ЛИТЕРАТУРА

1. **Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.** Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1983.
3. **Коваленко Г. П.** Метод связанных параметров в теории упругости непрерывно-неоднородных сред // Механика неоднородных структур. Тез. докл. I Всесоюз. конф.— Киев: Наук. думка, 1983.
4. **Коваленко Г. П.** Матричные алгоритмы метода асимптотически эквивалентных систем в задачах неоднородной вязкоупругости // Восьмая Всесоюз. конф. по прочности и пластичности. Тез. докл.— Пермь, 1983.
5. **Фещенко С. Ф., Шкиль Н. Н., Николенко Л. Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.
6. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.

Поступила 17/IV 1986 г.

УДК 539.374

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. Г. Новиков

(*Москва*)

Особенности и детали пластического течения у вершины трещины определяют ее развитие [1]. Поэтому важно иметь правильное представление о форме и размерах пластической зоны, об интенсивности деформаций в ней. В связи с этим большое значение приобретают задачи, в ходе решения которых, помимо определения напряжений и деформаций, должна быть определена без предварительных допущений граница, отделяющая упругую область от пластической. Приближенными или численными методами такие задачи исследовались в [2—8], а аналитические решения в замкнутом виде получены только для антиплоской деформации безграничной среды с одной прямолинейной трещиной или периодической системой коллинеарных дефектов [9—14]. В данной работе получено точное аналитическое решение упругопластической задачи об антиплоской деформации полосы с полубесконечной трещиной.

Рассмотрим антиплоскую деформацию полосы из упругопластического материала, занимающую область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant d$. Предполагается, что в пластическом состоянии поведение материала описывается условием Треска

$$\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 = \tau_*^2 \tag{1}$$

и ассоциированным законом пластического течения, а в упругом — линейным законом Гука

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 < \tau_*^2, \tag{3}$$

где σ_{xz} и σ_{yz} — компоненты тензора напряжений; τ_* — предел текучести; μ — модуль сдвига; w — смещение вдоль оси z. В полосе при $y = 0$, $x < 0$ имеется полубесконечный разрез-трещина, берега которого свободны от нагрузки

$$\sigma_{yz} = 0, \ x < 0, \ y = 0. \tag{4}$$

Известно [5, 9], что при антиплоской деформации область пластичности примыкает к вершине трещины и расположена целиком в области $x > 0$, как показано на рис. 1, а распределение напряжений и деформаций в пластической зоне имеет вид

$$\sigma_{\theta z} = \tau_*, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\tau_*}{\mu} R(\theta), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

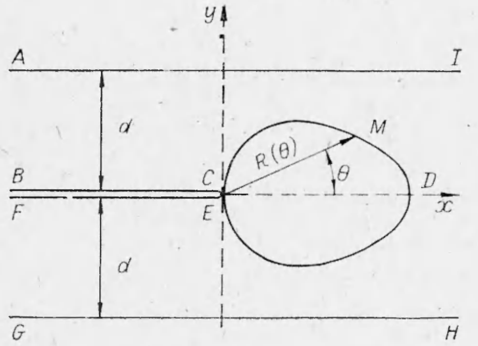

Рис. 1

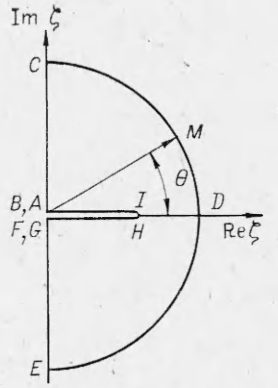

Рис. 2

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$; $R(\theta)$ — расстояние от начала координат до упругопластической границы. Значение $R(\theta)$ заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи.

Пусть на границе полосы при $y = \pm d$ задано смещение

(6) $$w(x, \pm d) = \pm d\tau_0/\mu, \quad |x| < \infty,$$

где τ_0 — постоянная с размерностью напряжения ($\tau_0 \leqslant \tau_*$). Из (2) и (6) следует

(7) $$\sigma_{xz} = 0, \quad |x| < \infty, \quad y = \pm d;$$

(8) $$\sigma_{yz} - i\sigma_{xz} \to \tau_0, \quad x \to +\infty, \quad |y| \leqslant d.$$

При построении решения в упругой области соотношения (4), (7) служат граничными условиями на берегах трещины и на границе полосы, а соотношение (1) играет роль краевого условия на упругопластической границе. После построения решения в упругой области и определения формы упругопластической границы распределение напряжений и деформаций в пластической области находится из формул (5).

