

УДК 624.07:534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

И. П. Шацкий, В. В. Перепичка

Ивано-Франковский отдел Института прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, 76002 Ивано-Франковск, Украина
E-mails: ipshatsky@gmail.com, an_w@i.ua

С использованием модели вязкопластического трения исследована волновая задача о распространении возмущений вдоль упругого стержня, взаимодействующего со средой. Получено точное решение задачи для произвольного момента времени действия нагрузки. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: удар, упругий стержень, вязкопластическое сопротивление.

При решении прикладных задач динамики конструкций большое значение имеет анализ рассеяния энергии за счет фрикционного взаимодействия контактирующих тел. Обзор работ, посвященных исследованию динамики упругих стержней при наличии сухого трения на боковой поверхности, приведен в работах [1–3]. Характерным для этих исследований является использование классической теории стержней и модели фиксированного кулоновского трения. Для проектирования инженерных конструкций необходимо развитие моделей динамического взаимодействия стержневых элементов с окружающей средой [4, 5]. В настоящей работе исследована задача нестационарной динамики стержня с вязкопластическим внешним сопротивлением, решение которой обобщает случаи чисто сухого и чисто вязкого трения. Данная задача может быть использована при моделировании динамики бурового оборудования с целью ликвидации прихвата инструмента.

Рассмотрим процесс распространения продольных ударных волн в полубесконечном упругом стержне с постоянным поперечным сечением. В начальный момент времени на торце стержня действует ударная нагрузка, поддерживаемая постоянной при значениях времени $T > 0$. Исследуем процесс затухания ударных волн, обусловленный действием сил вязкопластического сопротивления на боковой поверхности.

Начало координат выберем в центре тяжести нагружаемого торца, ось OX направим вдоль стержня. Рассматриваются только продольные возмущения, для которых перемещения частиц $u(X, T)$ параллельны оси стержня и равны перемещению поперечного сечения (модель Бернулли без учета обжатия). Уравнение движения сечений стержня имеет вид

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \tau \frac{\Pi}{F} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}.$$

Здесь E — модуль Юнга; ρ — плотность материала стержня; F — площадь поперечного сечения; Π — периметр части контура, на котором действуют силы трения τ .

Силы трения на боковой поверхности моделируются параллельным соединением по Фойгту элементов Сен-Венана и Ньютона (так называемая модель Шведова — Бингама [6]):

$$\tau = -\tau_c \operatorname{sgn} \frac{\partial u}{\partial T} - \beta \frac{\partial u}{\partial T}, \quad \frac{\partial u}{\partial T} \neq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = 0, \quad |\tau| < \tau_c$$

(β — динамическая вязкость; τ_c — пороговое значение силы трения).

Приведенные соотношения описывают касательное взаимодействие боковой поверхности стержня с жестким каналом через тонкую кольцевую прослойку вязкопластической жидкости.

Задача сводится к исследованию достаточно простого на первый взгляд уравнения. Однако решение этого уравнения является нетривиальным. Даже в тех случаях, когда направление скорости известно априори, возникают задачи с неизвестной границей раздела участков движения и покоя.

Введем безразмерные координату $x = X/L$ и время $t = cT/L$ ($L = F/\Pi$ — характерный размер поперечного сечения; $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость распространения волны в материале стержня).

Уравнение движения для стержня представим в виде

$$\left(\frac{u}{L}\right)'' + \frac{\tau}{E} = \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где штрих обозначает частную производную по безразмерной координате, точка — по безразмерному времени.

Начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

краевые условия записываются следующим образом:

$$\frac{u'(0, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} H(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь σ_0 — напряжение на торце стержня; $H(t)$ — функция Хевисайда.

В рамках принятых предположений, зная знак скорости \dot{u} и скорость распространения фронта, выражение для вязкопластической силы трения представим в виде

$$\tau = -\tau_c H(t - x) - 2BEL^{-1}\dot{u}, \quad \dot{u} > 0,$$

$$\dot{u} = 0, \quad |\tau| < \tau_c, \quad (4)$$

где $B = \beta/(2\sqrt{E\rho})$ — безразмерный параметр вязкости.

