

Области I и II разделены условием  $T_r = T_{пл}$ , где  $T_{пл}$  — температура плавления окисла металла восстановителя ( $Al_2O_3$ ,  $TiO_2$ ). Области II и III условно разграничены кривой, для которой  $\eta_p \approx 0,1$ .

В области III изучено влияние  $p_0$  на  $u_0$  для систем 2—6 (рис. 4). Видно, что с увеличением  $p_0$  величина  $u_0$  возрастает. Зависимость  $u_0$  от  $p_0$  хорошо спрямляется в логарифмических координатах и, следовательно, описывается формулой  $u_0 = Bp^\nu$ , где  $\nu_3 = \nu_4 = \nu_6 = 0,2$ ;  $\nu_2 = 0,3$ ,  $\nu_5 = 0,6$ . Следует отметить, что наиболее сильная зависимость  $u_0$  от  $p_0$  обнаружена для смеси  $NiO + Ti$ , у которой, согласно термодинамическому расчету, газообразных продуктов нет (см. рис. 3). Для этой системы проведен поиск неучтенных в термодинамическом расчете источников газа. Химический анализ показал, что используемый в работе Ti содержал 0,4% (по массе) растворенных  $H_2$  и  $N_2$ , которые при горении выделяются в реагирующем расплаве и образуют газовую фазу.

Рост  $u_0$  с увеличением  $p_0$  может происходить за счет изменения  $T_r$  (см. рис. 2) и плотности реагирующего расплава (уменьшение  $V_r$ ).

Поступила в редакцию 18/VIII 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, В. И. Юхвид, И. П. Боровинская. Докл. АН СССР, 1980, 225, 1.
2. В. И. Юхвид, Е. В. Околович, Г. А. Вишнякова С. М. Муратов.— В кн.: Проблемы технологического горения. Т. II. Черноголовка, 1981.
3. А. Р. Качин, В. И. Юхвид, Г. А. Вишнякова.— В кн.: Проблемы технологического горения. Т. II. Черноголовка, 1981.
4. Н. П. Ляпишев, Ю. Л. Плинер, Г. Ф. Игнатенко, С. И. Лапко. Аллюминотермия. М.: Металлургия, 1978.
5. А. С. Дубровин.— В кн.: Процессы горения в химической технологии и металлургии. Черноголовка, 1975.

### К ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ ОБДУВЕ

В. К. Булгаков, А. М. Липанов

(Ижевск)

Современные представления о механизме горения твердых топлив при обдуве основаны на тепловой модели Я. Б. Зельдовича [1], согласно которой эффект обдува выражается в увеличении суммарных коэффициентов переноса турбулентными слагаемыми. Исходя из тепловой модели, В. Н. Виллюнов предложил теорию эрозионного горения [2], в которой основным параметром, определяющим скорость эрозионного горения, является комплекс  $Vi = U\rho/v_{kr} \cdot \sqrt{\lambda}$ . Для области положительного эрозионного эффекта ( $\varepsilon = v_{k2}/v_{k1} > 1$ ) теория В. Н. Виллюнова подтверждается экспериментом [3]. Эффект отрицательной эрозии  $\varepsilon < 1$  моделью В. Н. Виллюнова не описывается.

Высказанные к настоящему времени гипотезы о сути отрицательной эрозии, например [3], объясняют ее воздействием турбулентности на зону химических реакций в газовой фазе.

Известные методики расчета эрозионной скорости горения [1, 2] используют недостаточно обоснованные упрощающие предпосылки. Так, для коэффициента турбулентной вязкости во всем диапазоне скоростей обдува принимается единая эмпирическая зависимость, имеющая ограниченную область применения; пренебрегается влиянием вдува; для области небольших значений параметра  $Vi$  (небольших скоростей обдува) принимается предположение об асимптотическом режиме течения [2].

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы на основе более детальных представлений о структуре пограничного слоя у поверхности горения проанализировать особенности горения твердых топлив при об-

дуве, дать простое физическое объяснение механизма отрицательной эрозии, предложить физически более обоснованную приближенную методику расчета эрозионной скорости горения.

1. При анализе качественных закономерностей горения твердых топлив в условиях обдува будем исходить из представлений теории горения Я. Б. Зельдовича — Д. А. Фрагк-Каменецкого о существовании в волне горения газовой фазы зоны инертного прогрева, в которой распределение параметров определяется конвекцией и процессами переноса, и зоны горения, в которой конвекция незначительна.