Известно [15], что в упругой области $\sigma_{yz} - i\sigma_{xz}$ является аналитической функцией $x - iy$ и наоборот

(9) $$\frac{x - iy}{d} = f'(\zeta), \quad \zeta = \frac{\sigma_{yz} - i\sigma_{xz}}{\tau_*}.$$

Здесь $f(\zeta)$ — функция, аналитическая при всех ζ, соответствующих напряжениям в упругой области, а штрих означает дифференцирование по аргументу. Из (3), (4), (7)—(9) вытекает, что упругая область плоскости (x, y) отображается на полукруг единичного радиуса с разрезом по вещественной оси в плоскости ζ (рис. 2). Точки A, B, ..., H, I, M на рис. 2 соответствуют точкам A, B, ..., H, I, M на рис. 1, причем на рис. 2 точка A сливается с B, F сливается с G, а точка H с I. Из (5) следует [10], что угол θ на рис. 1 равен углу θ на рис. 2 для любой точки M на упругопластической границе.

Обозначим через $\partial/\partial p$ дифференцирование вдоль длины дуги контура A, B, ..., H, I на рис. 2 при обходе против часовой стрелки. Из (9) получаем

(10) $$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{x - iy}{d} \frac{\partial \zeta}{\partial p}.$$

Используя рис. 1 и 2 и выражение (10), можно показать [10], что $\partial \mathrm{Re} f/\partial p = 0$ на участке границы $BCDEF$. Поэтому

(11) $$\mathrm{Re}\, f = 0, \quad \zeta \in BCDEF,$$

где постоянная интегрирования положена равной нулю. Так как $y = \pm d$ и $\partial\zeta/\partial p = \pm 1$ при $\zeta \in AIHG$, то $\partial \mathrm{Im} f/\partial p = -1$ на обоих берегах разреза. Следовательно,

$$\operatorname{Im} f = \pm T \mp \zeta, \quad \zeta \in AIHG. \tag{12}$$

Здесь $T = \tau_0/\tau_*$, а верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему берегу разреза на рис. 2.

Таким образом, для определения функции $f(\zeta)$, аналитической в области внутри кривой $A, B, \ldots, H, I$, имеем смешанную краевую задачу (11), (12). Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение ее принимает вид

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\ln(1-T^2\zeta^2)}{\zeta} - \zeta\ln\left(1-\frac{T^2}{\zeta^2}\right)\right] + \frac{T}{\pi}\ln\left[\frac{(\zeta-T)(1+T\zeta)}{(\zeta+T)(1-T\zeta)}\right], \tag{13}$$

$$f'(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\left[\ln\left(1-\frac{T^2}{\zeta^2}\right) + \frac{\ln(1-T^2\zeta^2)}{\zeta^2}\right].$$

Для положения упругопластической границы из (9) находим [10]

$$R(\theta)/d = e^{i\theta}f'(e^{i\theta}). \tag{14}$$

Значение смещения на упругопластической границе получается из (5) интегрированием по θ

$$W = \mu w\,[R(\theta), \theta]/d\tau_* = -i\,[f(e^{i\theta}) - f(1)]. \tag{15}$$

Формулы (5), (9) и (13)—(15) дают решение упругопластической задачи для полосы с полубесконечной трещиной.

Подставляя (13) в (14) и (15), имеем

$$\frac{R(\theta)}{d} = -\frac{2}{\pi}(\ln q\cos\theta - \varphi\sin\theta), \tag{16}$$

$$W = \frac{2}{\pi}(T\varphi + 2T\psi - \varphi\cos\theta - \ln q\sin\theta),$$

$$q = (1 - 2T^2\cos 2\theta + T^4)^{1/2},$$

$$\sin\varphi = \frac{T^2}{q}\sin 2\theta, \quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\sin\psi = \frac{T\sin\theta}{(1+2T\cos\theta+T^2)^{1/2}}, \quad |\psi| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Анализ выражений (16) показывает, что максимальное значение $R = R_0$ наблюдается при $\theta = 0$, а $W = W_0$ — при $\theta = \pi/2$, причем

$$\frac{R_0}{d} = -\frac{2}{\pi}\ln(1-T^2), \tag{17}$$

$$W_0 = \frac{2}{\pi}\left[2T\arcsin\frac{T}{\sqrt{1+T^2}} - \ln(1+T^2)\right].$$