При решении сформулированной задачи используем преобразование Лапласа по временной координате. Задача операционного исчисления, эквивалентная задаче (1)–(4), имеет вид

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - (s^2 + 2Bs)U = \frac{\tau_c}{E} e^{-sx} \frac{L}{s},$$

$$\frac{U'(0)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s}, \quad U(\infty) = 0, \quad (5)$$

где $U(x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$; s — параметр преобразования Лапласа.

Решение краевой задачи (5) для трансформанты записывается в виде

$$U(x) = \frac{\sigma_0 L}{E} \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right) \frac{1}{s \sqrt{(s+B)^2 - B^2}} e^{-x \sqrt{(s+B)^2 - B^2}} - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \frac{e^{-sx}}{s^2} \right].$$

Используя соответствие [7, 8] выражений $e^{-x \sqrt{(s+B)^2 - B^2}} / \sqrt{(s+B)^2 - B^2}$ и $e^{-Bt} I_0(B \sqrt{t^2 - x^2}) H(t-x)$, запишем решение исходной задачи (1)–(4)

$$\frac{u(x, t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \int_x^t \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right) e^{-B\tau} I_0(B \sqrt{\tau^2 - x^2}) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right] d\tau H(t-x); \quad (6)$$

$$\frac{\dot{u}(x, t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right) e^{-Bt} I_0(B \sqrt{t^2 - x^2}) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right] H(t-x), \quad (7)$$

$$\frac{u'(x, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right) \left(e^{-Bx} + B^2 x \int_x^t e^{-B\tau} \frac{I_1(B \sqrt{\tau^2 - x^2})}{B \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \right) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} \right] H(t-x).$$

Здесь $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого рода.

Положив $\tau_c = 0$ в формулах (6), (7), получаем частный случай решения нестационарной задачи динамики стержня в вязкой среде.

При $B = 0$ находим решение, описывающее затухание ударной волны в стержне с внешним сухим трением [1, 2]:

$$\frac{u(x, t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left(t - x + \frac{\tau_c}{4\sigma_0} (x^2 - t^2) \right) H(t-x),$$

$$\frac{\dot{u}(x, t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\sigma_0} t \right) H(t-x), \quad \frac{u'(x, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\sigma_0} x \right) H(t-x).$$

Проведем анализ полученных результатов. На рис. 1 представлена волновая картина нестационарного возмущения в стержне. Области A и B разделены характеристикой $x = t$, описывающей распространение фронта волны и являющейся линией сильного разрыва; на

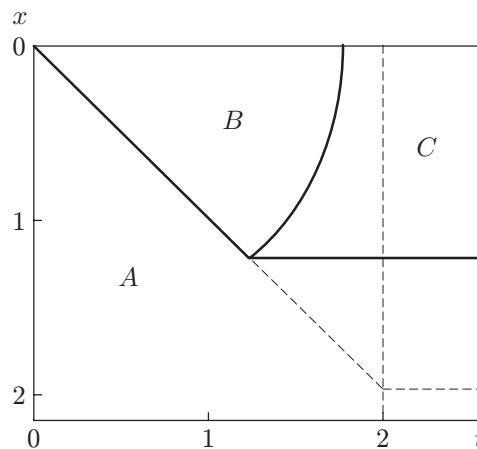


Рис. 1. Волновая картина нестационарного возмущения в стержне:

A — предфронтальная зона покоя, B — зона распространения динамического возмущения в стержне, C — зона остаточных стационарных напряжений; штриховые линии — границы соответствующих зон для случая сухого трения