Динамический пограничный слой, точнее внутреннюю его часть ( $0 \leq y \leq 0,2\delta$ ), будем рассматривать состоящим из следующих характерных областей [4]:

1) подслоя с линейным распределением касательной составляющей скорости потока  $0 \leq y \leq l_1 = 3y_f$ ;

2) буферный слой  $l_1 < y \leq l_2 = 30y_f$ ;

3) области с логарифмическим распределением касательной составляющей скорости потока  $l_2 < y < 0,2\delta$ . Здесь  $y_f = v_m/u_\tau = (\rho_w/\tau_w)^{0,5} \cdot v_m$  — характерная длина [4];  $\delta$  — толщина динамического пограничного слоя.

При качественном анализе эрозионного эффекта предположим, что неизотермичность (в зоне инертного прогрева), а также возможный градиент давления во внешнем течении мало влияют на структуру пограничного слоя.

В зависимости от того, в какую область пограничного слоя распространяется зона горения можно рассмотреть два характерных режима горения: I — ламинарное горение, когда зона горения находится в подслое с линейным распределением скорости ( $l_r < l_1$ ); II — режим турбулентного горения, когда в процессах переноса появляются турбулентные составляющие ( $l_r > l_1$ ), где  $l_r$  — характерный масштаб зоны горения в газовой фазе.

2. Рассмотрим режим I. Введем параметр  $V = l_r/l_1$ , представляющий собой отношение характерного масштаба зоны горения к масштабу вязкого подслоя. Очевидно, для режима I  $V < 1$ . Расстояние  $l_r$  можно оценить следующей приближенной формулой [5]:

$$l_r \simeq \frac{\kappa_m}{\rho_K v_K c_p} \ln \left[ \frac{T_r - Q_K/c_p - T_n}{T_s - Q_K/c_p - T_n} \right], \quad (1)$$

где  $\rho_K v_K$  — массовая скорость горения вещества.

Выразим напряжение трения на поверхности горения, определяющее ширину вязкого подслоя, через коэффициент трения и параметры набегающего потока

$$\tau_w = 0,5 c_{f0} \varphi(N) \rho U^2. \quad (2)$$

Здесь  $c_{f0}$  — коэффициент трения на непроницаемой поверхности, определяемый критерием  $Re$ ;  $\varphi(N)$  — зависимость, описывающая влияние вдува на коэффициент трения;  $N = 2v_{вд}/U c_{f0}$  — параметр вдува.

Применяя для  $\varphi(N)$  простейшую аппроксимационную зависимость [6]

$$\varphi(N) = \begin{cases} 0 & \text{при } N/N_* \geq 1, \\ (1 - N/N_*)^2 & \text{при } N/N_* < 1 \end{cases} \quad (3)$$

( $N_* = 4$ , согласно [6]) и учитывая, что  $\lambda_0 = 4c_{f0}$ , получаем

$$V \simeq \begin{cases} 0 & \text{при } Vi \leq Vi_* = \frac{2T_s}{T_r \sqrt{\lambda_0}}, \\ 0,1 \sqrt{\frac{T_r}{T_s}} \frac{1}{Pr_{га}} \ln \left[ \frac{T_r - Q_K/c_p - T_n}{T_s - Q_K/c_p - T_n} \right] & \text{при } Vi > Vi_*. \end{cases} \quad (4)$$

Для пороха Н [3, 5] в предположении, что  $Pr_m \sim 1$ , получаем

$$V = \begin{cases} 0 & \text{при } Vi \leq Vi_* \simeq 0,6 / \sqrt{\lambda_0}, \\ 0,6 (Vi - Vi_*) & \text{при } Vi > Vi_*. \end{cases} \quad (4')$$

Для небольших скоростей обдува ( $Re \sim 10^5$ )  $\lambda_0 \sim 0,02$ , откуда для пороха Н находим  $Vi_* \simeq 4$ , что при  $p = 10^7$  Н/м<sup>2</sup> соответствует скорости потока  $U \simeq 34$  м/с.

Из соотношений (4) можно сделать вывод о существовании порогового значения параметра  $Vi$ , разделяющего режим нормального горения и режим, при котором в зоне горения появляется касательная составляющая скорости потока. Из соотношений (4) также следует, что  $Vi$  характеризует отношение масштабов зоны горения и вязкого подслоя, поэтому он отражает основную идею тепловой теории эрозийного горения.

Для области небольших значений коэффициента эрозии  $\epsilon$  воспользуемся формулами (4) и представим экспериментальную кривую для пороха Н в переменных  $\epsilon$ ,  $V$ . На рис. 1 приведена такая зависимость. Видно, что эффект отрицательной эрозии проявляется уже в первом режиме горения ( $V < 1$ ), когда зона горения находится в вязком подслое. В силу этого можно предположить, что причины отрицательной эрозии не связаны с турбулентностью, а имеют другую природу.