Зависимости R_0/d и W_0 от безразмерной нагрузки T приведены на рис. 3 (кривые *1* и *2* соответственно). Из (17) вытекает, что при малых T R_0 и W_0 пропорциональны T^2. При $T \to 1$ в отличие от случая одной трещины конечной длины в безграничной среде [10] значение R_0 обращается в бесконечность по логарифмическому закону, а не степенному. В связи с этим рассмотрим случай $T = 1$ отдельно. Соотношения (13) тогда упрощаются:

$$f(\zeta) = i(1-\zeta) + \frac{1}{\pi\zeta}\left[(1-\zeta^2)\ln(1-\zeta^2) + 2\zeta^2\ln\zeta\right],$$

$$f'(\zeta) = -i - \frac{1}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{\zeta^2}\right)\ln(1-\zeta^2) - 2\ln\zeta\right],$$

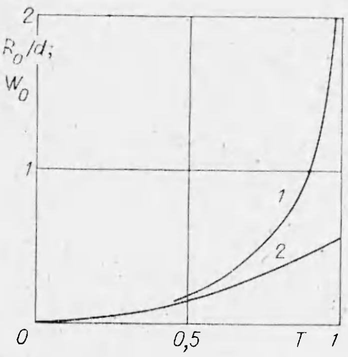

Рис. 3

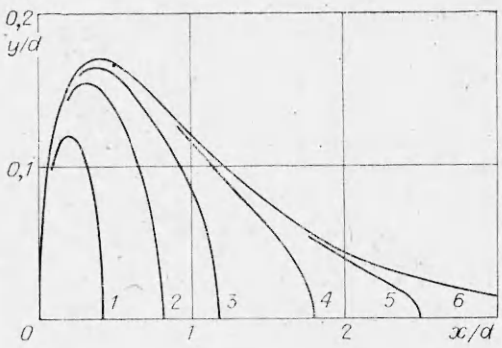

Рис. 4

а выражения для $R(\theta)$ и W приводятся к виду

$$\frac{R(\theta)}{d}=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-\cos\theta\ln(2\sin\theta)\right], \tag{18}$$

$$W=1-\cos\theta+\frac{2}{\pi}[\theta\cos\theta-\sin\theta\ln(2\sin\theta)],$$

$$R_0=\infty,\quad W_0=1-\frac{2}{\pi}\ln 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Форма упругопластической границы, рассчитанная по формулам (16) и (18), показана на рис. 4 (кривые *1—6* соответствуют $T=0{,}7$; 0,85; 0,92; 0,97; 0,99 и 1). При $T\to 0$ пластическая зона асимптотически принимает форму круга, что согласуется с результатом для случая одной полубесконечной трещины в безграничной среде [5]. При $T\to 1$ длина пластической зоны много больше ее ширины, т. е. с возрастанием нагрузки пластическая область увеличивается главным образом в направлении продолжения трещины.

Значение смещения на упругопластической границе приведено на рис. 5, где кривые *1—3* отвечают $T=0{,}7$; 0,85 и 1. В отличие от случая трещины конечной длины в безграничной среде [10] здесь смещение на упругопластической границе остается конечным при $T\to 1$.

Зависимость напряжения σ_{yz} от координаты x при $y=0$ (на продолжении трещины) показана на рис. 6 сплошными линиями *1—4* для $T=0{,}2$; 0,3; 0,4 и 0,5, штриховыми при тех же T приведены значения функции

