УДК 532.516

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО ПОТОКА

А. А. Гурченков

Вычислительный центр РАН, 117967 Москва

Рассматривается неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости внутри бесконечно длинной щели, через пористые стенки которой равномерно вдувается или отсасывается жидкость. Пластины с жидкостью вращаются как твердое тело с постоянной угловой скоростью. Неустановившийся поток индуцирован некрутильными колебаниями верхней пластины. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели. В этом случае можно найти точное решение трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса. При этом ограничений на характер движения пластины не накладывается.

В работе [1] рассмотрена нестационарная задача о пограничном слое на вращающейся пластине при отсутствии вдува. Нестационарная задача для полупространства, ограниченного пористой пластиной, при наличии вдува (отсоса) среды решена в [2].

В настоящей работе изучается неустановившийся поток однородной несжимаемой жидкости в щели. Щель образована двумя бесконечными параллельными пористыми пластинами Q_1 и Q_2, расположенными на расстоянии l друг от друга. Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U. Пластины с вязкой жидкостью вращаются в пространстве равномерно как твердое тело с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$. Вектор $\boldsymbol{\omega}_0$ составляет постоянный угол α $(0 < \alpha \leqslant \pi/2)$ с плоскостями пластин.

В начальный момент времени верхняя пористая пластина Q_1 начинает двигаться с заданной скоростью $\boldsymbol{u}(t)$. Нижняя пластина остается неподвижной в подвижной системе координат. В этот же момент через верхнюю пластину осуществляется вдув (отсос) жидкости со скоростью $\boldsymbol{u}_0(t)$ по нормали к поверхности пластины. Свяжем с верхней плоскостью Q_1 щели декартову систему координат $Oxyz$ с ортами $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$, так что плоскость Oxz совпадает с плоскостью Q_1, а ось y направлена перпендикулярно Q_1 в глубь жидкости.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ верхняя пористая пластина, через которую осуществляется вдув или отсос среды со скоростью $\boldsymbol{u}_0(t)$ по нормали к ней, начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $\boldsymbol{u}(t)$.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и граничными и начальными условиями, которые в системе $Oxyz$, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, имеют вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{V} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}(\nabla \boldsymbol{V}) = -\frac{1}{\rho}\,\nabla P + \nabla U + \nu \Delta \boldsymbol{V},\\ \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0 \ \text{ в щели}, \qquad \boldsymbol{V}\Big|_{Q_1} = \{\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}_0(t)\}, \qquad \boldsymbol{V}\Big|_{Q_2} = \boldsymbol{u}_0(t), \qquad t > 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь t — время; $\boldsymbol{V}$ — скорость жидкости; P — давление; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость. Движение жидкости начинается из состояния покоя: $\boldsymbol{V}(0, \boldsymbol{r}) = 0$.

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\boldsymbol{V} = \{V_x(y,t), u_0(t), V_z(y,t)\},$$

$$P = \frac{1}{2}\,\rho(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r})^2 + \rho U + \rho x 2\omega_{0z} u_0(t) - \rho z 2\omega_{0x} u_0(t) - \rho y\,\frac{\partial u_0(t)}{\partial t} + \rho s(y,t),$$

где $s(y,t)$ — давление.

Для определения поля скоростей и давлений получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + 2\omega_{0y} V_z = L V_x, \qquad \frac{\partial V_z}{\partial t} - 2\omega_{0y} V_x = L V_z,$$
$$\frac{\partial s}{\partial y} = 2(\omega_{0z} V_x - \omega_{0x} V_z), \qquad 0 \leqslant y \leqslant l, \tag{2}$$

где $L = \nu \partial^2/\partial y^2 - u_0(t)\partial/\partial y$.

Решение системы (2) будем искать в виде

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \sin 2\Omega t - (\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{e}_y) \cos 2\Omega t, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{W}(y,t)$ — новая неизвестная функция $\Omega = \omega_{0y}$. Функция $\boldsymbol{W}$ удовлетворяет уравнению параболического типа и краевым условиям

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = L\boldsymbol{W}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant l, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{W}(0,t) = \boldsymbol{u}(t) \sin 2\Omega t + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{e}_y \cos 2\Omega t$, $t > 0$; $\boldsymbol{W}(y,0) = 0$; $\boldsymbol{W}(l,t) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{u}_0(t) = a = \mathrm{const}$, что соответствует равномерному вдуву или отсосу. При этом $a > 0$ соответствует вдуву среды через верхнюю стенку щели, $a < 0$ — отсосу.

С использованием интеграла Дюамеля решение задачи (4) запишем в виде

$$\boldsymbol{W}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \boldsymbol{W}(0, t-\tau) W_1(y,\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Здесь $W_1(y,t)$ — решение краевой задачи

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + a\,\frac{\partial W_1}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}, \qquad W_1(0,t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad W_1(l,t) = 0. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) воспользуемся операционным исчислением. Введем изображение функции по Лапласу соотношением

$$\tilde{u}(y,p) = \int\limits_0^\infty \exp(-pt) u(y,t)\, dt.$$

В пространстве изображений уравнение (6) принимает вид

$$\nu\,\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}(y,p) - a\,\frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial y}(y,p) - p\tilde{W}_1(y,p) = 0, \tag{7}$$

при этом

$$\tilde{W}_1(0,p) = 1/p, \qquad \tilde{W}_1(l,p) = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\tilde{W}_1(y,p) = C_1 \exp(\lambda_1 y) + C_2 \exp(\lambda_2 y). \tag{9}$$

Определяя константы C_1, C_2 из граничных условий (8), преобразуем решение (9):

$$\tilde{W}_1(y,p) = \frac{1}{p}\exp(\mu y)\,\frac{\operatorname{sh}[(l-y)\sqrt{p/\nu+\mu^2}\,]}{\operatorname{sh}(l\sqrt{p/\nu+\mu^2}\,)}, \qquad \mu = \frac{a}{2\nu}. \tag{10}$$