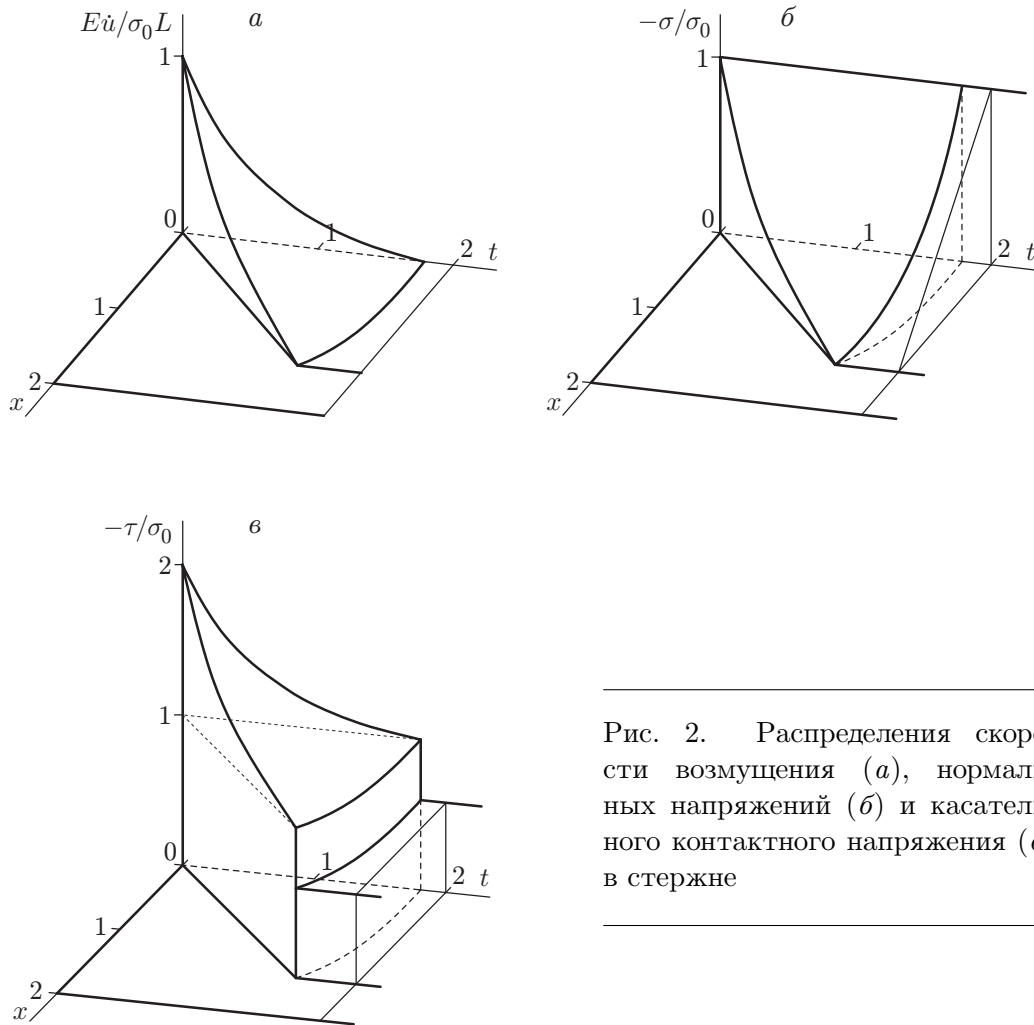


Рис. 2. Распределения скорости возмущения (а), нормальных напряжений (б) и касательного контактного напряжения (в) в стержне

этой линии имеют место скачки скорости и напряжений. Решение (6), (7) справедливо в областях A и B , причем отсутствие возмущений в предфронтной области учитывается множителем Хевисайда. В зоне C скорость возмущения становится отрицательной, что противоречит исходному предположению о знаке скорости, поэтому полученные формулы в этой зоне неверны. Кривая, разделяющая зоны B и C и являющаяся линией слабого разрыва, находится численно из условия $\dot{u}(x, t) = 0$. При переходе через эту кривую движение точек стержня прекращается, а на ней имеют место скачки ускорения, касательного напряжения и градиента осевого напряжения. В области C перемещения и напряжения не меняются со временем и имеют значения, зафиксированные на линии прекращения движения. Касательные напряжения определяются из уравнений статики как половина градиента осевых напряжений, вычисленных на линии слабого разрыва.

На рис. 2 представлены нестационарные поля безразмерных скорости, осевого напряжения $\sigma = Eu'/L$ и касательного контактного напряжения. В расчетах принято $\tau_c = \sigma_0$, $B = 1$. С увеличением времени и координаты указанные величины уменьшаются, причем на фронте распространения волны — экспоненциально (см. (6), (7)). Впервые прекращение движения точек стержня наблюдается на расстоянии $L_* = (L/B) \ln(1 + 2\sigma_0 B/\tau_c)$ от торца стержня. В частности, при малых B получаем поправку к результату [1, 2]: $L_* \approx L(2\sigma_0/\tau_c)(1 - B\sigma_0/\tau_c)$.