$$\frac{\sigma_{yz}}{\tau_*}=\frac{T}{\sqrt{1-e^{-\pi x/d}}}, \tag{19}$$

описывающей распределение напряжений σ_{yz} на продолжении трещины в

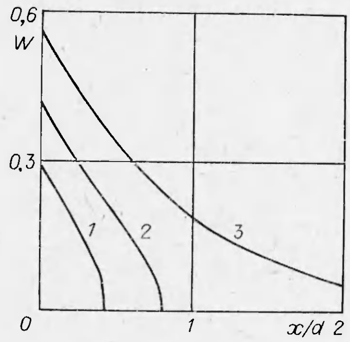

Рис. 5

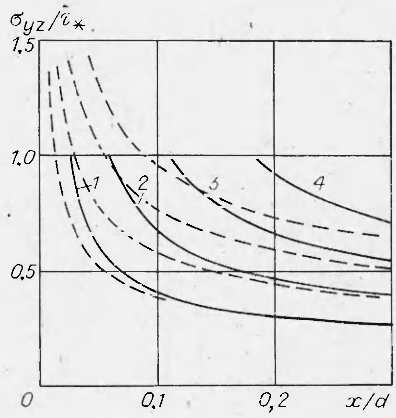

Рис. 6

случае чисто упругой задачи, когда пластическая зона у вершины трещины отсутствует [16]. Из представленных на рис. 6 результатов видно, что зависимости (9) и (19) согласуются между собой лишь при $x > \Delta$, где $\Delta \sim R_0$. Однако так как $R_0 \sim T^2$ при $T \ll 1$, то в случае малой нагрузки решение упругой задачи с хорошей точностью аппроксимирует решение упругопластической задачи практически во всей полосе $|y| \leqslant d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Макклинток Ф.** Пластические аспекты разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1976.— Т. 3.
2. **Кудрявцев Б. А., Партон В. З. и др.** О локальной пластической зоне вблизи конца щели // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 1.
3. **Кудрявцев Б. А., Партон В. З. и др.** О локальной пластической зоне вблизи конца щели (плоская деформация) // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 5.
4. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения.— М.: Наука, 1974.
5. **Слепян Л. И.** Механика трещин.— Л.: Судостроение, 1981.
6. **Греков М. А.** О пластических зонах у вершины трещины при плоской деформации // ФХММ.— 1978.— № 5.
7. **Hilton P. D., Hutchinson J. W.** Plastic intensity factors for cracked plates // Engng Fract. Mech.— 1971.— V. 3, N 4.
8. **Levy N., Marcal P. V. et al.** Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis // Intern. J. Fracture Mech.— 1971.— V. 7, N 2.
9. **Hult J. A., H. McClintock F. A.** Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear // 9th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels, 1956; Actes.— Bruxeless, 1957.— V. 8.
10. **Rice J. R.** Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear // Intern. J. Fracture Mech.— 1966.— V. 2, N 2.
11. **Edmunds T. M., Willis J. R.** Analysis of a crack sited at a notch in an elastic-perfectly plastic strip subjected to longitudinal shear // Intern. J. Fracture.— 1976.— V. 12, N 3.
12. **Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача в условиях антиплоской деформации // ПММ.— 1962.— Т. 26, вып. 4.
13. **Сегалов А. Е.** О форме пластических зон, возникающих при антиплоской деформации полупространства, ослабленного вырезом конечной ширины // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 5.
14. **Артур П., Блэкберн У.** Влияние формы пластической зоны на ее протяженность и раскрытие трещин // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению.— М.: Мир, 1972.
15. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1981.
16. **Новиков В. Г., Тулинов Б. М.** Стационарное движение системы параллельных трещин продольного сдвига // ПМТФ.— 1984.— № 2.

Поступила 30/I 1986 г.

УДК 624.131 + 539.215

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА, ЛЕЖАЩЕГО НА ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В. М. Александров, Л. М. Моносов, А. М. Цыбин, А. А. Шматкова

(*Москва, Ленинград*)

Рассмотрена бесконечная тонкая пластинка, находящаяся в условиях цилиндрического квазистатического изгиба, на гидравлическом основании — слое вязкой жидкости конечной глубины. Материал пластинки несжимаем и таков, что интенсивности девиатора скоростей деформаций и девиатора напряжений связаны степенной зависимостью. Такие соотношения часто принимают для описания напряженно-деформированного состояния конструкций из льда, находящихся в условиях развитой установившейся ползучести. В случае изгиба пластинки сосредоточенной силой получены асимптотические разложения для прогиба при большом и малом времени. Построенные решения дали возможность найти зависимость прогибов ледяного покрова от времени, аналогичную той, которая имеется при выполнении натурных исследований.