Обозначим $q = \sqrt{p/\nu+\mu^2}$ и разложим $\psi = \operatorname{sh}[(l-y)q]/\operatorname{sh}(lq)$ на простые дроби:

$$\psi = 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\frac{q^2}{q^2+(\pi n/l)^2}\sin\pi n(1-y/l) =$$

$$= 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\frac{p+\mu^2\nu}{p+\mu^2\nu+(\pi n/l)^2\nu}\,\sin\pi n(1-y/l). \tag{11}$$

Обозначим $\lambda_n = \pi n/l$. Тогда согласно известным из операционного исчисления формулам [3] получим

$$L^{-1}\Big(\frac{p+\mu^2\nu}{P+\mu^2\nu+(\pi n/l)^2\nu}\Big) = \frac{\mu^2+\lambda_n^2\exp[-(\mu^2+\lambda_n^2)\nu t]}{\mu^2+\lambda_n^2}, \tag{12}$$

где L^{-1} — обратный оператор Лапласа.

Подставляя (11) в (10) с учетом (12), в пространстве оригиналов получим решение уравнений (6)

$$W_1(y,t) = \exp(\mu y)\Big(1 - \frac{y}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\lambda_n y\,\frac{\mu^2+\lambda_n^2\exp[-\nu(\mu^2+\lambda_n^2)t]}{\mu^2+\lambda_n^2}\Big). \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи (4) определяется формулами (5), (13).

Подставляя (5) с учетом (13) в (3), получим искомое поле скоростей

$$\boldsymbol{V} = \sin(2\Omega t)\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \boldsymbol{W}(0,t-\tau)W_1(y,t)\,d\tau + \cos(2\Omega t)\boldsymbol{e}_y \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \boldsymbol{W}(0,t-\tau)W_1(y,t)\,d\tau. \tag{14}$$

После преобразований формула (14) приводится к виду

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}(0,t)W_1(y,t) + \int\limits_0^t \{[\boldsymbol{u}(t-\tau) - 2\Omega\boldsymbol{u}(t-\tau)\times\boldsymbol{e}_y]\cos 2\Omega\tau +$$

$$+ [\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\times\boldsymbol{e}_y + 2\Omega\boldsymbol{u}(t-\tau)]\sin 2\Omega\tau\}W_1(y,\tau)\,d\tau,$$

где $\boldsymbol{T}(0,t) = \boldsymbol{u}(0)\cos 2\Omega t + \boldsymbol{u}(0)\times\boldsymbol{e}_y\sin 2\Omega t$.

Дальнейшие преобразования удобно проводить в комплексной форме. Введем комплексные векторы $\hat{V} = V_x + iV_z$, $\hat{u} = u_x + iu_z$. Тогда $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_y = i\hat{u}$, $\boldsymbol{W}(0,t) = iu(t)\exp(-2i\Omega t)$, $\boldsymbol{T}(0,t) = \boldsymbol{u}(0)\exp(2i\Omega t)$.

Формулы (5) и (13) запишутся в виде

$$\hat{W} = i\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \hat{u}(\tau)\exp(-2i\Omega\tau)W_1(y,t-\tau)\,d\tau,$$

$$\hat{V} = \exp(2i\Omega t)\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \hat{u}(\tau)\exp(-2i\Omega\tau)W_1(y,t-\tau)\,d\tau,$$

где $W_1(y,t) = \exp(\mu y)\left(1 - \dfrac{y}{l} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\mu^2 + \lambda_n^2 \exp[-\nu(\mu^2+\lambda_n^2)t]}{\mu^2+\lambda_n^2}\,\sin\lambda_n y\right)$.

Векторы касательных напряжений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели, находятся по формулам

$$\hat{f}_0 = \rho\nu\,\frac{\partial\hat{V}}{\partial y}\Big|_{y=0}, \qquad \hat{f}_l = \rho\nu\,\frac{\partial\hat{V}}{\partial y}\Big|_{y=l}.$$

Окончательно получим

$$\hat{f}_0 = \exp(2i\Omega t)\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\exp(-2i\Omega\tau)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,(0, t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu(1-\operatorname{cth}\mu l) - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\exp[-(\mu^2+\lambda_n^2)\nu t]}{\mu^2+\lambda_n^2},$$

$$\hat{f}_l = \exp(2i\Omega t)\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\exp(-2i\Omega\tau)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,(l, t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=l} = -\frac{\exp(\mu l)}{l}\left(\frac{\mu}{\operatorname{sh}\mu l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\lambda_n^2\exp[-\nu(\mu^2+\lambda_n^2)t]}{\mu^2+\lambda_n^2}\right).$$

Найдем асимптотическое (при больших t) представление векторов касательных напряжений

$$\hat{f}_0 = \rho\nu\mu(1-\operatorname{cth}\mu l)\hat{u}(t), \qquad \hat{f}_l = -\rho\nu\mu\,\frac{\exp(\mu l)}{\operatorname{sh}\mu l}\,\hat{u}(t), \qquad \mu = \frac{a}{2\nu}.$$

Из этих выражений следует, что силы трения, действующие на стенки щели, существенно зависят от скорости поперечного потока среды.

Полученные поле скоростей и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на пластины, могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гурченков А. А.** Решение уравнений Навье — Стокса во вращающейся щели с вязкой жидкостью // Физическая кинетика и гидромеханика: Сб. науч. тр. М.: Моск. обл. пед. ин-т, 1984. С. 3–17.
2. **Гурченков А. А., Яламов Ю. И.** Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
3. **Дейч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 7/VIII 2000 г.,
в окончательном варианте — 24/I 2001 г.