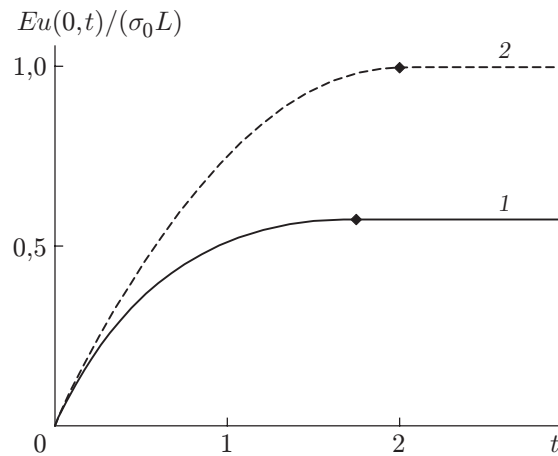


Рис. 3. Зависимость перемещения нагружаемого торца стержня от времени при наличии вязкопластического сопротивления (1) и сухого трения (2)

В отличие от случая чисто сухого трения прекращение движения в рассматриваемой системе происходит не мгновенно, а с конечной скоростью, превышающей скорость распространения фронта возмущения. Следует отметить, что после прекращения движения в возмущенной области стержня остаточные нормальные и контактные касательные напряжения, а также перемещения сечений могут быть выражены через длину возмущенного участка следующим образом:

$$\sigma(x, \infty) = -\sigma_0 \left(1 - \frac{L}{L_*} x\right), \quad \tau(x, \infty) = \sigma_0 \frac{L}{L_*}, \quad u(x, \infty) = \frac{\sigma_0}{2E} \frac{L_*}{L} \left(1 - \frac{L}{L_*} x\right)^2.$$

Значения σ , τ , u , полученные по этим формулам, совпадают со значениями на линии прекращения движения, вычисленными из выражений (6), (7).

Величину смещения нагружаемого торца до момента остановки можно определить, выразив квадратуру (7) при $x = 0$ через вырожденную гипергеометрическую функцию [9] (кривая 1 на рис. 3):

$$u(0, t) = \frac{\sigma_0 L}{E} \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B}\right) 2t \Phi(1/2, 2, 2Bt) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{2B} t \right].$$

Для сравнения на рис. 3 показаны перемещения в случае чисто сухого трения (кривая 2).

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

При наличии вязкопластического внешнего сопротивления характер движения сечений стержня подобен характеру движения при наличии сухого трения, влияние вязкости является менее значительным.

Несмотря на то что решение поставленной задачи выражается через квадратуры специальных функций, величины остаточных напряжений и перемещений можно найти из уравнений статики, зная длину возмущенного участка.

В отличие от случая сухого трения, когда возмущенная часть стержня движется как абсолютно твердое тело и движение прекращается одновременно по всей длине от торца до фронта волны, наличие вязкой компоненты сопротивления обуславливает движение возмущенной зоны стержня как деформируемой области, а прекращение движения на участке между фронтом волны и торцом стержня происходит со скоростью, превышающей скорость возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никитин Л. В.** Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11, № 4. С. 53–106.
2. **Никитин Л. В.** Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998.
3. **Султанов К. С.** Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 6. С. 92–101.
4. **Кургузов В. Д., Немировский Ю. В.** Моделирование динамических процессов забивки и извлечения свай из грунта // Изв. вузов. Стр-во. 2011. № 7. С. 82–90.
5. **Кургузов В. Д., Немировский Ю. В.** Математическая модель динамической вытяжки жесткопластического металлического волокна из металлокомпозита // Изв. Алт. гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2012. Т. 73, № 1/1. С. 69–71.
6. **Рейнер М.** Реология. М.: Наука, 1965.
7. **Диткин В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высш. шк., 1965.
8. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983.
9. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 26/IX 2012 г.,
в окончательном варианте — 28/II 2013 г.*