Рассмотрим качественную картину обдува в области  $0 < V < 1$ . Поскольку здесь теплопроводность и диффузия будут определяться молекулярными коэффициентами переноса, с позиций теории горения Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого эффект обдува должен проявляться через зону инертного прогрева, в которой существенна конвекция. Скорость течения, температура и другие параметры газовой фазы в зоне прогрева являются двумерными полями в плоскости  $x$ ,  $y$ . Качественный анализ влияния обдува, не решая двумерную задачу о распределении параметров в зоне прогрева для простейшего случая плоской поверхности горения в неограниченном потоке, можно провести следующим образом.

Рассмотрим в зоне прогрева линии тока ( $\omega$ ) и градиента температуры ( $\tau$ ) (рис. 2). Обозначая через  $\vec{w}$  скорость движения газовой фазы, условие для градиента температуры в момент начала реакции можно записать в виде [5]

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{Q}{\kappa_m} [\rho w \cos(\omega, \tau)]_{l_r}, \quad (5)$$

где  $Q$  — тепловой эффект реакций в газовой фазе;  $(\omega, \tau)$  — угол между

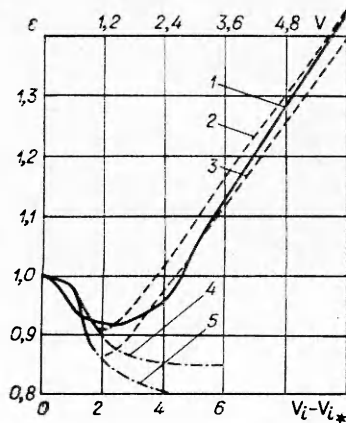


Рис. 1. Зависимость  $\epsilon(Vi - Vi_*)$ ,  $\epsilon(V)$  для пороха Н (1 — экспериментальная кривая; по формуле (9) при  $\beta = 0,85$  (4) и  $0,8$  (5); из решения краевой задачи при  $\beta = 0,85$  (2) и  $0,8$  (3)).

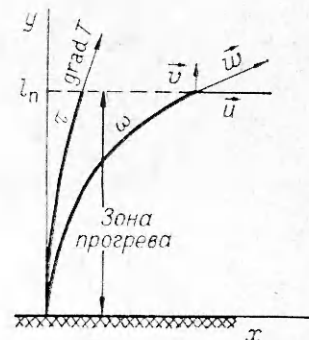


Рис. 2. Линия тока массы  $\omega$  и линия градиента температуры  $\tau$  в зоне горения газовой фазы.

направлением  $\text{grad } T$  и вектором скорости  $\vec{w}$  при  $y = l_r$ . С другой стороны, имеем [5]

$$\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{\frac{T_r}{\kappa_m}} \int QW(T) dT, \quad (6)$$

где  $W$  — скорость химической брутто-реакции в газовой фазе. Учитывая, что  $\rho w = \rho v / \cos(\omega, y)$ , можно записать

$$\rho w \cos(\omega, \tau) = \rho v \sqrt{[1 + \text{tg}^2(\omega, y)]/[1 + \text{tg}^2(\omega, \tau)]}.$$

Используя приближенную зависимость

$$\text{tg}(\omega, \tau) = \beta \text{tg}(\omega, y), \quad (7)$$

где  $0 < \beta < 1$ , и оценки

$$(\rho v)_{l_r} = \rho_K v_K, \quad [\text{tg}(\omega, y)]_{l_r} = \left(\frac{u}{v}\right)_{l_r} \simeq \frac{u_{\tau}^2 l_r}{v_m l_r},$$

из (5), (6) для массовой скорости горения при обдуве получаем

$$(\rho_K v_{K2}) \simeq \sqrt{\frac{1 + \beta^2 \left(\frac{u_{\tau}^2 l_r}{v_m v_s} \frac{T_s}{T_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{u_{\tau}^2 l_r}{v_m v_s} \frac{T_s}{T_r}\right)^2}} \frac{2\kappa_m}{Q} \int_{T_r}^{T_s} W(T) dT.$$

Откуда для коэффициента эрозии  $\varepsilon = v_{K2}/v_{K1}$  имеем

$$\varepsilon \simeq \sqrt{(1 + \beta^2 \psi^2)/(1 + \psi^2)}, \quad (8)$$

где  $\psi = \frac{u_{\tau} \rho_w}{v_K \rho_K} \frac{l_r}{y_f} \frac{T_s}{T_r}$  — комплекс, определяющий коэффициент эрозии режима горения I.

