

Проинтегрировав выражение (18) по y в пределах от 0 до δ^* и приняв определенные значения x (например, x_1, x_2, x_3, x_4), можно построить систему кривых, описывающих функцию $\int_0^{\delta^*} u(x, y) dy$.

На фиг. 2 приведены такие кривые 1—3 для значений x , соответственно равных 1.0, 0.5, 0.25. Так как согласно уравнению неразрывности построенные кривые определяют функцию, которая при определенных (в данном случае искомого) значениях δ^* должна равняться $0.5 Re^{0.5}$, то на той же оси ординат находится точка со значением $0.5 Re^{0.5} = 10.8$ и через нее проводится линия, параллельная оси абсцисс. Точка пересечения этой линии с построенными кривыми — единственная точка, удовлетворяющая уравнению сплошности среды (15), и определяет толщину пленки при за-



Фиг. 2

данном значении x_i . Так, в рассматриваемом примере получаем, что $\delta^* = 8$ при $x = 1$, $\delta^* = 10$ при $x = 0.5$ и т. д. Это значит, что при заданных значениях x получены следующие результаты:

$$(19) \quad \begin{aligned} x = 1, & \quad (\bar{w}_S / \nu S)^{0.5} \delta = 8 \\ x = 0.5, & \quad (\bar{w}_S / \nu S)^{0.5} \delta = 10 \end{aligned}$$

Решая уравнения типа (19), определяем конкретные (в мм) значения толщины пленки δ . По этим значениям можно проследить за изменением δ вдоль стекающей жидкостной пленки, т. е. найти $\delta = \delta(x)$.

Этим методом можно пользоваться и в случае, когда рассматривается течение не на плоской, а на криволинейной, например цилиндрической, поверхности. В этом случае необходимо учитывать те изменения, которые присущи уравнениям (3) и (14), а также критерию Рейнольдса при пленочном течении по криволинейной поверхности [1].

Поступила 28 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов Е. Г., Тананайко Ю. М. Теплообмен в жидкостных пленках. Киев, «Техніка», 1972.
2. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Покусаев Б. Г., Кузьмин В. А., Утович В. А., Христофоров В. В., Татевосян Ю. В. Исследование турбулентных течений двухфазных сред. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1973.
3. Hasselgruber H. Theoretische Untersuchung der Dünnschicht-Verdampfung, Diplomarbeit, TH Aachen, 1950.
4. Fulford G. D. The flow of liquids in thin films. Adv. Chem., Engng, Bd 5. New York—London, Acad. Press., 1964.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
6. Langhaar H. L. Steady flow in the transition length of a straight tube. J. Appl. Mech., 1942, vol. 9, No. 2.
7. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.