Если пренебречь изменением ширины зоны прогрева при обдуве и воспользоваться приближенными зависимостями (1)–(3), коэффициент эрозии можно выразить через параметр  $Vi$  следующим образом:

$$\varepsilon \simeq \begin{cases} 1 & \text{при } Vi \leq Vi_*, \\ \sqrt{\frac{1 + \frac{0.016}{(Pr_m)^2} \beta^2 \ln^2 \left( \frac{T_r - Q_K/c_p - T_H}{T_s - Q_K/c_p - T_H} \right) (Vi - Vi_*)^4}{1 + \frac{0.016}{(Pr_m)^2} \ln^2 \left( \frac{T_r - Q_K/c_p - T_H}{T_s - Q_K/c_p - T_H} \right) (Vi - Vi_*)^4}} & \text{при } Vi > Vi_*. \end{cases} \quad (9)$$

Для пороха Н получаем

$$\varepsilon \simeq \begin{cases} 1 & \text{при } Vi \leq Vi_*, \\ \sqrt{\frac{1 + 0.2\beta^2 (Vi - Vi_*)^4}{1 + 0.2 (Vi - Vi_*)^4}} & \text{при } Vi > Vi_*. \end{cases} \quad (9')$$

На рис. 1 зависимость (9') представлена кривыми 4, 5.

Причине появления отрицательной эрозии можно дать следующее простое физическое объяснение. До тех пор пока зона горения находится в вязком подслое с пренебрежимо малыми коэффициентами турбулентного переноса, обдув приводит к увеличению конвекции в зоне прогрева, к «растяжению» температурного профиля и, как результат, к уменьшению теплового потока на поверхности горения. Существование порогового значения  $Vi_*$  физически объясняется тем, что наличие «вдува» с поверхности вещества приводит к появлению критического условия возникновения пограничного слоя (напряжения трения) на поверхности горения. В области  $Vi < Vi_*$  пограничный слой на поверхности

сти к-фазы отсутствует, поэтому обдув не оказывает никакого влияния на скорость горения.

Зависимость (9) описывает начальный участок области отрицательной эрозии ( $V < 1$ ). По мере того, как ширина вязкого подслоя становится сравнимой с шириной зоны прогрева, на скорость горения будет влиять увеличение коэффициентов турбулентного переноса. В области  $V \geq 1$  коэффициент эрозии будет определяться двумя противоположными по воздействию эффектами: конвекцией и турбулентным переносом.

3. Рассмотрим режим горения, соответствующий  $V \geq 1$ . Примем следующие допущения:

1) химические реакции в зоне горения описываются одной брутто-реакцией;

2) теплофизические характеристики исходного реагента и конечного продукта одинаковы;

3) течение газовой фазы у поверхности горения удовлетворяет гипотезам теории пограничного слоя.

Законы сохранения массы, количества движения, энергии в случае стационарного горения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho uv &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\text{Pr}_m \kappa_m}{c_p} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\kappa_m}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{Q}{c_p} W, \\ \rho u \frac{\partial a}{\partial x} + \rho v \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{L_m \kappa_m}{c_p} \frac{\partial a}{\partial y} - W. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\kappa_m$  — коэффициент молекулярной теплопроводности;  $L_m$ ,  $\text{Pr}_m$  — молекулярные числа Льюиса — Семенова, Прандтля (Шмидта). При записи уравнения энергии предположено, что в балансе энергии определяющими являются конвекция, теплопроводность и теплоприход от химической реакции.

Система уравнений (10) замыкается уравнением состояния

$$p = R \rho T. \quad (11)$$

Проводя осреднение системы (10), (11), получаем следующие уравнения, описывающие осредненные характеристики газовой фазы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\text{Pr}_m \kappa_m}{c_p} + \mu_t \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\kappa_m}{c_p} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{Q}{c_p} \bar{W}, \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{L_m \kappa_m}{c_p} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} - \bar{W}, \\ p/R &= \bar{\rho} \bar{T}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что при записи системы (12) использовалось представление корреляций  $\overline{T'v'}$ ,  $\overline{a'v'}$  турбулентной диффузией осредненных параметров:

$$\overline{T'v'} = \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad \overline{a'v'} = \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y}.$$

Система (12) не замкнута, она содержит характеристики пульсационного течения. В зависимости от интенсивности турбулентности и скорости течения можно рассмотреть различные приближения (12). Введем параметр  $\alpha = [w']/[w]$ , равный отношению масштаба пульсаций скорости к масштабу осредненной скорости в зоне горения газовой фазы. Рассмотрим случай, когда  $\alpha$  — малая величина. При дозвуковом течении отношение масштабов пульсаций плотности к осредненной плотности в зоне прогрева можно оценить формулой [7]

$$[\rho']/[\bar{\rho}] = \bar{M}^2 \alpha^2,$$

где  $\bar{M}$  — число Маха осредненного течения в зоне прогрева. Из уравнения состояния следует  $[T']/[\bar{T}] \sim [\rho']/[\bar{\rho}]$ , поэтому для корреляций можно записать следующие оценки:

$$[u'v']/[\bar{w}^2] \sim \alpha^2, [\rho'v']/[\bar{\rho}][\bar{w}] \sim [T'v']/[\bar{T}][\bar{w}] \sim \bar{M}^2 \alpha^3, \\ [a'v']/[\bar{a}][\bar{w}] \sim \bar{M}^2 \alpha^3, [\rho'T']/[\bar{\rho}][\bar{T}] \sim \bar{M}^4 \alpha^4.$$

Аналогично, разложив скорость реакции в ряд в окрестности математических ожиданий и проводя операцию осреднения, получим

$$\overline{W(\rho, a, T)} \sim W(\bar{\rho}, \bar{a}, \bar{T})[1 + O(\bar{M}^4 \alpha^4)].$$

Эти оценки показывают, что можно рассмотреть несколько приближений (12) по малому параметру  $\alpha$ . Ограничимся учетом величин порядка  $\bar{M}^2 \alpha^3$ . В этом случае в системе (12)  $\overline{W(\rho, a, T)} = W(\bar{\rho}, \bar{a}, \bar{T})$ , а уравнение состояния следует взять в виде

$$p/R = \bar{\rho}\bar{T}. \quad (13)$$

Для замыкания (12) необходимо определить турбулентные вязкость  $\mu_t$  и число  $Pr_t$ . Основное содержание теории турбулентности (моделей турбулентности) как раз и заключается в формулировании задач для этих и аналогичных им характеристик. Основа таких моделей — транспортные уравнения для напряжений Рейнольдса, проблема замыкания которых решается на базе экспериментального материала и из соображений размерности. Существующие модели турбулентности, например модель  $K-\epsilon$  Лаундера — Сполдинга, неплохо описывают пристеночную турбулентность, начиная с логарифмического подслоя, являющегося областью их «идентификации». Для таких более тонких структур, как подслей с линейным распределением скорости, буферный подслей, известные модели турбулентности пока малоприменимы. Поэтому при анализе эрозийного эффекта в области  $V \geq 1$  используем как наиболее достоверные результаты экспериментальных исследований вязкого, буферного и логарифмического слоев, оформленные в виде алгебраических моделей турбулентности. Определяя внутреннюю границу логарифмического подслоя как  $y_2 \approx 30y_t$ , параметр  $Vi$ , при котором зона горения выходит в логарифмический подслей, можно оценить следующим неравенством:

$$Vi - Vi_* > 85 \sqrt{\frac{T_s}{T_\Gamma}} \frac{Pr_{t, \lambda}}{\ln \left[ \frac{T_\Gamma - Q_R/c_p - T_H}{T_s - Q_R/c_p - T_\Gamma} \right]}.$$

В частности, для пороха Н получаем  $Vi - Vi_* > 13$  или при  $p = 10^7$  Н/м<sup>2</sup>,  $\lambda \approx 0,02$  скорость обдува  $U > 110$  м/с. Таким образом, уже при скоростях обдува более 110 м/с коэффициент турбулентной вязкости в зоне горения будет определяться закономерностями вязкого и логарифмического слоев.

Сделанные выше оценки показывают, что из известных зависимостей для коэффициента турбулентной вязкости [8] (Рейхардта, Ранни, Дейслера, Ван-Дрифта и др.) более правильным будет воспользоваться

зависимостью Ван-Дриста

$$\frac{\mu_t}{\mu_m} = k^2 y^{+2} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{y^+}{y_s^+} \right) \right]^2 \frac{\partial u^+}{\partial y^+}, \quad (14)$$

где  $y^+ = y/y_f$ ;  $u^+ = \bar{u}/u_f$ ;  $k = 0,4$ ;  $y_s^+ = 26$ , которая в отличие от остальных справедлива для всей внутренней части пограничного слоя (до  $y < 0,28$ ).

Результаты экспериментальных исследований пристеночной турбулентности показывают [4], что в пограничном слое турбулентное число Прандтля (Шмидта) можно считать постоянным и принять равным 0,9—1,1.

Рассмотрим граничные условия задачи. Введем область  $[0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y]$ , где  $L_y$  — расстояние, включающее в себя зону химических реакций и динамический пограничный слой. Физическая формулировка граничных условий на границах  $x = 0$ ,  $y = L_y$  тривиальна — должны быть заданы параметры набегающего потока. На границе  $x = L_x$  какие-либо физические условия отсутствуют, так как для параболической задачи (12) координата  $x$  играет роль времени.

На границе  $y = 0$  (поверхность вещества) граничные условия выражают законы сохранения. Конкретный вид граничных соотношений определяется принятой математической моделью разложения к-фазы. Например, рассматривая разложение к-фазы как брутто-реакцию с тепловым эффектом  $Q_k$  и энергией активации  $E_k$ , можно получить следующую зависимость для скорости горения [5]:

$$v_k = K \exp(-E_k/2RT_s). \quad (15)$$

В частности, при  $E_k = 19065$  кал/моль и  $K = 8,46$  м/с зависимость хорошо описывает экспериментальные результаты для пороха Н, приведенные в [1, 5]. Граничные условия на поверхности горения можно записать в виде

$$\begin{aligned} y = 0: \bar{u} &= 0, \quad \bar{\rho}v = \rho_k v_k, \\ \rho_k v_k \bar{a} - \frac{\bar{L}_m \kappa_m}{c_p} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} &= \rho_k v_k, \\ \frac{\kappa_m}{c_p \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \rho_k v_k, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $v_k$  связана с температурой поверхности  $T_s$  уравнением (15).

Используя тот же подход, что и при анализе режима горения I, для рассматриваемой двумерной задачи (12) можно записать приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, повторяя рассуждения, иллюстрируемые рис. 2, левую часть уравнения энергии системы (12) можно представить выражением

$$\bar{\rho} w \frac{\partial T}{\partial \tau} \cos(\omega, \tau)$$

или

$$\frac{\bar{\rho} v}{\cos^2(\omega, y) [1 + \operatorname{tg}(\omega, y) \operatorname{tg}(\omega, \tau)]} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Тогда, применяя приближенную зависимость (7), запишем уравнение энергии

$$\frac{1 + (\bar{\rho} \bar{u} / \bar{\rho} v)^2}{1 + \beta_T (\bar{\rho} \bar{u} / \bar{\rho} v)^2} \bar{\rho} v \frac{d\bar{T}}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{\kappa_m}{c_p} + \frac{\mu_t}{\operatorname{Pr}_t} \right) \frac{dT}{dy} + \frac{Q}{c_p} W(\bar{\rho}, \bar{a}, \bar{T}). \quad (17)$$

Аналогично для концентрации исходного реагента получаем

$$\frac{1 + (\bar{\rho} \bar{u} / \bar{\rho} \bar{v})^2}{1 + \beta_a (\bar{\rho} \bar{u} / \bar{\rho} \bar{v})^2} \bar{\rho} \bar{v} \frac{d\bar{a}}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{L_m \kappa_m}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{d\bar{a}}{dy} - W(\bar{\rho}, \bar{a}, \bar{T}). \quad (18)$$

Отметим, что в частном случае  $L_m = 1$  коэффициенты  $\beta_t$ ,  $\beta_a$  аппроксимационной зависимости (7) равны между собой. Предположив, что  $\text{grad } \bar{u}$  направлен по оси  $y$ , а

$$\bar{\rho} \bar{v} = \rho_K v_K, \quad (19)$$

интегрирование уравнения количества движения по  $y$  дает

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\left( \frac{Pr_m \kappa_m}{c_p} + \mu_t \right)} \left[ \tau_w + \rho_K v_K \bar{u} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right], \quad (20)$$

где  $\tau_w = \frac{Pr_m \kappa_m}{c_p} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_{y=0}$  — напряжение трения на поверхности топлива.

Если для вычисления коэффициента турбулентной вязкости использовать модели турбулентности, не учитывающие влияние вдува, то для согласования профиля скорости  $\bar{u}$  с  $\mu_t$  в (20) также следует пренебречь слагаемым  $\rho_K v_K \bar{u}$ .

Таким образом, задача о расчете скорости горения при обдуве сведена к краевой задаче системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если решение краевой задачи строить как сходящуюся последовательность задач Коши, в качестве исходного параметра удобно взять не скорость набегающего потока, а напряжение трения  $\tau_w$ . Тогда область изменения аргумента  $y$  можно сократить до  $L_r$  — ширины зоны горения в газовой фазе. На границе  $y = L_r$  граничные условия имеют вид

$$\bar{T} = T_r, \quad \bar{a} = 0, \quad \frac{d\bar{T}}{dy} = 0, \quad \frac{d\bar{a}}{dy} = 0. \quad (21)$$

Скорость набегающего потока, соответствующую данному значению  $\tau_w$ , можно определить путем продолжения решения уравнения (20) до границы  $L_y$  после того, как краевая задача решена, либо с помощью приближенных зависимостей (2), (3).

Основные моменты разработанного алгоритма решения краевой задачи на ЭВМ состоят в следующем. Задаваясь начальным приближением скорости горения  $v_K$ , интегрируем (от поверхности вещества в глубь газовой фазы) уравнение количества движения (20), дополненное моделью турбулентности. При этом, если учитывается зависимость коэффициента молекулярной теплопроводности от температуры, для его вычисления используется температурный профиль, соответствующий нормальному горению. Распределения  $\bar{u}$ ,  $\mu_t$  заносятся в таблицы.

Задаваясь начальным приближением  $\bar{L}_r$ , с помощью таблиц и граничных условий (21) решаем задачу Коши (в направлении от продуктов сгорания к поверхности вещества) для уравнений (17), (18). Из условия

$$\bar{T} - F(v_K^{(s)}) = 0, \quad (22)$$

где  $F$  — зависимость, обратная (15), находится координата поверхности горения  $y_s$ .

Из граничного соотношения (6) на поверхности горения, взятого в форме

$$\left( \frac{c_p T}{c_p T_K + Q_K} - 1 \right) \rho_K v_K + \frac{\kappa_m}{c_p T_K + Q_K} \frac{dT}{dy} = 0,$$

находим следующее приближение  $v_K^{s+1}$ , а из условия  $y_s - L_r = 0$  — следующее приближение  $\bar{L}_r^{s+1}$ . Итерации вычисляются по методу секущих.

Абсолютной сходимости краевой задачи в широком диапазоне начальных приближений  $[v_{\kappa}, L_r]$  удалось добиться только разделением итерационных процессов по  $v_{\kappa}, L_r$  на внешний и внутренний. Численные расчеты показали, что для уменьшения затрат машинного времени на решение краевой задачи внешние итерации надо организовать по  $L_r$ .

Рассмотрим некоторые результаты расчетов для пороха Н. В расчетах принимались следующие исходные данные:

$$c_{\kappa} = 1465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}; Q_{\kappa} = 556800 \text{ Дж/кг}; \rho_{\kappa} = 1600 \text{ кг/м}^3;$$

$$c_p = 1466,5 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}; Q = 2435300 \text{ Дж/кг}; p = 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

$$\kappa_m = 1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; Le_m = Pr_m = Pr_t = 1; T_r = 2333 \text{ К}; T_n = 293 \text{ К};$$

$$W = 0,98 \cdot 10^{10} a p \exp\left(-\frac{44500}{1,987T}\right) \text{ кг/(м}^3 \cdot \text{с)},$$

при которых решение краевой задачи для нормальной скорости горения дает значение  $v_{\kappa 1} = 0,106 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}$ .

На рис. 1, 2, 3 представлены расчетные зависимости коэффициента эрозии по предлагаемой методике. Пересчет  $\tau_w$  на аргумент  $Vi - Vi_*$  проводился по формуле

$$Vi - Vi_* = \frac{\sqrt{8\rho}}{(\rho_{\kappa} v_{\kappa 1})} \sqrt{\tau_w},$$

которая следует из соотношений (2), (3).

Для анализа механизма эрозионного горения рассмотрим рис. 3, на котором представлены температурные профили и распределения скорости химических реакций в газовой фазе. Кривые  $T_0, W_0$  соответствуют нормальному горению,  $T_1, W_1$  — значению параметра  $Vi - Vi_* = 2$ ;  $T_2, W_2$  — значению  $Vi - Vi_* = 10$ . Из сравнения кривых  $T_0, T_1$  и  $W_0, W_1$  следует, что при небольших скоростях обдува (когда зона горения находится в вязком подслое и на начальной стадии выхода в буферный подслей) за счет преобладания эффекта конвекции над эффектом увеличения турбулентностью коэффициентов переноса происходит растяжение температурного профиля в газовой фазе и отеснение зоны химических реакций от поверхности вещества. Это приводит к уменьшению температуры поверхности горения (так,  $T_{s1} = 707,6 \text{ К}$ , а  $T_{s0} = 717,6 \text{ К}$ ) и в конечном итоге к падению скорости горения. По мере роста скорости обдува эффект увеличения коэффициентов переноса начинает преобладать, ширина зоны прогрева сокращается, и зона реакций приближается к поверхности к-фазы (см. рис. 3). В результате увеличиваются температура поверхности (например,  $T_{s2} = 759 \text{ К}$ ) и скорость горения. Отметим также, что увеличение коэффициентов переноса приводит и

к росту ширины зоны химических реакций, она становится сравнимой с шириной зоны инертного прогрева.

Итак, влияние обдува на скорость горения конденсированного вещества проявляется в увеличении конвекции и коэффициентов переноса в зоне горения. При небольших скоростях обдувающего потока (когда зона горения находится в подслое с линейным распределением скорости и на границе буферного подслоя) определяющим является эффект увеличения конвекции, он приводит к отеснению зоны реакций от поверхности горения и уменьшению температуры поверхности, и вслед-

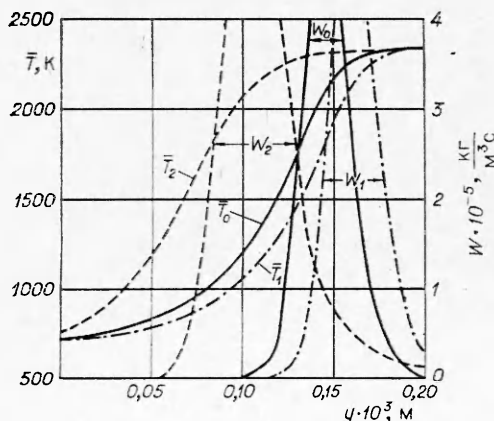


Рис. 3. Распределения температуры и скорости химической реакции в газовой фазе для различных значений параметра  $Vi - Vi_*$ .

ствие чего к отрицательной эрозии. По мере роста скорости обдува эффект увеличения коэффициентов переноса становится ведущим, это приводит к сокращению зоны прогрева и увеличению скорости горения.

В зависимости от скорости обдувающего потока зона горения газовой фазы может находиться не только в вязком подслое, но выходить и в логарифмический подслей, поэтому из известных зависимостей для коэффициента турбулентной вязкости следует использовать аппроксимационную зависимость Ван-Дриста, справедливую вплоть до внешней границы логарифмического подслоя.

*Поступила в редакцию 13/IV 1982*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, О. И. Лейпунский, В. В. Либрович. Теория нестационарного горения пороха. М.: Наука, 1975.
2. В. Н. Вилунов. Докл. АН СССР, 1961, 136, 2, 381.
3. В. Н. Вилунов, А. А. Дворяшин. ФГВ, 1971, 7, 1, 45.
4. Турбулентность/Под ред. П. Брэшоу. М.: Машиностроение, 1980.
5. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
6. И. П. Гинзбург. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970.
7. И. О. Хинце. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.
8. А. Дж. Рейнольдс. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979.

### РАСЧЕТ ДИСПЕРСНОСТИ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

*А. Я. Лукин, А. М. Степанов  
(Ленинград)*

Расчеты по квазистационарным моделям горения частицы металла [1—3] показали, что существенную роль в формировании полей температуры и концентраций реагентов вблизи частицы играют процессы конденсации и испарения продуктов реакции. Поскольку тепло, выделяющееся при конденсации окисла, намного превосходит тепло химической реакции, а испарение сконденсировавшихся продуктов ограничивает рост температуры в зоне горения, адекватность математической модели горения частицы зависит от качества (корректности) описания процессов конденсации и испарения окисла. Ряд важных результатов получен расчетом по нестационарной модели в предположении, что пары окисла везде насыщены [4], т. е. осуществляется равновесный фазовый переход. Можно отметить два наиболее существенных недостатка такого подхода. Во-первых, как следует из оценок [5], вблизи мелких металлических частиц процесс конденсации окисла может быть сильно неравновесным на протяжении всего времени горения, во-вторых, для практики важно иметь сведения о дисперсности получающихся продуктов, а их в рамках предположения о фазовом равновесии окисла получить невозможно.

В данной работе предпринята попытка построения модели горения металлической частицы с учетом кинетики образования (конденсации) дисперсных продуктов реакции. Поскольку исследуемый объем (область микропламени у частицы) очень мал, не приходится говорить о наличии посторонних центров конденсации, обычных для атмосферного воздуха. Процесс конденсации носит существенно гомогенный характер. Наиболее общепринятый в настоящее время метод расчета кинетики гомогенной конденсации основан на вычислении первых четырех моментов функции распределения частичек по их размерам  $f(\delta)$ . Дифференциальные уравнения для их вычисления получаются путем интегрирования